МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МУРМАНСКИЙ АРКТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 1. Теория вероятностей

*Допущено Учебно-методическим советом университета
в качестве учебного пособия для обучающихся высших учебных заведений
по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика"
для направлений подготовки 01.03.02 "Прикладная математика
и информатика", 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника",
44.03.05 "Педагогическое образование"*

Учебное электронное издание

Мурманск
Издательство МАУ
2024

16+

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
Т 33

Рецензенты:
О. И. Алехина, методист муниципального бюджетного учреждения дополнительного профессионального образования города Мурманска "Городского информационно-методического центра работников образования";
А. В. Немыкин, канд. экон. наук, зав. кафедрой экономики филиала РАНХиГС в г. Мурманске

Т 33 Теория вероятностей и математическая статистика. Ч. 1. Теория вероятностей : учеб. пособие для обучающихся высших учебных заведений по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика" для направлений подготовки 01.03.02 "Прикладная математика и информатика", 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника", 44.03.05 "Педагогическое образование" / авт.-сост. В. В. Левитес ; Мин-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Мурм. аркт. ун-т. – Мурманск : Изд-во МАУ, 2024. – 1 опт. компакт-диск (CD-ROM). – Систем. требования: PC не ниже класса Pentiuum II 128 MbRAM ; Windows 9X–10 ; свободное место на HDD 131 Mb ; привод для компакт-дисков CD-ROM 2x и выше. – Загл. с титул. экрана. – Текст : электронный.

ISBN 978-5-907368-82-8 (общ.)
ISBN 978-5-907368-83-5 (Ч. 1)

В учебном пособии представлен блок теоретического материала и задачи как подробно разобранные, так и предназначенные для самостоятельного решения. Для проверки усвоения знаний после каждого параграфа обучающимся предложены вопросы для самопроверки. Пособие предназначено для обучающихся по дисциплине "Теория вероятностей и математическая статистика".

The manual presents a block of theoretical material and tasks both analyzed in detail and intended for independent solution. To check the assimilation of knowledge, after each paragraph, students are asked questions for self-test.

It is intended for students in the discipline "Probability Theory and Mathematical Statistics".

Учебное электронное издание
Минимальные системные требования:
PC не ниже класса PentiuumII 128 MbRAM;
свободное место на HDD 131 Mb;
привод для компакт-дисков CD-ROM 2x и выше.

Учебное электронное издание

Минимальные системные требования:
PC не ниже класса PentiuumII 128 MbRAM;
свободное место на HDD 131 Mb;
привод для компакт-дисков CD-ROM 2x и выше

Вера Владимировна Левитес

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Часть 1. Теория вероятностей

Компьютерная верстка Г. М. Плишко

Рецензенты:
О. И. Алехина, методист муниципального бюджетного учреждения дополнительного профессионального образования города Мурманска "Городского информационно-методического центра работников образования";
А. В. Немыкин, канд. экон. наук, зав. кафедрой экономики филиала РАНХиГС в г. Мурманске

Подписано к использованию 30.05.2024
Объем издания 1,88 Мб
Тираж 30 экз.

ФГАОУ ВО "Мурманский арктический университет"
183010, г. Мурманск, ул. Спортивная, 13.
Телефон (8152) 21-38-01
E-mail: office@mauniver.ru
https://www.mauniver.ru

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СИМВОЛОВ И СОКРАЩЕНИЙ

$\subset$ – включение.

$\in$ – принадлежность элемента множеству.

$\notin$ – непринадлежность элемента множеству.

U – универсальное множество.

mes – мера множества.

$n!$ – факториал числа n, т. е. произведение натуральных чисел от 1 до n.

A_n^m – число размещений из л по m.

C_n^m – число сочетаний из л по m.

P_n – число перестановок из л элементов.

$M(X)$ – математическое ожидание случайной величины X.

$D(X)$ – дисперсия случайной величины X.

$\sigma(X)$ – среднеквадратическое отклонение.

$F(x)$ – функция распределения.

$f(x)$ – плотность вероятности.

ДСВ – дискретная случайная величина.

НСВ – непрерывная случайная величина.

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности, присущие массовым случайным явлениям. Как наука она сформировалась более 300 лет назад. В настоящее время знания по теории вероятностей и математической статистике необходимо специалистам самых разных профессий. Она используется в эконометрике, многомерном статистическом анализе, нейронных сетях, распознавании образов и во многих других научных областях. Современный экономист должен уметь использовать аппарат математической статистики на высоком уровне.

Данное учебное пособие включает в себя кратко, но всесторонне изложенный теоретический материал с разобранными на каждую тему практическими заданиями. Пособие может быть использовано в качестве основной литературы для проведения лекций и практических занятий.

Предпосылками написания данного пособия являлась необходимость систематизировать накопленный материал, а также для возможности иметь полностью укомплектованный комплект, обеспечивающий дисциплину "Теория вероятностей и математическая статистика".

Пособие может применяться для различных направлений подготовки, таких как 01.03.02 Прикладная математика и информатика, 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, 44.03.05 Педагогическое образование.

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§1. Основные понятия теории вероятностей

1.1. Испытания и события

При исследовании различных задач часто приходится встречаться с явлениями, про которые нельзя заранее определить результат проведения эксперимента. Такие явления называются случайными. Человек заинтересовался случайными явлениями, стал классифицировать их исходы как невозможные, возможные и достоверные. Он заметил, что случайностями не так уж редко управляют объективные закономерности. Например – подбрасывание монеты. При многократном подбрасывании можно заметить, что появление герба происходит примерно в половине случаев. Кто и когда это заметил неизвестно, но французский ученый Бюффон (1707–1788 гг.) 4 040 раз подбросил монету и герб выпал 2 048 раз. В XXI в. американские экспериментаторы повторили опыт и подбросили монету 10 000 раз, герб выпал 4 979 раз. Значит результаты бросаний монеты, хотя каждое из них является случайным событием, при неоднократном повторении подвластны объективному закону.

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам, когда появилась возможность и возникла необходимость изучения математическими методами азартных игр (таких как орлянка, кости, рулетка). Самые ранние работы ученых в области теории вероятностей относятся к XVII в. Первоначально ее основные понятия не имели строго математического описания. Задачи, из которых позже выросла теория вероятностей представляли набор некоторых эмпирических фактов о свойствах реальных событий, которые формулировались с помощью наглядных описаний.

В создание теории вероятностей внесли вклад многие ученые. Первая печатная работа, посвященная случайности, "Книга об азартных играх" была написана итальянским ученым Д. Кардано (1501–1576). В ней автор, в частности, нашел вероятности появления определенного числа очков при бросании игральных костей. Кардано первым начал присваивать событию, исход которого неизвестен, число в интервале от 0 до 1, принимая во внимание общее число исходов и число благоприятных исходов. Другой итальянский ученый Г. Галилей (1564–1642) также посвятил вероятности трактат под названием "Рассуждение об игре в кости".

Считается, что теория вероятностей родилась в переписке между Б. Паскалем (1623–1662) и П. Ферма (1601–1665), которые пытались решить задачи, предложенные Паскалю профессиональным игроком в кости и карты шевалье де Мере (1607–1684). Ферма и Паскаль никогда лично не встречались (Ферма жил в Тулузе, а Паскаль – в Париже), но благодаря их совместным усилиям были заложены основы теории вероятностей. В результате переписки двух гениев появился целый ряд работ. В частности, был опубликован написанный Паскалем "Трактат об арифметическом треугольнике", один из важнейших трудов по комбинаторике.

Современный вид теория вероятностей получила благодаря аксиоматике, предложенной Андреем Николаевичем Колмогоровым (1903–1987). А. Н. Колмогоров в 1933 г. на основе теории множеств и теории меры дал наиболее совершенное аксиоматическое построение теории вероятностей. В результате теория вероятностей приобрела строгий математический вид и окончательно стала восприниматься как один из разделов математики.

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий).

При этом изучаемые явления рассматриваются в абстрактной форме, независимо от их конкретной природы. То есть теория вероятностей рассматривает не сами реальные явления, а их упрощенные схемы – математические модели. Предметом теории вероятностей являются математические модели случайных явлений. При этом под случайным явлением понимают явление, предсказать исход которого невозможно (при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта оно протекает каждый раз несколько по-иному). Примеры случайных явлений: выпадение герба при подбрасывании монеты, выигрыш по купленному лотерейному билету, результат измерения какой-либо величины, длительность работы телевизора и т. п.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, контроль их, ограничение сферы действия случайности. В настоящее время нет практически ни одной области науки, в которой в той или иной степени не применялись бы вероятностные методы.

Теория вероятностей имеет дело с такими событиями, которые имеют массовый характер. Это значит, что данная совокупность условий может быть практически или мысленно воспроизведена неограниченное число раз. Каждое такое осуществление данной совокупности условий называют испытанием (или опытом).

Сначала определим понятие "случайное событие" исходя из его интуитивного, наглядного понимания. Пусть проводится некоторый опыт (эксперимент, наблюдение, испытание), исход которого предсказать заранее нельзя. Такие эксперименты в теории вероятностей называют случайными.

Случайный эксперимент – это четко описанная последовательность действий, которая может быть воспроизведена сколько угодно раз, но исход исполнения которой не может быть предсказан с уверенностью. Невозможность точно угадать исход эксперимента вызвана большим количеством неконтролируемых нами факторов.

При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять, хотя бы теоретически, при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Явления, происходящие в результате случайного эксперимента, называются элементарными исходами. Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Множество всех элементарных событий называется пространством элементарных событий или пространством исходов или полной группой событий и обозначаются буквой Ω.

Таким образом, случайное событие называют элементарным, если оно удовлетворяет условиям:

– два элементарных случайных события никогда одновременно не реализуются в эксперименте;

– конкретный исход эксперимента всегда есть элементарное событие, одно из множества элементарных событий Ω.

Элементарные события служат "кирпичиками", из которых строится описание любого события стохастического эксперимента.

Случайным событием (или просто: событием) называется любой исход опыта, который может произойти или не произойти.

Случайное событие – это любое подмножество всех возможных исходов случайного эксперимента Ω. Случайным событием (или просто событием) называется всякое явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

Обозначать события принято прописными буквами латинского алфавита, например, A, B, C, указывая в фигурных скобках множество элементарных событий из которых оно состоит: $A = \{A_1; A_2; A_3\}$.

В зависимости от результата исходов многократного воспроизведения заданного комплекса условий события можно условно классифицировать следующим образом:

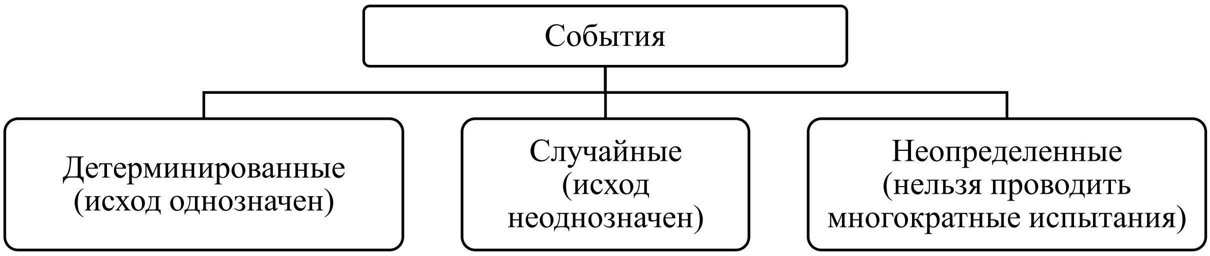


Рис. 1. Классификация событий

Заранее известен исход во многих явлениях классической физики, поэтому классическую физику называют детерминированной. В то же время нельзя определить результат исхода войны или матча, так как их невозможно повторить, сохранив все начальные условия без изменений.

Если при повторении некоторого начального комплекса условий будущее состояние системы определено не однозначно, а лишь с некоторой вероятностью, то рассматривают случайные события: выявление бракованной детали, результат стрельбы по мишени и т. д.

Теория вероятностей изучает свойства массовых случайных событий, способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий, а также при взаимодействии большого числа случайных факторов.

Для того, чтобы произошло какое-либо событие A в данном испытании, необходимо и достаточно, чтобы произошло хотя бы одно элементарное событие, благоприятствующее событию A.

Если, например, испытание состоит в бросании монеты, то выпадение герба является событием; если испытание – изготовление подшипника данного типа, то соответствие подшипника стандарту – событие; если испытание – бросание игральной кости, то выпадение пятерки – событие.

Если монету подбросить один раз, то элементарными исходами можно считать выпадение герба (Г) или цифры (Ц).

Виды событий

1) Событие называется ***достоверным***, если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется ***невозможным***, если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара – достоверное событие; появление белого шара – невозможное событие.

2) Случайные события называют **несовместными,** если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

3) Если при проведении опыта могут произойти несколько событий и каждое из них по объективным условиям не является более возможным, чем другое, то такие события называются ***равновозможными.***

4) Событие A называется ***благоприятствующим событию*** B, если появление события A влечет за собой появление события B.

5) ***Противоположными*** называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через A, то другое принято обозначать $\overline{A}$.

Операции над событиями

1) ***Дополнением*** к событию A (или *отрицанием к A*) называется ***множество “не A”*** – это все точки из Ω, не входящие в A (рис. 2, *а*).

2) ***Объединением*** (или *суммой*) двух событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произойдет по крайней мере одно из событий A или B. Это событие обозначается так: $C = A + B$ (рис. 2, *б*).

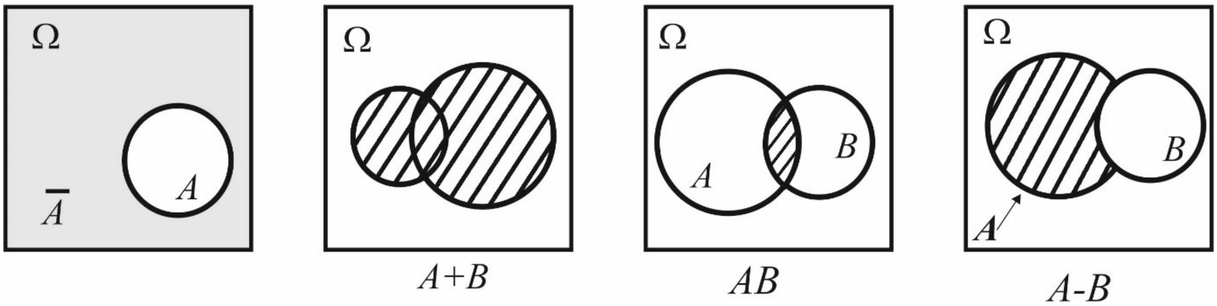
Объединением нескольких событий называется событие, состоящее в появлении по крайней мере одного из них. Запись $D = A + B + C$ означает, что событие D есть объединение событий A, B и C.

3) ***Совмещением*** (или *произведением*) двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном наступлении как события A, так и события B. Это событие будем обозначать AB или BA (рис. 2, *в*).

Аналогично, совмещением нескольких событий, например, A, B и C, называется событие $D = ABC$, состоящее в совместном наступлении событий A, B и C.

Если события A и B несовместны, то событие AB – невозможное.

4) Событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит, будем называть ***разностью*** событий А и В и обозначать $A - B$ (рис. 2, *в*).



а *б* *в* *в*

Рис. 2. Операции над событиями

Пример

Если событие A заключается в том, что курс акций компании на завтрашних торгах будет не ниже 25 руб., а событие B заключается в том, что относительное изменение курса акций не превысит 3 % по сравнению с курсом акций предыдущего дня, то в чем будет заключаться событие, равное произведению событий A и B?

Решение

Курс акций компании на завтрашних торгах будет не ниже 25 руб. И относительное изменение курса акций не превысит 3 % по сравнению с курсом акций предыдущего дня.

Сумма событий A и B: Курс акций компании на завтрашних торгах будет не ниже 25 руб. ИЛИ относительное изменение курса акций не превысит 3 % по сравнению с курсом акций предыдущего дня.

Частота события

Пусть при n испытаниях событие A появилось m раз. Отношение m/n называется *частотой* (*относительной частотой*) события A и обозначается

$$w(A) = \frac{m}{n}.$$

Длительные наблюдения над появлением или не появлением события A при большом числе независимых испытаний, производимых при одном и том же комплексе условий в, в ряде случаев показывают, что число появлений события A подчиняется устойчивым закономерностям. А именно, оказывается, что отношение m/n (частота события A) при достаточно больших n для большинства таких серий наблюдений сохраняет почти постоянную величину, причем большие отклонения наблюдаются тем реже, чем многочисленнее произведенные испытания.

Представим себе, что относительно события A принципиально возможно проведение неограниченной последовательности не зависимых друг от друга испытаний в неизменных условиях. Если в результате достаточно многочисленных наблюдений замечено, что частота события A ведет себя достаточно правильно и почти всегда колеблется около некоторой, вообще говоря неизвестной, постоянной, то мы скажем, что это событие имеет вероятность.

В качестве иллюстрации почти постоянства частот при больших числах испытаний рассмотрим распределение новорожденных по полу по месяцам. Данные заимствованы из книги Г. Крамера "Математические методы статистики" и представляют собой официальные данные шведской статистики за 1935 г.

Месяц	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**За год**
Всех	7 280	6 957	7 883	7 884	7 892	7 609	7 585	7 393	7 203	6 903	6 552	7 132	88 273
Мальчиков	3 743	3 550	4 017	4 173	4 117	3 944	3 964	3 797	3 712	3 512	3 392	3 761	45 682
Девочек	3 537	3 407	3 866	3 711	3 775	3 665	3 621	3 596	3 491	3 391	3 160	3 371	42 591
Частота рождений девочек	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473	0,4825

На рис. 3. показано уклонение частоты рождений девочек по месяцам от частоты рождений девочек за год.

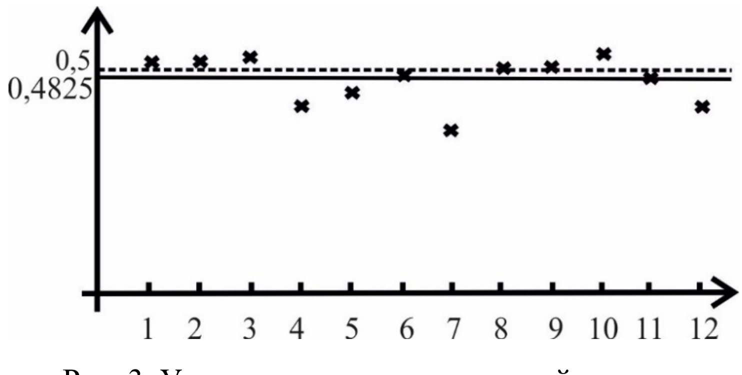


Рис. 3. Уклонение частоты рождений девочек

Частота $w(A)$ колеблется около 0,5.

Если событие достоверно, то оно произойдет при каждом испытании ($m = n$). Поэтому частота достоверного события всегда равна единице. Наоборот, если событие невозможно, то оно ни при одном испытании не осуществится ($m = 0$). Следовательно, частота невозможного события в любой серии испытаний равна нулю. Поэтому вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного события равна нулю.

Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то его частота m/n при большом числе испытаний будет мало отличаться от некоторого числа p (где $0 < p < 1$) – вероятности события A. Это позволяет принимать за вероятность число, около которого колеблется наблюдаемая частота события.

Статистическое определение вероятности

Вероятностью события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются значения относительной частоты при больших n.

Относительная частота события обладает свойством устойчивости:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Если проводить серии опытов с большим числом испытаний при одинаковых условиях, то во многих случаях относительная частота наблюдаемого события будет мало меняться от серии к серии. Этот факт (статистическая устойчивость) проверен многократно в различных экспериментах.

1.2. Классическое определение вероятности

Предположим, что все элементарные исходы данного испытания равновозможны. Тогда вероятностью некоторого события A, которое может наступить или не наступить в данном испытании называют число

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n – число всех элементарных исходов; m – число исходов, благоприятствующих событию A.

Пример

В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных, 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар.

Решение

Пусть события A: "вынутый шар черный" $n = 12$; $m = 4$;

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

Пример

Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 7.

Решение

Пусть событие A: "сумма выпавших очков равна 7".

Найдем число всех элементарных исходов, учитывая, что на каждой косточке может выпасть от 1 до 6 очков. Все возможные варианты можно записать в таблицу:

	1	2	…	6
1	1–1	1–2	…	1–6
2	2–1	2–2	…	2–6
…	…	…	…	…
6	6–1	6–2	…	6–6

Число всех элементарных исходов: $n = 36$.

Число исходов, благоприятствующих событию A:

1–6; 2–5; 3–4; 4–3; 5–2; 6–1 $\Rightarrow m = 6$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Классическое определение вероятности применяется только в следующих случаях:

– число элементарных исходов конечно;

– результаты всех испытаний или наблюдений равновозможны;

– все равновозможные события образуют полную группу попарно несовместных событий.

Свойства вероятностей

1) Если событие A достоверно, то $P(A) = 1$;

2) Если событие A невозможно, то $P(A) = 0$;

3) Если событие A не является ни достоверным, ни невозможным, то $0 < P(A) < 1$.

Классическое определение вероятности впервые встречается у Я. Бернулли в книге "Искусство предположения" (1713). Более четкую формулировку можно найти в трудах А. Муавра, П. Лапласа, Ж. Лагранжа.

Следует уточнить, что такое определение содержит уже в себе самом понятие равновероятности, и в рамках классических (но наиболее понятных интуитивно) представлений от этого порочного круга избавиться не удается. Также недостатком такого подхода служит тот очевидный факт, что классическая вероятность может быть лишь рациональным числом как отношение двух целых, хотя уже из определения геометрической вероятности следует, что она может являться иррациональным числом.

Вероятность условно можно изобразить в виде делений шкалы от 0 до 1.

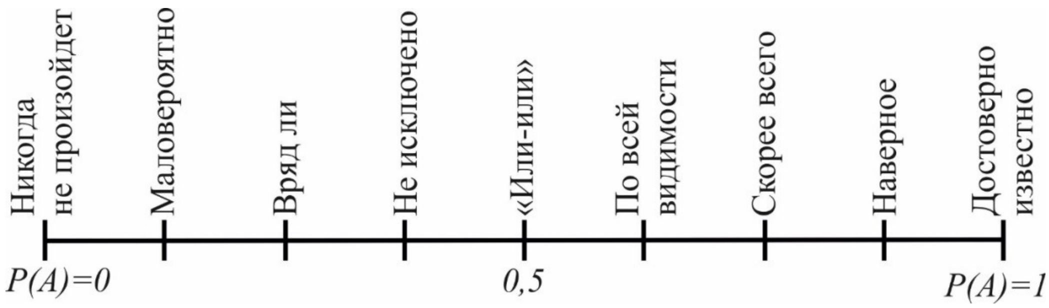


Рис. 4. вероятность в виде делений шкалы

Если не удается посчитать т и п для вычисления вероятности из-за нарушения перечисленных условий, то можно воспользоваться или геометрическим, или статистическим определением вероятности.

1.3. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов безразлично какой природы заданного конечного множества.

При непосредственном вычислении вероятностей часто используют формулы комбинаторики.

Перестановками называются комбинации, составленные из одних и тех же n различных элементов, отличающихся только порядком их расположения.

Число всех возможных перестановок $P_n = n! = 1 \cdot 2 \ldots n$.

Пример

Сколькими способами можно составить трехзначное число из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в состав числа только один раз.

Решение

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

Ответ: Можно составить 6 трехзначных чисел.

Размещениями называются комбинации, составленные nразличных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m-1);$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по два.

Решение

По условию: $n = 6$; $m = 2$

$$n - m - 1 = 6 - 2 + 1 = 5$$

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

Ответ: из 6 флажков различного цвета, взятых по два можно составить 30 сигналов.

Сочетаниями называют комбинации, составленные nразличных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, в котором 10 деталей.

Решение

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45.$$

Ответ: две детали из ящика, в котором 10 деталей можно выбрать 45 способами.

Пример

В партии из 10 деталей 3 бракованных. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 деталей точно 2 бракованных.

Решение

Событие a заключается в том, что среди взятых наудачу 6 деталей точно 2 бракованных.

Число всех элементарных исходов – это количество способов, которыми можно взять 6 деталей из 10.

$$n = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A – это количество способов, которыми можно взять 4 детали из 7 хороших и 2 из 3 бракованных:

$$m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2} = 5\cdot 3\cdot 7;$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5\cdot 3\cdot 7}{5\cdot 3\cdot 7} = 0{,}5.$$

1.4. Геометрическая вероятность

Если пространство элементарных событий содержит бесконечное множество элементов и ему можно поставить в соответствие некоторое геометрическое пространство, а вероятность каждого события зависит только от меры этого события, а не от его положения, то говорят, что на этом пространстве определена *геометрическая вероятность*. При этом вероятность каждого события A есть отношение меры A к мере U пространства элементарных событий. Под мерой понимается в одномерном пространстве – *длина,* в двумерном пространстве – *площадь,* в трехмерном пространстве – *объем.*

Геометрическое определение вероятности используется при выполнении условий:

– на пространстве элементарных событий можно ввести меру;

– любые два элементарных события несовместны;

– вероятность события, заключающегося в попадании точки в бесконечно-малую окрестность, зависит только от размеров этой окрестности.

Таким образом, геометрическая вероятность означает, что

$$P(A) = \frac{mes(A)}{mes(U)}.$$

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: 1) поставленная точка может оказаться в любой части отрезка L; 2) вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его положения относительно L.

$$P(A) = \frac{l}{L}.$$

Пусть плоская фигура g составляет часть фигуры G. На фигуру G наудачу поставлена точка. Это означает выполнение следующих предположений: 1) поставленная точка может оказаться в любой части фигуры G; 2) вероятность попадания точки на фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее положения относительно G.

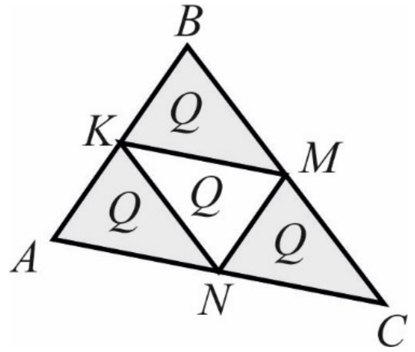
$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}.$$

Пример

Из треугольника ABC случайным образом выбирается точка X. Найти вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника.

Решение

Средние линии разбивают треугольник ABC на четыре равных малых треугольника, площадь каждого из которых обозначим через Q. Тогда площадь треугольника ABC в 4 раза больше: $S_{ABC} = 4Q$.



Интересующее нас событие A состоит в том, что точка X принадлежит малому треугольнику MNK.

Вероятность события D найдем по формуле

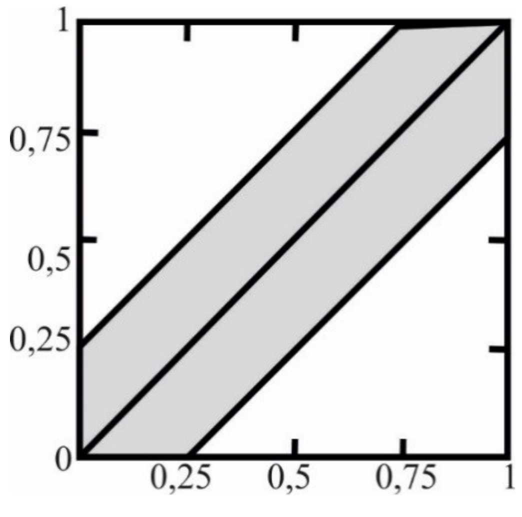
$$P(A) = \frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{Q}{4Q} = \frac{1}{4}.$$

Пример. (Задача о встрече).

Двое договариваются встретиться в определенном месте. Встреча должна произойти в течение 1 ч (скажем, с 12.00 до 13.00). Пришедший первым ждет не более 15 мин, после чего уходит. Какова вероятность встречи?

Решение

Элементарный исход состоит в том, что один участник появляется в момент t_1, второй – в момент t_2.



$t_1 \in [12;13]$, $t_2 \in [12;13]$, т. е. исход характеризуется парой действительных чисел $(t_1;t_2)$ и может быть изображен точкой квадрата со стороной 1 на плоскости (выбор начала координат не влияет на результат). Событие $\{t_1 = t_2\}$ благоприятствует встрече и изображается диагональю квадрата. Точки над диагональю соответствуют событию $\{t_1 > t_2\}$ (первый пришел позже), под диагональю – $\{t_1 < t_2\}$ (второй пришел позже). Благоприятствующие встрече события: $\{0 < t_1 - t_2 \le 0,25\}$ и $\{0 < t_2 - t_1 \le 0,25\}$. Этим событиям соответствуют изображенные на рисунке трапеции над и под диагональю. Площадь квадрата S(Ω) = 1. Событию *A* соответствуют заштрихованные области исходного квадрата, их площадь:

$$S(A) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{9}{16}\right) = \frac{7}{16};$$

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{7}{16}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Что подразумевается в теории вероятностей под терминами опыт и эксперимент?
3. Какие события называются случайными?
4. Что называют элементарным событием?
5. Какие случайные события называются невозможными, достоверными?
6. Какие события называют совместными в данном испытании?
7. Какие события называют несовместными в данном испытании?
8. Какие события образуют полную группу событий?
9. Какие события считают равновозможными?
10. Какие события называют противоположными?
11. Что называют суммой двух событий?
12. Что называют произведением двух событий?
13. Что такое частота события?
14. Приведите статистическое определение вероятности.
15. Какими свойствами обладает статистическая вероятность?
16. Приведите классическое определение вероятности.

17. Чему равна вероятность достоверного события?

18. Чему равна вероятность невозможного события?

19. В каких пределах заключена вероятность любого события?

20. Как определяется геометрическая вероятность в общем случае?

Задачи для самостоятельного решения

Алгебра событий

1. Событие A означает, что, хотя бы одна пуля при трех выстрелах попадет в цель, т. е. цель будет поражена. Что означает событие $\overline{A}$?

2. Событие A – хотя бы одно из четырех изделий бракованное событие B – бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

3. Пусть A, B, C – три произвольных события. Выразить формулами, что из событий A, B, C:

1) появляется только одно;
2) появляются только два;
3) появляются три;
4) не появляется ни одно из событий;
5) появляются хотя бы два;
6) появляется хотя бы одно.

4. Пусть эксперимент заключается в вытаскивании одной карты из колоды в 36 карт. Событие A заключатся в том, что выбрали черву (A = {черва}), а событие B – в том. что выбрали туза (B = {туз}). Определите, что означают события: $A + B$. AB; $A - B$; $B - A$; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

5. Три стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Записать выражение следующих событий:

1) в мишень попали все три стрелка; 2) попал только один стрелок; 3) попал хотя бы один стрелок.

6. Бросается игральный кубик. Какие события являются противоположными?

а) {1,2}, {3.4},{5,б};

б) {1}, {2.3.4.5.б};

в) {1,2,3}, {3.4.5,6};

г) {4–5}, {1.6}.

7. Бросили монету и игральную кость. События: A = {выпал "герб"}; B = {выпало четное число очков}. Укажите верные утверждения:

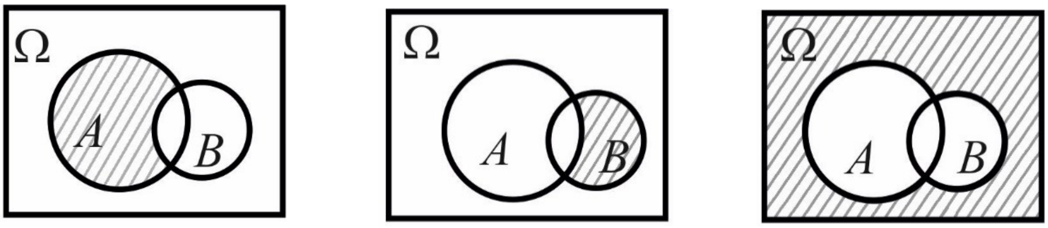
а) события A и B несовместны и независимы;

б) события A и B совместны и зависимы;

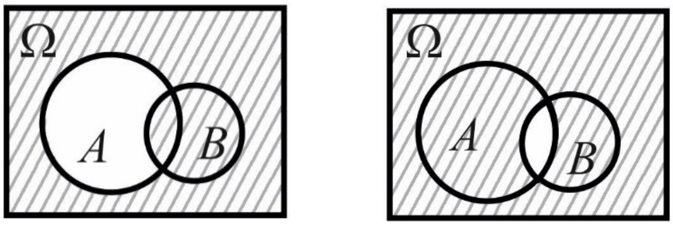
в) событие $A + B$ – достоверное событие;

г) события A и B совместны и независимы.

8. Запишите верные утверждения для диаграмм Венна.

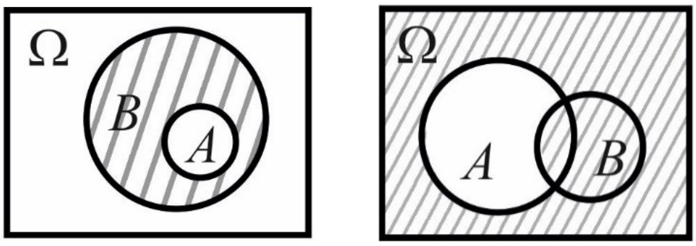


а *б* *в*

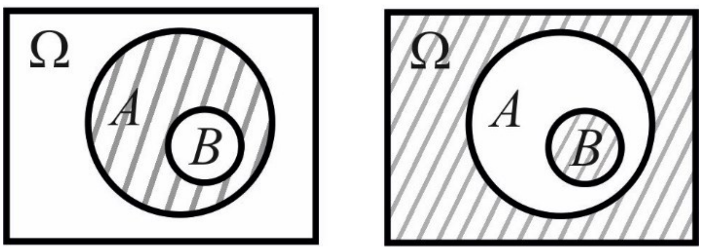


г *д*

9. Событие A *есть* следствие события B *(B* влечет за собой *A)* Укажите диаграмму Венна для разности событий, для события, противоположного к разности $A\backslash B$.

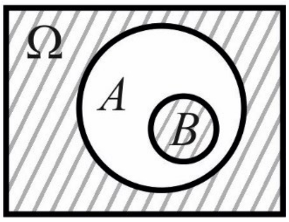


а *б*

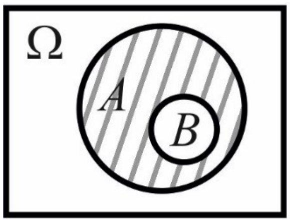


в *г*

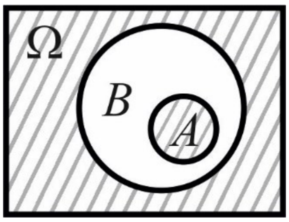
10. Событие *B* есть следствие события *A* (*A* влечет за собой *B*). Укажите диаграмму Венна для события, противоположного к разности *B**A*:



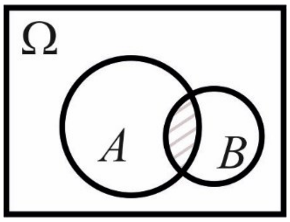
а



б



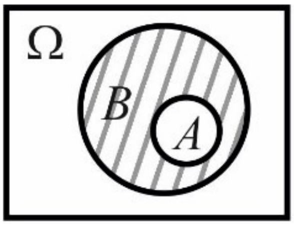
в



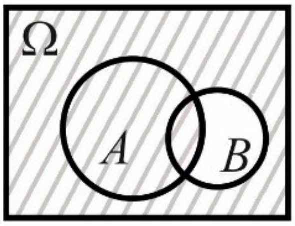
г

11. Установите соответствие между диаграммами Венна и действиям над событиями.

а

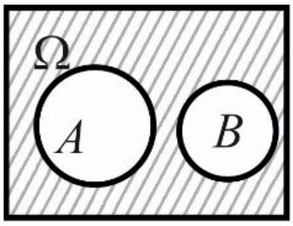


б

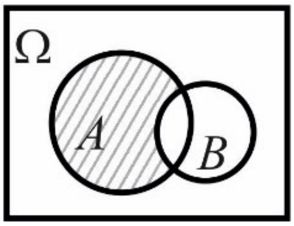


1) $B \cdot \bar{A}$
2) $A \cdot \bar{B}$
3) $\overline{A \setminus B}$
4) $\overline{B \setminus A}$
5) $A + B$
6) $\bar{A} \cdot \bar{B}$

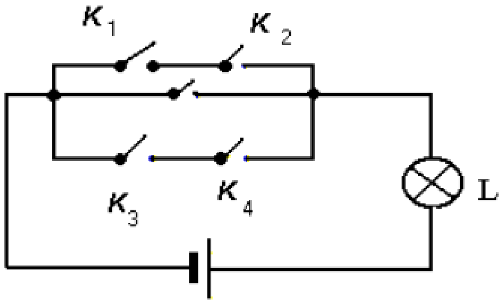
в



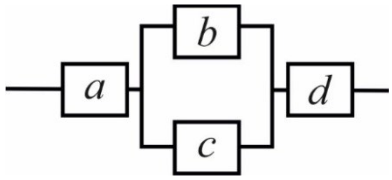
г



12. Составлена электрическая схема. События A_i – i-й контакт замкнут. Записать событие *C* – цепь замкнута, лампа горит.



13. Цепь состоит из независимых блоков, соединенных в систему. Записать событие, заключающееся в том, что цепь замкнута.



Классическая вероятность

1. Из слова "НАУГАД" выбирается наугад одна буква. Какова вероятность того, что: а) это буква "Я"; б) это гласная?

2. В урне имеются 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар: а) белый; б) черный?

3. При стрельбе была получена частота попадания 0,6. Сколько было сделано выстрелов, если получено 12 промахов?

4. Брошены три монеты. Найти вероятность того, что выпадут два "герба".

5. Бросают игральную кость. Какова вероятность выпадения номера 5 на верхней грани упавшей на стол кости? Какова вероятность выпадения номера большего или равного 5?

6. В партии транзисторов n стандартных и m бракованных. При контроле оказалось, что первые k транзисторов стандартны. Найти вероятность того, что следующий транзистор будет стандартным.

7. Брошены две игральные кости. Какова вероятность выпадения на двух костях в сумме не менее 9 очков? Какова вероятность выпадения единицы, по крайней мере, на одной кости?

8. Из пяти карточек с буквами А, Б, В, Г, Д наугад одна за другой выбираются три и располагаются в ряд в порядке появления. Какова вероятность, что получится слово "ДВА"?

9. В урне 3 белых и 7 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наугад два шара окажутся черными?

10. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 студентов третьего курса. Из этого состава выбирают 5 человек. Найти вероятность, что: а) все первокурсники попадут в совет; б) в совет будет избран 1 первокурсник, 2 второкурсника и 2 студента 3-го курса.

11. В партии из 50 изделий 5 бракованных. Из партии выбираются наугад 6 изделий. Определить вероятность того, что и среди 6 изделий 2 окажутся бракованными.

12. В 25 экзаменационных билетах содержится по два не повторяющихся вопроса. Студент знает ответы только на 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый экзаменующимся билет состоит из подготовленных вопросов?

13. В лотерее разыгрывается 1 000 билетов. Среди них два выигрыша по 5000 руб., пять выигрышей по 2 000 руб., десять выигрышей по 1 000 руб. и 25 по 500 руб. Некто покупает один билет. Найти вероятность: а) выигрыша не менее 2 000 руб.; б) какого-либо выигрыша.

14. В партии из 20 радиоприемников 5 неисправных. Для проверки наугад обирается 3 радиоприемника. Найти вероятность того, что в число выбранных войдут один неисправный и два исправных приемника.

Геометрическая вероятность

1. После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что обрыв произошел между 50-м и 55-м километрами линии?

2. На 20-километровом участке линии электропередачи, соединяющей пункты A и D и проходящей через пункты B и C, произошел разрыв. Найти вероятность того, что разрыв произошел между пунктами B и C, если расстояние между пунктами A и B (измеренное вдоль линии электропередачи) равно 13 км, между пунктами C и D – 6 км.

3. В прямоугольник 5×4 см^2 вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

4. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

5. В круг радиуса $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. В круг наудачу ставится точка. Найдите вероятность того, что она не попадет в данный треугольник.

6. Двое договорились встретиться в течение часа. Первый пришедший ждет второго 10 мин. Найти вероятность, что встреча произойдет.

§2. Теоремы сложения и умножения вероятностей

2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $A + B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A или события B, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором, или в обоих выстрелах.

В частности, если два события A и B – несовместные, то $A + B$ – событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Суммой нескольких событий называют событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пусть A и B несовместные события, причем вероятности этих событий известны.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Доказательство

Введем обозначения:

n – общее число возможных элементарных исходов испытания;

m_1 – число исходов, благоприятствующих событию A;

m_2 – число исходов, благоприятствующих событию B.

Число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно $m_1 + m_2$. Следовательно,

$$P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких парно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

Пример

В урне 20 шаров: 8 красных, 6 синих, 6 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение

Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного $P(A) = 8/20 = 2/5$, синего $P(B) = 6/20 = 3/10$. События A и B несовместимы, по теореме сложения

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 8/20 + 6/20 = 0{,}7.$$

Пример

В лотерее 1 000 билетов: из них на один билет падает выигрыш 500 руб., на 10 билетов – выигрыш по 100 руб., на 80 билетов – 20 руб., на 100 билетов – 8 руб., остальные невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб. при покупке 1 билета.

Решение

Событие A – выиграть не менее 20 руб. Событие A может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1– выигрыш 20 руб, A_2 – 100 руб, A_3 – 500 руб. События несовместимы, следовательно, $A = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 50/1\ 000 + 10/1\ 000 + 1/1\ 000 = 0{,}061.$

2.2. Вероятность противоположных событий

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Доказательство. Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = 1.$$

Любые два события полной группы несовместны, поэтому можно применить теорему сложения:

$$P\left(A_1 + A_2 + \ldots + A_n\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right).$$

Сравнивая два равенства, получим

$$P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \ldots + P\left(A_n\right) = 1.$$

Пример

Круговая мишень состоит из трех зон: I, II, III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле – 0,15, во вторую – 0,23, в третью – 0,17. Найти вероятность промаха.

Решение

Событие A – промах, противоположное событие $\bar{A}$ – попадание.

Событие $\bar{A}$ может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 – попадание в первую зону, A_2 – во вторую, A_3 – в третью. События несовместимы, следовательно $\bar{A} = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения:

$$P(\bar{A}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55.$$

События A и $\bar{A}$ образуют полную группу, следовательно,

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1;$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}45.$$

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Доказательство

Противоположные события образуют полную группу, а сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице.

Замечание

Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p, то вероятность другого события обозначают через q:

$$P(A) = p, \text{ то } P\left(\overline{A}\right) = q; p + q = 1.$$

2.3. Теорема умножения вероятностей

Ранее случайное событие определялось как событие, которое при осуществлении совокупности условий (опыта) может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме этих условий, не налагается, то такую вероятность называют безусловной. Если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называется условной.

Проводится опыт со случайным исходом, в результате которого возможны два события A и B. *Условной вероятностью* $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пример

В урне 10 шаров: 8 красных, 2 белых. Вытаскивают два шара. Найти вероятность того, что второй шар белый, если первым вытащили красный.

Решение

Событие A – первый шар красный, событие B – второй шар белый.

$$P_A\left(B\right) = \frac{2}{9}.$$

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P\left(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n\right) = P\left(A_1\right) \cdot P_{A_1}\left(A_2\right) \cdot P_{A_1 A_2}\left(A_3\right) + \ldots + P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}\left(A_n\right).$$

Для трех событий $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$. Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = P(B) \cdot P_B(A) \cdot P_{BA}(C) = P(C) \cdot P_C(B) \cdot P_{CB}(A).$$

Пример

В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение

Событие A – извлечение белого шара при первом испытании, B – извлечение белого шара при втором испытании. Эти события совместны, следовательно, извлечение двух белых шаров AB. Всего в урне 5 шаров. Вероятность извлечение белого шара при первом испытании $P(A) = 2/5$, вероятность извлечение белого шара при втором испытании при условии, что при первом испытании был извлечен белый шар $P_A(B) = 1/4$. По теореме умножения совместных событий $P(AB) = P(A)P_A(B) = 0{,}1$.

2.4. Теорема умножения для независимых событий

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т. е.

$$P_A(B) = P(B)/$$

Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы. События A, B, C попарно независимы, если A и B, A и C, B и C независимы.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следствие 1. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Следствие 2. Если события A_1, A_2, … , A_n независимы, то противоположные им события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, …, $\bar{A}_n$ так же независимы.

Пример

Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равна $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов произойдет три попадания.

Решение

Событие A – три попадания в мишень.

$$p_1 = 0{,}4;\ p_2 = 0{,}5;\ p_3 = 0{,}7;$$
$$P(A) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}14.$$

2.5. Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2, … , A_n, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,…, $\bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n).$$

Если $P(A_i) = p_i$; $P\left(\overline{A_i}\right) = q_i$, то $P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$.

Следствие. Если событие A_1, A_2, …, A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где q – вероятность противоположного события.

Пример

В типографии имеется 3 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение

Событие A – машина работает, противоположное событие $\bar{A}$ – машина не работает. Эти события образуют полную группу.

$$p + q = 1,\ q = 1 - p = 0{,}2,\ P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992.$$

2.6. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же опыте.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание 1. Если два события *независимы*, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Замечание 2. Если два события *зависимы*, то:

$$P(A + B)=P(A) + P(B) - P(A)P_A(B).$$

Замечание 3. Если два события *несовместимы*, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример

Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}9$. Найти вероятность попадания при одновременном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение

Пусть событие A заключается в том, что было попадание одним из орудий.

Рассмотрим три способа решения.

Первый способ

Обозначим попадание через "1", промах – "0". Тогда все возможные исходи и их вероятности можно записать следующим образом:

Исход	0 0	0 1	1 0	1 1
Вероятность	q_1q_2	q_1p_2	p_1q_2	p_1p_2

$p_1 = 0{,}8$; $q_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$;

$p_2 = 0{,}9$; $q_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Событию A благоприятствуют второй, третий и четвертый исходы.

$$P(A) = q_1p_2 + p_1q_2 + p_1p_2 = 0{,}98.$$

Второй способ

По условию события A_1 (попадание первого орудия) и A_2 (попадание второго орудия) совместны и независимы. Событие A состоит в совмещении событий A_1 и A_2 ($A = A_1 + A_2$).

Используя замечание 2 получаем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98.$$

Третий способ

Так как события A_1 и A_2 независимы, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий вычислим по формуле п. 2.5.

$$P(A) = 1 - q_1q_2 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение произведения событий. Докажите теоремы умножения.

2. Сформулируйте теорему сложения вероятностей, объясните ее геометрический смысл для двух событий.

3. Какое событие называется суммой или произведением двух случайных событий?

4. Чему равна вероятность суммы двух совместных событий?

5. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?

6. Как формируется теорема о вероятности суммы n несовместных событий.

7. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

8. Чему равна вероятность произведения двух зависимых событий?

9. Что такое условная вероятность?

10. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?

Задачи для самостоятельного решения

1. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных окажутся пять отличников.

2. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна деталь окрашена.

3. Из урны, содержащей 7 белых и 3 черных шаров, наудачу один за другим извлекают (без возвращения) два шара. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй черным?

4. Найти вероятность того, что при трех бросках игральной кости три раза выпадет шестерка.

5. Три стрелка стреляют в мишень. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9, второй с вероятностью 0,8, а третий с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена? Найти вероятность того, что было два попадания.

6. При включении двигатель начинает работать с вероятностью р. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать с второго включения. Найти вероятность того, что для запуска двигателя потребуется не более двух включений.

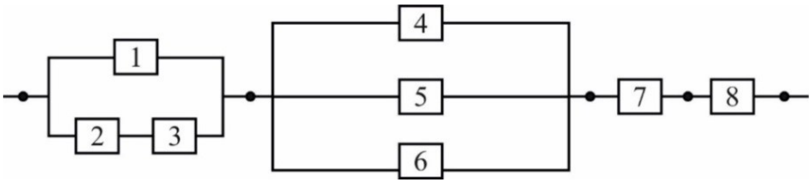
7. В урне 7 белых и три черных шара. Без возвращения извлекаются 3 шара. Известно, что среди них есть черный шар. Найти вероятность того, что другие два шара белые.

8. Для разрушения моста достаточно попадания одной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых равны соответственно 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

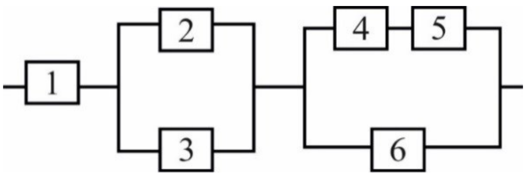
9. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Зачет сдан, если студент ответит не менее чем на 3 из 4-х вопросов в билете. Взглянув на первый вопрос, студент обнаружил, что знает его. Какова вероятность, что студент сдаст зачет?

10. Найти вероятность прохождения тока через цепь. Элементы работают независимо друг от друга. Вероятности исправной работы элементов соответственно равны

$p_1 = 0{,}9;\ p_2 = 0{,}9;\ p_3 = 0{,}8;\ p_4 = 0{,}9;\ p_5 = 0{,}8;\ p_6 = 0{,}7;\ p_8 = 0{,}9;\ p_9 = 0{,}8.$



11. Дана схема включения элементов. Вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени *T* равна *p*. Элементы работают независимо и включены в цепь по приведенной схеме. Пусть событие A_i означает безотказную работу за время *T* элемента с номером *i* ($i = 1,2,3,\ldots$), а событие *B* – безотказную работу цепи.



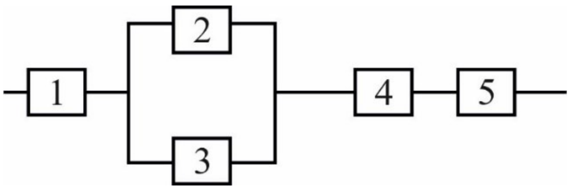
Требуется:

1) Написать формулу, выражающую событие ВВ через все события A_i.

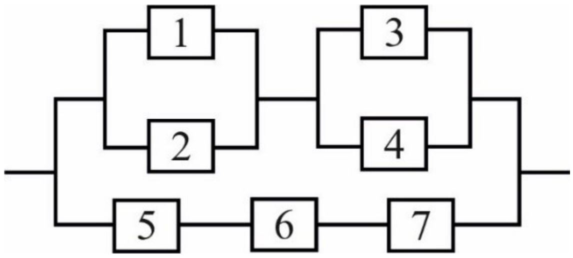
2) Найти вероятность события *B*.

3) Вычислить $P(B)$ при $p = 0{,}6$.

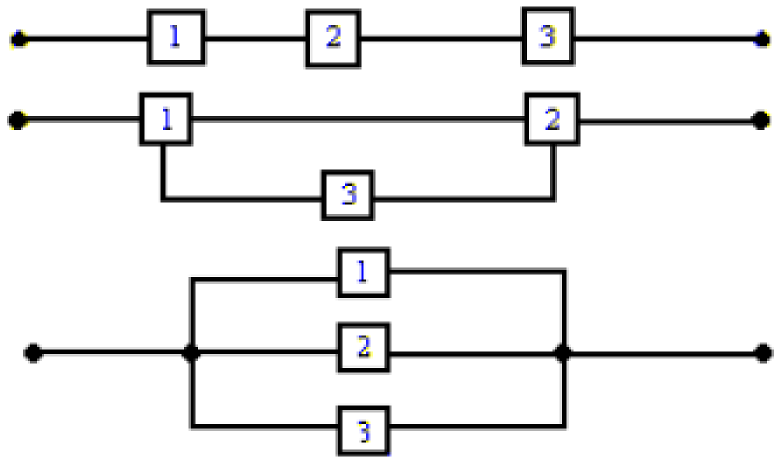
12. Найти вероятность обрыва цепи, если вероятность отказа каждого элемента равна 0,2, а отказы элементов – независимые события.



13. Найти вероятность безотказной сети, состоящей из независимо работающих элементов, если вероятность надежной работы элементов равна $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0{,}8;\ \ p_5 = p_6 = p_7 = 0{,}9.$



14. Имеются три схемы с ненадежными элементами. Вероятность прохождения тока через каждый элемент равна 1/2. Найти вероятность того, что наудачу выбранная схема проводит ток.



§3. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из попарно несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, образующих полную группу.

Тогда вероятность события А находится по формуле:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)P_{H_n}(A).$$

Эта формула называется *формулой полной вероятности*. События H_1, H_2, ..., H_n часто называют "гипотезами".

Пример

В магазин поступили электрические лампочки одного типа, изготовленные на четырех ламповых заводах: с 1-го завода 250 шт., со 2-го – 525 шт., с 3-го – 275 шт. и с 4-го – 950 шт. Вероятность того, что лампочка прогорит более 1500 часов, для 1-го завода равна 0,15, для 2-го – 0,30, для 3-го –

0,20, для 4-го – 0,10. При раскладке по полкам магазина лампочки были перемешаны. Какова вероятность того, что купленная лампочка прогорит более 1 500 часов?

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что лампочка прогорит более 1 500 ч, а H_1, H_2, H_3 и H_4 – гипотезы, что она изготовлена соответственно 1, 2, 3 или 4-м заводом. Так как всего лампочек 2000 шт., то вероятности гипотез соответственно равны:

$$P\left(H_1\right)=\frac{250}{2000}=0{,}125;$$

$$P\left(H_2\right)=\frac{525}{2000}=0{,}2625;$$

$$P\left(H_3\right)=\frac{275}{2000}=0{,}1375;$$

$$P\left(H_4\right)=\frac{950}{2000}=0{,}475.$$

Далее, из условия задачи следует, что

$$P_{H_1}\left(A\right)=0{,}15;\ P_{H_2}\left(A\right)=0{,}3;P_{H_3}\left(A\right)=0{,}2;P_{H_4}\left(A\right)=0{,}1.$$

Используя формулу полной вероятности, имеем

$$P(A) = 0{,}125 \cdot 0{,}15 + 0{,}2625 \cdot 0{,}3 + 0{,}1375 \cdot 0{,}2 + 0{,}475 \cdot 0{,}1 = 0{,}1725.$$

Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, имеющих вероятности $P(H_i)$ и образующих полную группу. Поскольку заранее неизвестно, какое из этих событий наступит, их называют гипотезами.

Предположим, что в результате опыта произошло событие A. Тогда условные вероятности находятся по формуле:

$$P_A\left(H_i\right)=\frac{P_{H_1}\left(A\right)P\left(H_1\right)}{P\left(A\right)}.$$

Формула называется *формулой Бейеса*.

Пример

На склад поступило 1 000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го –

0,01. Взятый наудачу подшипник оказался стандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение

Пусть A – событие, состоящее в том, что взятый подшипник стандартный, а H_1, H_2, H_3 – гипотезы, что он изготовлен соответственно 1-м, 2-м или 3-м заводом.

Требуется найти: $P_A(H_1)$.

Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1) = \frac{200}{1000} = 0,24;$$

$$P(H_2) = \frac{460}{1000} = 0,46;$$

$$P(H_3) = \frac{340}{1000} = 0,34.$$

Далее, из условия задачи следует, что

$$P_{H_1}(A) = 1 - 0,03 = 0,97;\ P_{H_2}(A) = 1 - 0,02 = 0,98;\ P_{H_3}(A) = 1 - 0,01 = 0,99;$$

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,97 + 0,46 \cdot 0,98 + 0,34 \cdot 0,99 = 0,9814;$$

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,97}{0,9814} = 0,1977.$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он стандартен.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие события называются гипотезами?
2. При каких условиях применяется формула полной вероятности?
3. Как изменяются вероятности гипотез, если известно, что событие произошло?
4. Напишите формулу полной вероятности.
5. Напишите формулу Байеса

Задачи для самостоятельного решения

1. Имеются два ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором 1 белый и 4 черных шара. Наугад выбирают один ящик и вынимают один шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

2. Имеются три одинаковые на вид урны: в первой урне 2 белых и 1 черный шар; во второй три белых и один черный; в третьей два белых и два черных. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

3. По самолету производится три одиночных выстрела из зенитного орудия. Вероятность попадания при первом выстреле равна 0,4, при втором – 0,5, при третьем – 0,7. Для вывода самолета из строя заведомо достаточно трех попаданий. При одном попадании самолет выходит из строя с вероятностью 0,2, а при двух попаданиях – с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет выведен из строя.

4. Прибор собирается из деталей высшего и 1-го сорта. При этом 40 % приборов собирается из деталей высшего сорта. Если прибор собран из деталей высшего сорта, то его надежность (вероятность безотказной работы за время t) равно 0,95; а если из деталей 1-го сорта – его надежность 0,7. Прибор испытывался время t и работал безотказно. Найти вероятность того, что он собран из деталей высшего сорта.

5. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

6. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,9, второго 0,8. За время испытаний за время T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что оказал только первый узел.

7. Два стрелка независимо один от другого стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

8. На фабрике, изготовляющей шурупы, первая машина производит 25 %, вторая – 35 %, третья – 40 % всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5 %, 4 % и 2 %. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный шуруп дефектный? б) Случайно выбранный из продукции шуруп оказался дефектный. Какова вероятность того, что он был произведен на первой, второй, третьей машине?

9. Имеются две урны. Впервой урне 2 белых и 3 черных шара, во второй 3 белых и 5 черных. Из первой и второй урн, не глядя, берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешиваются и из нее наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белый.

10. Предположим, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число).

11. В двух коробках имеются однотипные конденсаторы. В первой коробке 20 штук, из них 2 неисправных, во второй 10, из них 3 неисправных. Наугад взятый конденсатор оказался годным. Из какой коробки он вероятнее всего взят?

§4. Повторные испытания

4.1. Формула Бернулли

Если производится некоторое количество испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются **независимыми относительно события *A***.

Предположим, что производится n независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить некоторое событие A. Пусть при каждом испытании вероятность наступления события A равна $P(A) = p$ и, следовательно, вероятность противоположного события (не наступления A) равна $P\left(\overline{A}\right)=1-p=q$. Определим вероятность $P_n(m)$ того, что событие A произойдет m раз при n испытаниях. При этом заметим, что наступления или ненаступления события A могут чередоваться различным образом.

$$p_n\left(m\right)=\frac{n!}{m!\cdot\left(n-m\right)!}p^n q^{n-m}.$$

Формула называется *формулой Бернулли*.

Пример

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение

$$n = 8;\ m = 5;\ p = 0{,}6;\ q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Используя формулу, имеем

$$p_8\left(5\right)=\frac{8!}{5!\cdot 3!}0{,}6^5 0{,}4^3 \approx 0{,}28.$$

Условия для применения формулы Бернулли:

– число опытов фиксировано и ограничено;

– опыты независимы (результат одного не влияет на результаты остальных);

– результатом испытания может быть лишь один из двух взаимно-исключающих исходов (успех или неуспех);

– вероятность успеха в каждом испытании дна и та же.

Часто необходимо вычислять вероятность $P_n(m)$ при достаточно больших значениях параметров. Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над очень большими числами.

Если $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 40$, $m = 20$, то вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществляется ровно m раз и не осуществляется $n - m$ раз $P_{40}(20) = C_{40}^{20} p^{20} q^{20} = \dfrac{40!}{20!\cdot 20!} 0{,}1^{20} 0{,}9^{20}$. При вычислении можно пользоваться специальными таблицами логарифмов факториалов, но из-за округлений в итоге окончательный результат может значительно отличаться от истинного. В таких случаях применяют локальную приближенную формулу Муавра-Лапласа, выведенную для частного случая английским математиком А. Муавром и обобщенную французским математиком П. Лапласом.

4.2. Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появиться в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ при } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1) функция $\varphi(x)$ четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

2) $x = \pm 1$ – точки перегиба графика функции;

3) Значения функции находят по таблице, которая составлена для $0 \le x \le 5$, так как при $x \ge 5$ $x \ge 5$ $\varphi(x) \to 0$.

4) Формула применяется при $npq \ge 10$.

Пример

Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Решение

По условию $k = 104$, $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Тогда $x = \dfrac{104 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 3$, $\varphi(3) = 0{,}0044$ (см. Приложение 1).

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(3) = \frac{1}{8} \cdot 0{,}0044 = 0{,}00055.$$

4.3. Наивероятнейшее число наступления события в схеме Бернулли

На практике часто требуется найти невероятнейшее число наступления события по схеме Бернулли, т. е. при каком m и фиксированном n вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение. Обозначим это невероятнейшее число через m_0 и найдем его, применив формулу Бернулли.

Рассмотрим соотношение:

$$\frac{p_n(m)}{p_n(m-1)} = \frac{C_n^m p^m q^{n-m}}{C_n^{m-1} p^{m-1} q^{n-m+1}} = \frac{n!(m-1)!(n-m+1)!\,p}{m!(n-m)!\,n!\,q} = \frac{(n-m+1)p}{mq} =$$

$$= \frac{np - mp + p}{mq} = \frac{np - m(1-q) + p}{mq} = \frac{mq}{mq} + \frac{np + p - m}{mq} = 1 + \frac{p(n+1) - m}{mq}.$$

В зависимости от значений параметров *n, m, p, q* возможны три варианта:

$p_n(m) > p_n(m-1)$ при $m < p(n+1)$;

$p_n(m) = p_n(m-1)$ при $m = p(n+1)$;

$p_n(m) < p_n(m-1)$ при $m > p(n+1)$.

Наивероятнейшее число m_0 должно удовлетворять условиям:

$$p_n(m_0 - 1) \le p_n(m_0); \;\; p_n(m_0 + 1) \le p_n(m_0).$$

Откуда $(n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p$. Учитывая, что $p = 1 - q$, после преобразований $np + p - 1 = np - q$ имеем

$$np - q \le m_0 \le np + q,$$

т. е. наивероятнейшая частота m_0 находится в интервале $m_0 \in [np - q; np + q]$, длина которого равна единице. Так как наивероятнейшая частота может выражаться только целым числом, она может принимать или одно значение, если границы выражены дробными числами, или два значения, если границы выражены целыми числами. Тогда нужно сравнить вероятности на концах.

Пример

В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение

По условию задачи

$$p = 0,3;\ q = 0,7;\ n = 30;$$
$$np - q \le m_0 \le np + q;$$
$$30 \cdot 0,3 - 0,7 \le m_0 \le 30 \cdot 0,3 + 0,7;$$
$$8,3 \le m_0 \le 9,3.$$

В этом интервале одно целое решение $m_0 = 9$, т. е. с наибольшей долей вероятности можно утверждать, что в ближайшие 30 лет в этот день будет дождь в 9 случаях.

4.4. Формула Пуассона

Если в каждом отдельном испытании вероятность одного из событий p или q близка к нулю, то события называют **редкими**. Например, редкими можно считать события: появление ошибки на некоторой странице в книге, количество осадков, выпавших за июня в городе N. Для определения вероятности таких явлений применяется асимптотическая формула Пуассона, названная по имени французского математика С. Пуассона.

Теорема

Если вероятность p события A в каждом повторном испытании связана с числом независимых испытаний n, которое достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A произойдет m раз, приближенно находится по формуле

$$p_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \left(\lambda = np = const\right).$$

Пример

Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 мин равна 0,002. Найти вероятность того, что в течение 1 мин обрыв произойдет более чем на трех веретенах.

Решение

По условию задачи $n = 1000;\ p = 0,002; m > 3.$

Так как обрыв нити на каждом веретене может либо произойти, либо не произойти, то речь идет о независимых повторных испытаниях. Вероятность обрыва нити мала, поэтому речь идет о редких явлениях. Применим формулу Пуассона.

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,002 = 2.$$

$$p_{1000}(m > 3) = 1 - p_{1000}(m \le 3) = 1 - p_{1000}(0) - p_{1000}(2) - p_{1000}(3) \approx$$

$$\approx 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} - \frac{2^1}{1!}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} - \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + 1 + \frac{4}{3}\right) \approx 0,143.$$

На практике для применения формулы Пуассона руководствуются выполнением условия $\lambda = np \le 10$.

4.5. Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз ($k_1 \le m \le k_2$), приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральную теорему Лапласа иногда записывают в форме

$$P\left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz.$$

При решении используют таблицу для функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-z^2/2} dz.$

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x > 5$ $\Phi(x) = 0,5$.

Пример

Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Решение

а) По условию $n = 100$; $k_1 = 70$; $k_2 = 80$. Тогда

$$x_2 = \frac{80 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 1,15, \quad x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx -1,15,$$

$$P_{100}(70;80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1,15) - \Phi(-1,15) = 2\Phi(1,15).$$

Значение функции Лапласа находим по таблице: $\Phi(1,15) = 0,3749$

$$P_{100}(70;80) \approx 2\Phi(1,15) = 2 \cdot 0,3749 = 0,7498.$$

б) По условию $k_1 = 0$, $k_2 = 70$. Тогда

$$x_1 = \frac{-100 \cdot 0,75}{\sqrt{100 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx -17,32, \; x_2 \approx -1,1547,$$

$$P_{100}(0;70) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(-1,1547) - \Phi(-17,32) = \Phi(17,32) - \Phi(1,1547).$$

Значение функции Лапласа находим по таблице приложения 2:

$$P_{100}(0;70) \approx 0,5 - 0,37595 = 0,12405.$$

§5. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Найдем вероятность того, что отклонения относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, т. е. найдем вероятность того, что осуществляется неравенство: $\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon.$

Раскроем модуль $-\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon$ или $-\varepsilon \le \frac{m - np}{n} \le \varepsilon.$ Умножим эти неравенства на множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$

Используя теорему Лапласа, получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример

Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний $p = 0,75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение

$\varepsilon = 0{,}001$, $p = 0{,}75$,

$$P\left(\left|m/n - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right) = 2\Phi\left(0{,}001\sqrt{\frac{10000}{0{,}75\cdot 0{,}25}}\right) \approx 2\Phi(0{,}23) \approx 0{,}182.$$

Пример

Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p = 0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Решение

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}6,\; 2\Phi\left(\frac{0{,}01}{0{,}5}\sqrt{n}\right) = 0{,}6,\; \Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) = 0{,}3.$$

По таблице находим

$$0{,}02\sqrt{n} \approx 0{,}84,\; \sqrt{n} \approx 42,\; n \approx 1\ 764 \text{ раза}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение последовательности независимых испытаний.
2. Какие испытания (события) называют независимыми?
3. Какой вид имеет формула Бернулли?
4. Вероятность какого события находится по формуле Бернулли?
5. В каких случаях нужно пользоваться формулой Пуассона?
6. Сформулируйте теорему Пуассона.
7. Как определяется малая функция Лапласа? Каковы ее свойства?
8. Как определяется функция Лапласа? Каковы свойства функции Лапласа?
9. Что называется наивероятнейшим числом наступления события в n независимых испытаниях?
10. Когда применяются локальная и интегральная теоремы Лапласа?
11. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласса.
12. Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласса.

Задачи для самостоятельного решения

1. Игральная кость брошена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз

2. Имеется 5 станций, с которыми поддерживается связь. Время от времени связь прерывается из-за атмосферных помех. Вследствие удаленности станций друг от друга перерыв связи с каждой из них происходит независимо от остальных с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что в данный момент времени будет иметься связь не более чем с двумя станциями.

3. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный исход партии исключен): три партии из четырех или пять партий из восьми?

4. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?

5. Прибор состоит из 8 однородных элементов, но может работать при наличии в исправном состоянии не менее 7 из них. Каждый из элементов за время работы прибора t выходит из строя независимо от других с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что прибор откажет за время t.

6. Система радиолокационных станций ведет наблюдение за группой из 10 объектов. Каждый объект может быть (независимо от других) потерян с вероятностью 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы один объект будет потерян.

7. Изделия некоторого производства содержат 5 % брака. Найти вероятность того, что среди пяти взятых наугад изделий: а) нет ни одного испорченного; б) будут два испорченных.

8. По каналу связи передаются $n = 6$ сообщений, каждое из которых, независимо от других, с вероятностью $p = 0{,}2$ оказывается искаженным. Найти вероятность следующих событий: $A = \{$ровно два сообщения из 6 искажены$\}$; $B = \{$не менее двух сообщений из 6 искажены$\}$; $C = \{$все сообщения переданы без искажений$\}$; $D = \{$все сообщения искажены$\}$.

9. Устройство состоит из 8 независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны $p = 0{,}2$. Найти вероятность отказа прибора, если для этого достаточно чтобы отказали 3 элемента из восьми.

10. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0,1. Найти вероятность, что сообщение из 10 знаков: а) не будет искажено; б) содержит 3 искажения; в) содержит не более трех искажений.

11. В первые классы принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

12. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность что, при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз? б) ровно 85 раз?

13. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных "гербом" вверх, будет от 45 до 55?

14. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появиться: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

15. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие появится не менее 75 раз.

16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

17. Изготовитель радиоэлектронного оборудования закупает 1 000 интегральных микросхем, каждая из которых с вероятностью 0,01 может оказаться неисправной. Какова вероятность того, что: а) неисправны будут ровно 10 микросхем; б) все микросхемы окажутся неисправными; в) из всех микросхем неисправна будет лишь одна. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на пяти веретенах. Ответ: 0,1563.

18. Аппаратура состоит из 1 000 элементов, каждый из которых независимо от остальных выходит из строя за время Т с вероятностью 5 · 10 – 4. Найти вероятность следующих событий: $A\{$за время T откажет ровно 3 элемента$\}$; В$\{$откажет хотя бы один элемент$\}$. Ответ: 0,013; 0,394.

19. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течении часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность, что в течение часа позвонит 5 абонентов? Ответ: 0,0916.

20. Вероятность того, что микросхема не выдержит испытания равна 0,0004. Найти вероятность того, что из 7 000 микросхем не менее двух не выдержат испытаний. Ответ: 0,908.

21. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,02.

22. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Часто результатом случайного эксперимента является число. Например, можно подбросить игральную кость и получить одно из чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Можно подъехать к бензоколонке и обнаружить определенное число автомашин в очереди. Можно выстрелить из пушки и измерить расстояние от места выстрела до места падения снаряда. В таких случаях будем говорить, что имеем дело со случайной величиной.

Таким образом, *случайной величиной* называется переменная величина, которая в результате опыта может принимать то или иное числовое значение.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее неизвестно какое именно. Случайные величины можно разделить на две категории.

§1. Дискретные случайные величины

1.1. Основные определения

Случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счетное число значений, называется **дискретной**.

Случайные величины будем обозначать буквами греческого алфавита: X, Y… Значения случайной величины будем записывать в виде конечной или бесконечной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Соотношение $p(x)$ между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения дискретной** случайной величины. Эта функция определена в точках последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Так как в каждом из испытаний случайная величина X принимает всегда какое-либо значение из области ее изменения, то

$$p(x_1) + p(x_2) + \ldots + p(x_n) = 1.$$

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется **рядом распределения**. Обычно закон распределения дискретной случайной величины представляется в виде таблицы

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Графическое представление этой таблицы называется **многоугольником распределения.** Для этого возьмем прямоугольную систему координнат на плоскости. По горизонтальной оси будем откладывать возможные значения случайной величины X, а по вертикальной оси – значения функции $p(x)$. График функции $p(x)$ изображен на рис. Если соединить точки этого графика прямолинейными отрезками, то получится фигура, которая называется *многоугольником распределения* (рис. 5).

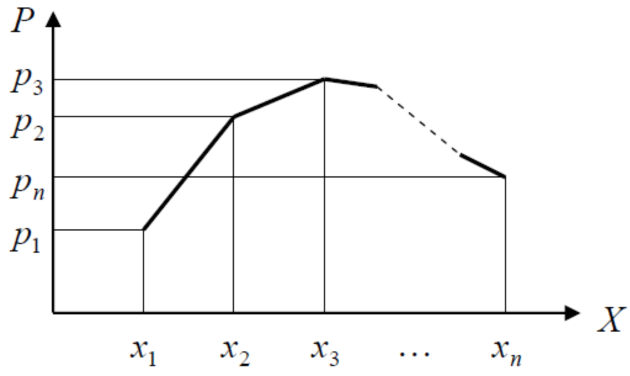


Рис. 5. Многоугольник распределения

Пример

Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

Решение

ДСВ_X – число появлений шестерки. При трех бросаниях игральной кости шестерка может появиться либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли:

$$p_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Вероятность появления шестерки при одном бросании $p = \frac{1}{6}$, вероятность не появления шестерки $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

$$P_3(0) = \frac{3!}{0!3!}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \qquad P_3(1) = \frac{3!}{1!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P_3(2) = \frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216} \qquad P_3(3) = \frac{3!}{3!0!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
P	125/216	75/216	15/216	1/216

1.2. Математическое ожидание случайной величины и его свойства

Рассмотрим сначала следующий пример. Пусть на завод поступила партия, состоящая из N подшипников. При этом:

m_1 – число подшипников с внешним диаметром x_1,

m_2 – число подшипников с внешним диаметром x_2,

. . . .

m_n – число подшипников с внешним диаметром x_n,

Здесь $m_1 + m_2 + ... + m_n = N$. Найдем среднее арифметическое значение $x_{ср}$ внешнего диаметра подшипника. Очевидно,

$$x_{cp} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n}{N} = \frac{m_1}{N}x_1 + \frac{m_2}{N}x_2 + ... + \frac{m_n}{N}x_n.$$

Внешний диаметр вынутого наудачу подшипника можно рассматривать как случайную величину, X принимающую значения $x_1, x_2, ..., x_n$, с соответствующими вероятностями $p_1 = m_1/N$, $p_2 = m_2/N$, ..., $p_n = m_n/N$, так как вероятность p_i появления подшипника с внешним диаметром x_i равна m_i/N. Таким образом, среднее арифметическое значение $x_{ср}$ внешнего диаметра подшипника можно определить с помощью соотношения

$$x_{cp} = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Пусть X – дискретная случайная величина с заданным законом распределения вероятностей

X	x_1	x_2	. . .	x_n
p	p_1	p_2	. . .	p_n

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма парных произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие им вероятности, т. е.

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Возвращаясь к разобранному выше примеру, мы видим, что средний диаметр подшипника равен математическому ожиданию случайной величины X – диаметру подшипника.

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины: $\bar{X} \approx M(X)$.

На числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. Поэтому его часто называют *центром распределения.*

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $M(C) = C$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = C\cdot M(X)$.

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y).$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$, для независимых случайных величин X и Y

Пример

Найти математическое ожидание СВX, заданной законом:

X	1	2	3	4
P	0,2	0,1	0,3	0,4

Решение

$$M(X) = 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}4 = 2{,}9.$$

Теорема. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытания при условии, что в каждом испытании вероятность появления события A равна p:

$$M(X) = p\cdot n.$$

Пример

Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Решение

Число независимых испытаний $n = 20$. В каждом испытании вероятность выигрыша $p = 0{,}3$. Искомая математическое ожидание

$$M(X) = 20\cdot 0{,}3 = 6.$$

Пример

Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Решение

Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй – через Y. Запишем закон распределения числа очков для первой игральной кости

X, Y	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X) = \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right) = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Очевидно, что и $M(Y) = 3{,}5$.

Искомое математическое ожидание $M(X\cdot Y) = M(X)\cdot M(Y) = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$.

1.3. Дисперсия и ее свойства. Среднее квадратическое отклонение

Во многих практически важных случаях существенным является вопрос о том, насколько велики отклонения $X - M(X)$ случайной величины от ее математического ожидания.

Пусть закон распределения случайной величины X известен.

Рассмотрим отклонение случайной величины X от ее математического ожидания $X - M(X)$.

Теорема. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M(X–M(X)) = 0.$$

Поскольку математическое ожидание отклонения равно нулю, то для определения степени рассеивания случайной величины вокруг ее математического ожидания выделяют среднее значение квадрата отклонения.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M\,[(x - M(X))^2].$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины C равна 0: $D(C) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин:$D(X-Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример

Найти дисперсию случайных величин, зная закон ее распределения:

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

Решение

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0{,}1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}15 + 20 \cdot 0{,}25 = 6{,}94.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 0{,}1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 10^2 \cdot 0{,}15 + 20^2 \cdot 0{,}25 = 115{,}804.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 115{,}804 - (6{,}94)^2 = 67{,}6404.$$

Теорема. Дисперсия числа появление события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна

$$D(X) = n \cdot q \cdot p.$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно ее математического ожидания. Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около ее математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X.

Теорема. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно:

$$\sigma(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2) + \ldots + \sigma^2(x_n)}.$$

1.4. Функция распределения вероятностей случайной величины

Рассмотрим функцию $F(x)$, определенную на всей числовой оси следующим образом: для каждого x значение $F(x)$ равно вероятности того, что дискретная случайная величина Х примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Эта функция называется *функцией распределения вероятностей*, или кратко, *функцией распределения*.

Т. е. функция $F(X)$ – это вероятность того, что случайная величина X в результате испытаний примет значение, меньшее некоторого фиксированного числа x.

Геометрически: $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Замечание. Если $F(x)$ непрерывна в точке a и $a = b$, то

$$P\big(X \in [a;b]\big) = P\big(X = a\big) = F(b) - F(a) = 0.$$

Следовательно, для нерерывной в точке функции вероятность попадания на отрезок равна вероятности попадания на интервал.

4. Если возможные значения случайной величины X принадлежит интервалу (a, b), то:

$F(x) = 0$, при $x \le a$;

$F(x) = 1$, при $x \ge b$.

Используя свойства функции $F(x)$ получаем, что при $x_{i-1} < x \le x_i$

$$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_{i-1} = \sum_{i=1}^{i-1`} p_i.$$

В точке x_i $F(x)$ имеет скачок $p_i = P\big(X = x_i\big) = F\big(x_i + 0\big) - F\big(x_i\big)$. Таким образом функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-непрерывной, в точках разрыва x_i имеет скачки и непрерывна слева в точках разрыва x_i. Таким образом, получаем формулу для нахождения функция распределения дискретной случайной величины:

$$F(x)=\begin{cases}0; x\le x_1\\ p_1; x_1\le x\le x_2\\ p_1+p_2; x_2\le x\le x_3\\ \ldots\\ p_1+p_2+\ldots+p_n; x_{n-1}\le x\le x_n\\ 1; x>x_n\end{cases}$$

График функции распределения

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид и расположен в полосе, между прямыми $y = 0$ и $y = 1$.

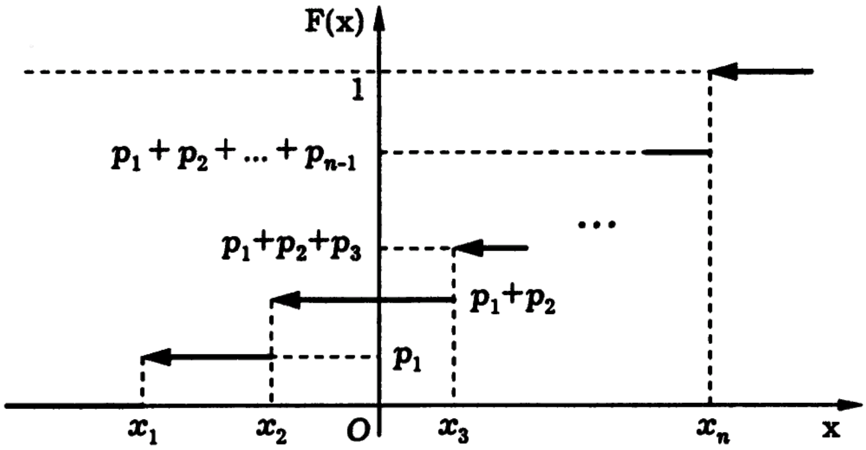


Рис. 6. График функции распределения ДСВ

Пример

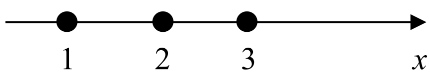
Составить функцию распределения ДСВ_X, возможные значения которой заданы таблицей. Построить график.

X	1	2	3
P	0,3	0,3	0,4

Решение

$$F(x) = P(X < x).$$

Значения случайной величины делят числовую ось на несколько промежутков.



Рассмотрим каждый промежуток и выясним, чему равна функция распределения вероятностей.

если $x \le 1$, то $F(x) = 0$

если $1 < x \le 2$ то $F(x) = 0{,}3$

если $2 < x \le 3$, то $F(x) = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$

если $x > 3$ то, $F(x) = 0{,}3 + 0{,}3 + 0{,}4 = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0; x \le 1 \\ 0{,}3; 1 < x \le 2 \\ 0{,}6; 2 < x \le 3 \\ 1; x > 3 \end{cases}$$

График функции распределения представлен на рис. 7.

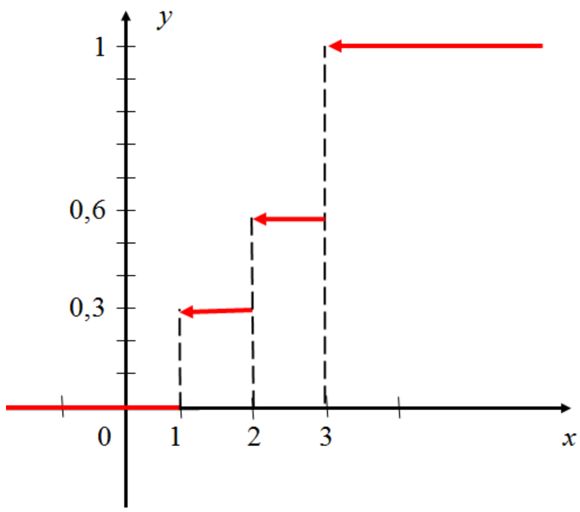


Рис. 7. График функции распределения

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение случайной величины. Приведите примеры.
2. Какие типы случайных величин рассматриваются в теории вероятностей?
3. Дайте понятие дискретной случайной величины.
4. Что такое закон распределения случайной величины?
5. В какой форме задается закон распределения для дискретной случайной величины?
6. Дайте определение функции распределения случайной величины.
7. Сформулируйте свойства функции распределения случайной величины.
8. Что является числовыми характеристиками дискретной случайной величины.

9. Математическое ожидание ДСВ, его вероятностный и механический смысл. Свойства математического ожидания.

10. Дисперсия, ее вероятностный и механический смысл. Свойства дисперсии.

11. Чему равна вероятность попадания дискретной случайной величины X в заданный интервал.

Задачи для самостоятельного решения

1. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Вынули 1 шар. Случайная величина X – число вынутых белых шаров. Построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$.

2. Бросают три монеты. Случайная величина X – число выпавших "гербов". Требуется: построить ряд распределения и функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

3. Построить ряд распределения и функцию распределения числа попаданий мячом в корзину при двух бросках, если вероятность попадания равна 0,4.

4. В первой студенческой группе из 24 человек 4 отличника, во второй из 22 человек – 3 отличника, в третьей из 24 – 6 отличников и в четвертой из 20 – 2 отличника. Случайная величина X – число отличников, приглашенных на конференцию при условии, что из каждой группы случайным образом выбирают по одному студенту. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

5. Из партии в 25 изделий, среди которых 6 бракованных, выбраны случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Построить ряд распределения случайной величины X – числа бракованных изделий, содержащихся в выборке.

6. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске равна 0,8. Построить ряд распределения числа попаданий.

7. Из 10 транзисторов, среди которых два бракованных, случайным образом выбраны два транзистора для проверки их параметров. Определить и построить: а) ряд распределения случайной величины X – числа бракованных изделий в выборке; б) функцию распределения $F(X)$.

8. Дан ряд распределения случайной величины X

x_i	–2	–1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) построить многоугольник распределения; б) построить функцию распределения $F(x)$ и начертить ее график; в) найти вероятность того, что величина X примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

9. Дискретная случайная величина распределения по закону. Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

x_i	–1	1	2	3
p_i	0,2	0,1	0,4	0,3

10. Найти среднее квадратичное отклонение случайной величины, заданной рядом распределения

x_i	3	5	7	9
p_i	0,4	0,3	0,2	0,1

11. Производится три независимых выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,4. Случайная величина X – число попаданий. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение величины X.

12. Вычислить $P\{X \geq 3{,}5\}$ и $P\{X < 2{,}5\}$, если функция распределения дискретной случайной величины имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ 0{,}3, & 2 < x \leq 3 \\ 0{,}5, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

13. Найти математическое ожидание и дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в пяти независимых испытаниях, если вероятность появления событий A в каждом испытании равна 0,2.

14. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

15. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $M(X) = 1{,}2$.

16. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_4 = 4$ с вероятностью $p = 0{,}5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0{,}3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3, и p_3, зная, что $M(X) = 8$.

17. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1 равна 0,2. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X) = 2{,}6$ и среднее квадратнческое отклонение $\sigma(X) = 0{,}8$.

18. Найти математическое ожидание случайной величины Z, если известны математические ожидания X и Y: а) $Z = X + 2Y, M(X) = 5, M(Y) = 2$; б) $Z = 3X + 4Y, M(X) = 2, M(Y) = 6$.

19. Бросают две кости. Найти математическое ожидание суммы выпавших очков, если известно, что выпали разные грани.

20. Случайные величины X и Y независимы. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y$, если известно, что $D(X) = 5, D(Y) = 6$.

21. Независимые дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	2	7
P	0,2	0,5	?

Y	0	2	3	7
P	0,1	0,2	0,4	?

Заполнить клетки с недостающей информацией. Найти $M(X)$, $D(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$. Составить закон распределения величины $Z = X - Y$, убедиться в том, что $M(Z) = M(X) - M(Y); D(Z) = D(X) + D(Y)$.

§2. Непрерывные случайные величины

2.1. Основные определения

Случайная величина, значения которой заполняют некоторый промежуток, называется непрерывной. В частных случаях это может быть не один промежуток, а объединение нескольких промежутков. Промежутки могут быть конечными, полубесконечными или бесконечными, например: $(a; b]$, $(-\infty; a)$, $[b; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$.

Такого рода, случайные величины не могут быть заданы с помощью закона распределения вероятностей $p(x)$. Однако их можно задать с помощью функции распределения вероятностей $F(x)$. Эта функция определяется точно так же, как и в случае дискретной случайной величины: $F(x) = P(X < x)$.

Случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства 1–4 функции распределения, сформулированные для дискретной случайной величины, сохраняются и добавляются еще два:

1) $\lim\limits_{n\to-\infty} F(x)=0;$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x)=1.$

Пример

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 1\\ \frac{1}{2}\left(2x-1\right), 1<x\le 2\\ 0, x>2\end{cases}$$

Для непрерывной СВ вероятность того, что она примет одно определенное значение равна нулю.

2.2. Плотность распределения вероятностей НСВ

Плотностью распределения вероятностей непрерывной СВ X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) равна:

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx.$$

Для дискретной, случайной величины плотность распределения неприменима.

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения неотрицательная функция: $f(x) \ge 0$.

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

3) Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\int_a^b f(x)dx=1.$

Функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки X, аналогично плотности массы в точки.

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Пример

Найти функцию распределения вероятностей НСВ, заданной плотностью распределения следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{3}{32}\left(4x-x^2\right), 0\le x\le 4\\ 0, x>4\end{cases}$$

Решение

Если $-\infty < x \le 0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dx=0.$$

Если $0 < x \le 4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{3}{32}\left(4x-x^2\right)dx=\frac{3}{32}\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^x=\frac{6x^2-x^3}{32}.$$

Если $x > 4$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{4}\frac{3}{32}\left(4x-x^2\right)dx+\int_{4}^{x}0dx=\frac{3}{32}\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=1.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{6x^2-x^3}{32}, 0<x\le 4\\ 1, x>4\end{cases}$$

Пример

НСВХ задана плотностью распределения. Найти параметр a.

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ a\cos x, -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Решение

Найдем коэффициент a из условия $\int_a^b f(x)dx = 1$.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos x dx = a\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

2.3. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной, случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Здесь предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно, т. е. существует.

Дисперсия случайной величины есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.

Дисперсией непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определенный интеграл

$$D(X) = \int_a^b \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)dx.$$

При вычислении дисперсии НСВ также можно пользоваться формулой:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2.$$

Свойства математического ожидания и дисперсии НСВХ аналогичны свойствам числовых характеристик ДСВХ.

Пример

Непрерывная случайная величина задна плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{18}x, 0 < x \le 6 \\ 0, x > 6 \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины.

Решение

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{6}\frac{1}{18}x^2dx+\int\limits_{6}^{+\infty}0dx=\frac{1}{18}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^6=\frac{1}{18}\cdot\frac{6^3}{3}=4;$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\big(M(X)\big)=\int\limits_{-\infty}^{0}0dx+\int\limits_{0}^{6}\frac{1}{18}x^3dx+\int\limits_{6}^{+\infty}0dx-4^2=\frac{1}{18}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^6-16=$$

$$=\frac{1}{18}\cdot\frac{6^4}{4}-16=2;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{2}\approx 1{,}41.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение непрерывной случайной величины.
2. Дайте определение плотности распределения вероятностей.
3. Чему равна вероятность попадания непрерывной случайной величины X в заданный интервал.
4. Что является числовыми характеристиками непрерывной случайной величины.
5. Как находятся числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Задачи для самостоятельного решения

1. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x<2\\ (x-2)^2,\ \ 2\le x\le 3\\ 1,\ x>3\end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) вероятность попадания величины X в интервал [1;2,5].

2. Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x)=\begin{cases}0, x<-\pi/2\\ C\cos x,\ \ -\pi/2\le x\le\pi/2\\ 0,\ \ x>\pi/2\end{cases}$$

Найти а) константу C; б) функцию распределения $F(x)$; в) вычислить вероятность $P\{|X|<\pi/4\}$.

3. Плотность вероятности непрерывной случайной величины *X* равна:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x-1/2, & 1\le x\le 2\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Построить функцию распределения *F(x)* и начертить ее график. Найти числовые характеристики СВ

4. Случайная величина *X* имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le \pi\\ 0, & x>\pi\end{cases}$$

а) Построить функцию распределения *F(x)*; б) найти вероятность того, что величина *X* попадет на отрезок $[0,\pi/4]$.

5. Случайная величина *X* задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2\\ (x-2)^2, & 2\le x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Найти числовые характеристики СВ

6. Плотность вероятности случайной величины *X* равна $f(x)=Ae^{-|x|}$. Найти постоянную *A*, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение.

§3. Примеры распределений случайных величин

3.1. Биномиальное распределение

Пусть производится *n* независимых испытаний, в каждом из которых событие *A* может произойти или не произойти. Вероятность наступления события во всех испытаниях постоянна и равна *p*.

В качестве дискретной СВ_X рассмотрим величину – число появлений события *A* в этих испытаниях.

Значения ДСВ_X: $x_1=0, x_2=1, \ldots, x_{n+1}=n$

$p_n(k)=C_n^k p^n q^{n-k}$ (формула Бернулли)

Биномиальным называется закон распределения вероятностей, определяемых формулой Бернулли.

Пример

Составим ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

Решение

$p(X = 0) = 1 \cdot (0{,}2)^5 = 0{,}00032;$

$p(X = 1) = 5 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}0064;$

$p(X = 2) = 10 \cdot (0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}0512;$

$p(X = 3) = 10 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}2048;$

$p(X = 4) = 5 \cdot (0{,}8)^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096;$

$p(X = 5) = 1 \cdot (0{,}8)^5 = 0{,}32768.$

Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4	5
p	0,00032	0,0064	0,0512	0,2048	0,4096	0,32728

3.2. Распределение Пуассона

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность события A равна p и n велико, то

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \lambda = pn.$$

Эта формула выражает закон распределения Пуассона.

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступаю в случайные моменты времени.

Интенсивность потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона

$$p_t(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k

и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом промежутки времени предполагаются непересекающимися.

Свойство отсутствия последствия характеризуется тем, что вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно, т. е. за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.

Пример

Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 минуту, равно 5. найти вероятность того, что за две минуты поступит:

а) три вызова; б) менее трех вызовов.

Решение

Будем предполагать, что поток вызовов является простейшим.

а) По условию $\lambda = 5$, $t = 2$, $k = 3$. Вероятность того, что за две минуты поступит два вызова, найдем по формуле Пуассона:

$$p_2(3) = \frac{10^3 e^{-10}}{3!} \approx 0{,}0076.$$

б) События не поступило ни одного вызова, поступил один вызов и поступило два вызова несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за две минуты поступит менее трех вызовов, равна

$$p_2(k < 3) = p_2(0) + p_2(1) + p_2(2) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} + \frac{10^1 e^{-10}}{1!} + \frac{10^2 e^{-10}}{2!} \approx 0{,}0028.$$

3.3. Равномерное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей НСВ X, если на интервале (a, b), которому принадлежат все возможные значения X, плотность сохраняет постоянное значение, а именно

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, a \le x \le b \\ 0, x > b \end{cases}$$

Величина, плотность распределения которой задана формулой, называется *равномерно распределенной* случайной величиной.

Кривая распределения $f(x)$ приведена на рисунке.

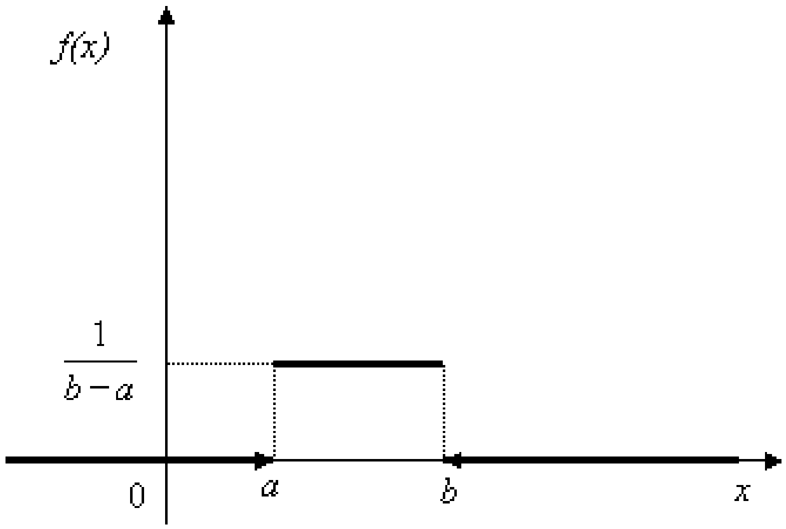


Рис. 8. График плотности равномерного распределения

Найдем функцию распределения случайной величины X, распределенной по равномерному закону

При $x < a$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

При $a \le x \le b$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dx = 0 + \left(\frac{x}{b-a}\right)\Bigg|_{a}^{x} = \frac{x-a}{b-a}.$

При $x > b$ $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx + \int\limits_{b}^{x} 0dx = \left(\frac{x}{b-a}\right)\Bigg|_{a}^{b} = 1.$

Получаем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a < x \le b \\ 1, x > b \end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0dx + \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx + \int\limits_{b}^{+\infty} 0dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Т. е. $M(X) = \dfrac{a+b}{2}.$

Дисперсия:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b}\frac{x^2}{b-a}dx+\int_{b}^{+\infty}0dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$D(X)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

График функции распределения $F(x)$ представлен на рис. 9.

Рис. 9. График функции распределения равномерно распределенной случайной величины

Пример.

Автобус ходит регулярно с интервалом 10 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания автобуса. Какова вероятность того, что ждать пассажиру придется не больше двух минут?

Решение

Случайная величина X – время ожидания автобуса на временном (в минутах) отрезке [0; 10] имеет равномерный закон распределения с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \dfrac{1}{10}, 0\le x\le 10\\ 0, x>10\end{cases}$$

Среднее время ожидания автобуса:

$$M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{0+10}{2}=5 \text{ мин.}$$

Дисперсия времени ожидания автобуса:

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(10-0)^2}{12}=\frac{100}{12}\approx 8{,}34.$$

Отсюда $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{100}{12}}\approx 2{,}89.$

Вероятность события A = {пассажиру придется ждать не больше двух минут}:

$$P(A)=P\left(X\le 2\right)=\int\limits_0^2 0{,}1dx=0{,}2.$$

3.4. Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный (экспоненциальный) закон распределения*** с параметром λ, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \ge 10\end{cases}$$

Кривая распределения $f(x)$ приведена на рис. 10.

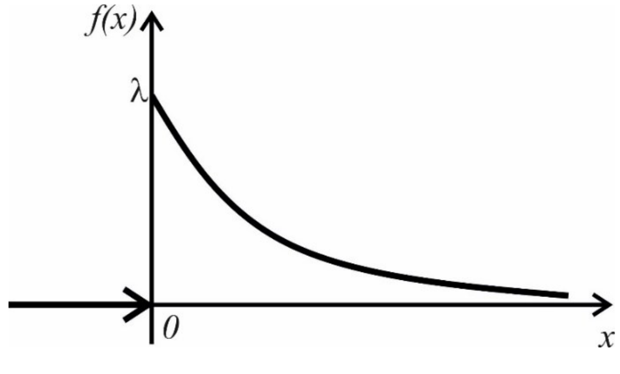


Рис. 10. График плотности показательного распределения

Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону:

При $x<0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{x} 0dx=0.$

При $x\ge 0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{a} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}.$

Получаем:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1-e^{-\lambda x}, x\geq b\end{cases}$$

Математическое ожидание:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\lambda xe^{-\lambda x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx\\ dv=\lambda e^{-\lambda x}dx & v=-e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=\lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}\Big|_0^b+\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-\lambda b}-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Bigg|_0^b\right)=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{-b}{e^{\lambda b}}-\frac{1}{\lambda e^{\lambda b}}+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Т. е. $M(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Для нахождения дисперсии вначале найдем

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{+\infty}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\lambda x^2e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx\\ dv=\lambda e^{-\lambda x}dx & v=-e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=\lim_{b\to+\infty}\left(-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^b+2\int_0^b xe^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to+\infty}\frac{-b^2}{e^{\lambda b}}+$$

$$+2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx\\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=0+2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=$$

$$=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{\lambda e^{\lambda b}}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\Bigg|_0^b\right)=2\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{b}{\lambda e^{\lambda b}}-\frac{1}{\lambda^2 e^{\lambda b}}+\frac{1}{\lambda^2}\right)=\frac{2}{\lambda^2};$$

$$D(X)=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M\left(X\right)\right)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом, получаем $D(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

График функции распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей показательное распределение представлен на рис. 11.

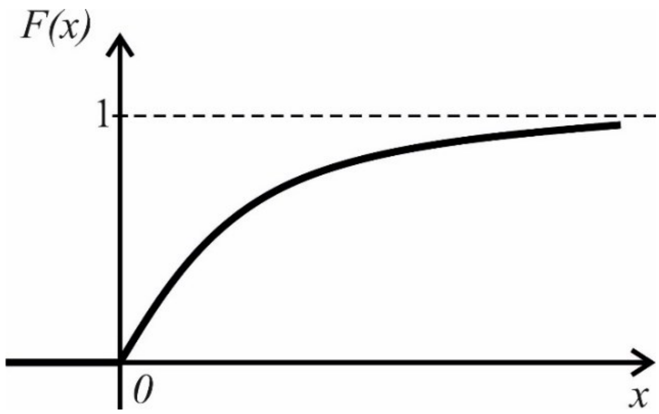


Рис. 11. График функции распределения

Для СВ, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т. е. $M(X) = \sigma(X)$.

Вероятность попадания случайной величины, подчиненной показательному закону распределения, в заданный интервал:

$$P\left(a < X < b\right) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

показательного распределения

Замечание. Показательный закон распределения (и только он) обладает следующим свойством: Если промежуток времени T, распределенный по показательному закону, уже длится некоторое время t, то это никак не влияет на закон распределения оставшейся части $T_1 = T - t$ промежутка, т. е. закон распределения T_1 остается таким же, как и всего промежутка T.

Показательный закон распределения играет большую роль в теории массового обслуживания и теории надежности. Так, например, интервал времени T между двумя соседними событиями в простейшем потоке событий имеет показательное распределение с параметром λ – интенсивностью потока.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а через какое– то время t происходит отказ устройства.

Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства. Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T < t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t.

Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T > t) = 1 - F(t)$.

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению.

Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать.

Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого-либо устройства при показательном законе распределения равна:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Данное соотношение называют **показательным законом надежности.**

Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t.

Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов l и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом.

Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

3.5. Нормальный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальный закон распределения*** с параметрами a и σ, если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами

a – математическое ожидание

σ – среднеквадратическое отклонение.

Достаточно знать эти параметры, чтобы задать нормальное распределение.

Общим называется нормальное распределение с произвольными a и σ. Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma = 1$ называется *стандартным* или *нормированным.*

Кривая нормального распределения $f(x)$ (нормальная кривая или кривая Гаусса) приведена на рис. 12.

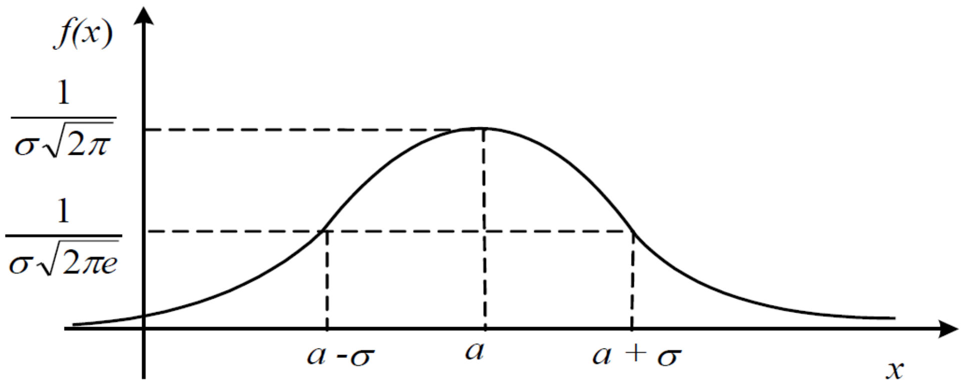


Рис. 12. Кривая нормального распределения

Свойства плотности нормального распределения:

1. $f(x)$ определена на всей оси x.
2. $f(x) > 0$.
3. При $x = af(x)$ имеет максимум.
4. График симметричен относительно прямой $x = a$.

Рассмотрим влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.

Изменение величины a не изменяет формы нормальной кривой, а приводит к ее сдвигу вдоль оси Ox. Если σ = *const*, и меняется параметр a, т. е. центр симметрии распределения, то кривая распределения будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис. 13).

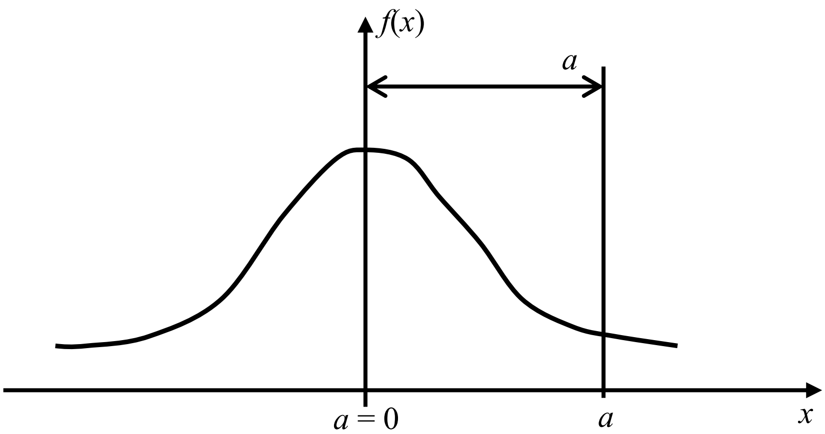


Рис. 13. Влияние величины a на форму нормальной кривой

Если $a = const$ и меняется параметр σ, то меняется ордината максимума кривой. При увеличении σ кривая распределения становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс; при уменьшении σ кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков (рис. 14).

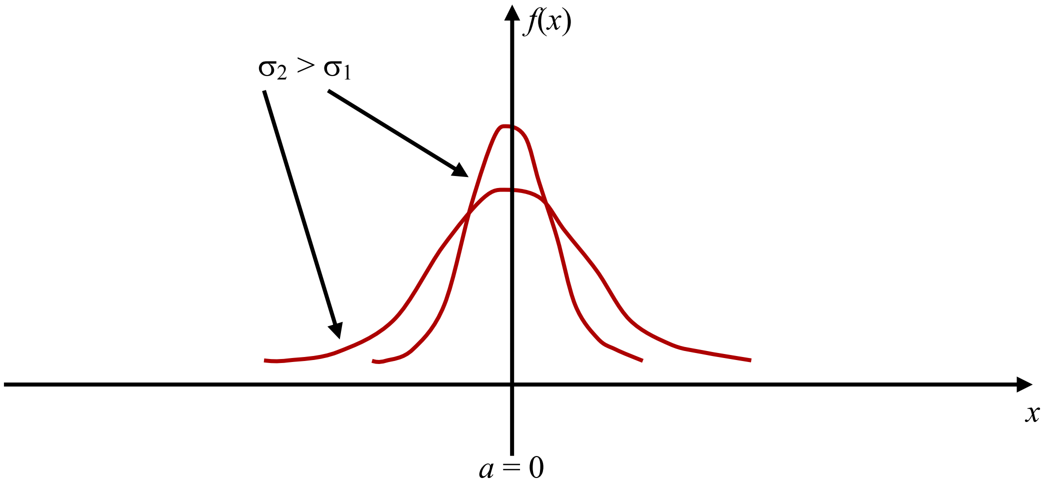


Рис. 14. Влияние величины σ на форму нормальной кривой

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является *предельным* законом, к которому приближаются другие законы при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Математическое ожидание случайной величины X, распределенной по нормальному закону, равно параметру a этого закона, а ее дисперсия – квадрату параметра σ, т. е. $M(X) = a, D(X) = \sigma^2$.

Вероятность попадания в заданный интервал

Очень часто исследователя интересует вопрос: какова вероятность того, что изучаемый признак находится в заданных границах.

Если предполагается нормальное распределение признака, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Пример

Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение

По условию: $\alpha = 10$, $\beta = 50$, $a = 30$, $\sigma = 10$

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Правило трех сигм

В таблице приведены полученные по формуле вероятности того, что нормально распределенная случайная величина отклонится от своего среднего значения а, не более, чем на $\pm 0{,}5\sigma$, $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$.

Границы интервала $a \pm x$	$a \pm 0{,}5\sigma$,	$a \pm \sigma$,	$a \pm 2\sigma$,	$a \pm 3\sigma$
Вероятность попадания в интервал	0,3829	0,6826	0,9544	0,9972

Из таблицы следует, что $P(-3\sigma < X - a < 3\sigma) = 0{,}9972.$

Это выражение известно "правило трех сигм".

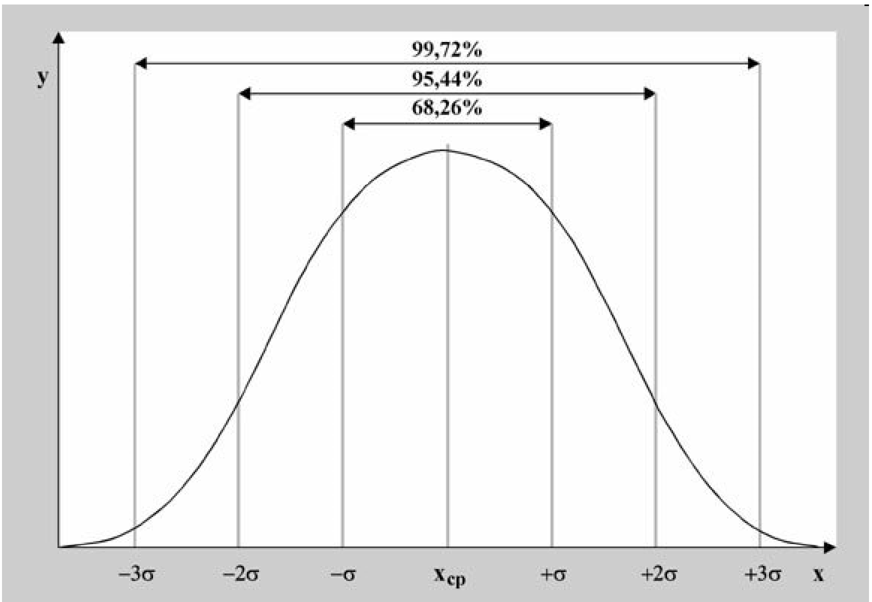


Рис. 15. "Правило трех сигм"

Оно означает, что с вероятностью 0,9972 (практически с единичной) нормально распределенная случайная величина окажется в пределах $\pm 3\sigma$ от среднего значения. Иначе говоря, отклонения от среднего больше чем на $+3\sigma$ можно ожидать примерно в 1 случае из 370 испытаний.

3.6. Распределение χ^2

Пусть имеется n независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. распределенных по нормальному закону с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице ($a_i = 0$, $\sigma_i = 1$). Тогда случайная величина $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ распределена по закону, который называется "распределение χ^2" или "распределение Пирсона". Очевидно, что она может принимать лишь неотрицательные значения. Число $k = n$ называется **числом степеней свободы**. Если же слагаемые связаны каким-либо соотношением (например, $\sum X_i = n\bar{X}$), то число степеней свободы $k = n - 1$.

Распределение хи-квадрат используют при оценивании дисперсии (с помощью доверительного интервала), при проверке гипотез согласия, однородности, независимости, прежде всего для качественных (категоризованных) переменных, принимающих конечное число значений, и во многих других задачах статистического анализа данных.

3.7. Распределение Стьюдента

Рассмотрим две независимые случайные величины: Z, имеющую нормальное распределение и нормированную (т. е. $M(Z) = 0$, $\sigma(Z) = 1$), и V, распределенную по закону "хи-квадрат" с k степенями свободы. Тогда величина $T = \frac{Z}{\sqrt{V / k}}$ имеет распределение, называемое ***t*** **– распределением или распределением Стьюдента** с ***k*** степенями свободы. С возрастанием числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному.

3.8. Распределение F Фишера – Снедекора

Рассмотрим две независимые случайные величины U и V, распределенные по закону "хи-квадрат" со степенями свободы k_1 и k_2 и образуем из них новую величину $F = \frac{U / k_1}{V / k_2}$. Ее распределение называют распределением F Фишера – Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие виды распределений дискретных случайных величин знаете?
2. Что такое биномиальное распределение дискретной случайной величины и в каком случае он используется?
3. Опишите распределение Пуассона.
4. Что называется, потоком случайных событий? Какой поток называется простейшим и какими свойствами обладает?

5. С помощью каких числовых характеристик описывается отличие конкретного распределения от нормального?

6. Дайте описания дискретных и непрерывных распределений: биномиального, пуассоновского, геометрического, гипергеометрического, нормального, показательного, равномерного.

7. Как найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал, если она распределена по нормальному или показательному закону?

Задачи для самостоятельного решения

1. Время безотказной работы аппаратуры является случайной величиной T, распределенной по показательному закону. Среднее время безотказной работы 700 часов. Найти вероятность того, что аппаратура проработает больше среднего времени.

2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 1$, $\sigma = 1$. Что больше $P\{-0,5 < X < -0,1\}$ или $P\{1 < X < 2\}$?

3. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

4. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

5. Найти математическое ожидание случайной величины X, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

6. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

7. Производится измерение диаметра вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением σ=10мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

8. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

9. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

10. Автомат изготовляет шарики. Шарик считается годным, если отклонение X диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $a = 0{,}4$ мм, найти, сколько в среднем будет годных шариков среди ста изготовленных.

11. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 25$. Вероятность попадания X в интервал (10, 15) равна 0,2. Чему равна вероятность попадания X в интервал (35, 40)?

12. Написать плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 6$.

13. Найти параметр λ показательного распределения: а) заданного плотностью $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = 2e^{-2x}$ при $x \geq 0$; б) заданного функцией распределения $F(x) = 0$ при $x < 0$ и $F(x) = 1 - e^{-0{,}4x}$ при $x \geq 0$.

14. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону, заданному плотностью вероятности $f(x) = 0$ при $x < 0$, $f(x) = 3e^{-3x}$ при $x \geq 0$. Найти вероятность того, что в результате испытания X попадает в интервал (0,13;0,7).

15. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0{,}03t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 100$ ч: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

16. Испытывают два независимо работающих элемента. Длительность времени безотказной работы первого элемента имеет показательное распределение $F_1(t) = 1 - e^{-0{,}02t}$, второго $F_2(t) = 1 - e^{-0{,}05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 6$ ч: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

§4. Системы случайных величин

Наряду с одномерными случайными величинами, возможные значения которых определяются одним числом, теория вероятностей рассматривает и многомерные случайные величины.

Часто приходится решать задачи, в которых в частности рассматриваются события, описываемые не одной, а двумя случайными величинами. Так если станок-автомат штампует цилиндрические валики, то диаметр валика ξ_1 и его высота ξ_2, образуют систему двух случайных величин $(\xi_1;\xi_2)$.

4.1. Дискретные двумерные случайные величины.

Двумерной называют случайную величину (X, Y), возможные значения которой есть пары чисел (x, y). Составляющие X и Y, рассматриваемые одновременно, образуют систему двух случайных величин. Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку M $(X; Y)$ на плоскости xOy либо как случайный вектор OM.

Дискретной называют двумерную величину, составляющие которой дискретны. Непрерывной называют двумерную величину, составляющие которой непрерывны.

Законом распределения вероятностей двумерной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины может быть задан: а) в виде таблицы с двойным входом, содержащей возможные значения и их вероятности; б) аналитически, например, в виде функции распределения.

Y	X			
	x_1	x_2	…	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	…	$p(x_n, y_1)$
…	…	…	…	…
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	…	$p(x_n, y_m)$

При этом сумма вероятностей, стоящих во всех клетках таблицы, равна 1.

Зная закон распределения двумерной случайной величины, можно найти законы распределения ее составляющих. Действительно, событие $X = x_1$ представляется собой сумму несовместных событий $(X = x_1,\ Y = y_1)$, $(X = x_1,$ $Y = y_2)$, …, $(X = x_1,\ Y = y_m)$, поэтому

$$p(X = x_1) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + \ldots + p(x_1, y_m).$$

В правой части находится сумма вероятностей, стоящих в столбце, соответствующем $X = x_1$.

Так же можно найти вероятности остальных возможных значений X. Для определения вероятностей возможных значений Y нужно сложить вероятности, стоящие в строке таблицы, соответствующей $Y = y_j$.

Пример

Дан закон распределения двумерной случайной величины:

Y	X		
	–2	3	6
–0,8	0,1	0,3	0,1
–0,5	0,15	0,25	0,1

Найти законы распределения составляющих.

Решение

Складывая стоящие в таблице вероятности "по столбцам", получим ряд распределения для X:

X	–2	3	6
p	0,25	0,55	0,2

Складывая те же вероятности "по строкам", найдем ряд распределения для Y:

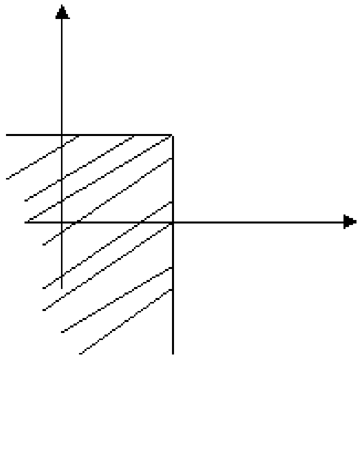
Y	–0,8	–0,5
p	0,5	0,5

4.2. Функция распределения двумерной случайной величины

Функцией распределения $F(x, y)$ двумерной случайной величины (X, Y) называется вероятность того, что $X<x$, а $Y<y$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Геометрически это равенство можно истолковать так: $F(x, y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X, Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x, y), расположенный левее и ниже этой вершины.



Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $0 \le F(x, y) \le 1$ (так как $F(x, y)$ является вероятностью).

2) $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу:

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), \text{ если } y_2 > y_1.$$

3) Имеют место предельные соотношения:

a) $F(-\infty, y) = 0$; b) $F(x, -\infty) = 0$; c) $F(-\infty, -\infty) = 0$; d) $F(\infty, \infty) = 1$.

4) При $y = \infty$ функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x).$$

При $x = \infty$ функция распределения двумерной случайной величины становится функцией распределения составляющей Y:

$$F(\infty, y) = F_2(y).$$

4.3. Условные законы распределения составляющих дискретной двумерной случайной величины

Рассмотрим дискретную двумерную случайную величину (X; Y). Пусть возможные значения составляющих таковы: $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Допустим, что в результате испытания величина Y приняла значение $Y = y_1$; при этом X примет одно из своих возможных значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим условную вероятность того, что X примет, например, значение x_1 при условии, что $Y = y_1$, через $p(x_1|y_1)$.

В общем случае условные вероятности составляющей

$$p(x_i|y_j)\ i = 1,2,\ldots n;\ j = 1,2,\ \ldots\ m.$$

Аналогично определяется условное распределение Y.

Условные вероятности составляющих X и Y вычисляют соответственно по формулам

$$p(x_i \mid y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}, \quad p(y_j \mid x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Пример

Y	X		
	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 0{,}4$

$$p(x_1 \mid y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}80} = \frac{1}{6};$$

$$p(x_2 \mid y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}80} = \frac{3}{8};$$

$$p(x_3 \mid y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}35}{0{,}80} = \frac{7}{16}.$$

4.4. Условное математическое ожидание

Важной характеристикой условного распределения вероятностей является условное математическое ожидание.

Математическое ожидание, вычисленное по условному распределению, называется условным математическим ожиданием. Условным математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$(x – определенное возможное значение X) называется произведение всех возможных значений Y на их условные вероятности.

$$M\left(Y \middle| X = x\right) = \sum_{j=1}^{m} y_j p\left(y_j \middle| x\right).$$

Пример

Найти условное математическое ожидание составляющей Y при $X = x_1 = 1$ для дискретной двумерной случайной величины, заданной таблицей:

Y	X			
	$x_1 = 1$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 8$
$y_1 = 2$	0,15	0,06	0,25	0,04
$y_2 = 6$	0,30	0,10	0,03	0,07

$$p(x_1) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45;$$

$$p(y_1 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(x_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{1}{3};$$

$$p(y_2 \mid x_1) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(x_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}45} = \frac{2}{3};$$

$$M\left(Y \middle| X = x_1\right) = \sum_{j=1}^{2} y_j p\left(y_j \middle| x_1\right) = y_1 p(y_1 \mid x_1) + y_2 p(y_2 \mid x_1) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} = 5.$$

Аналогично определяются условная дисперсия системы случайных величин.

4.5. Числовые характеристики двух случайных величин

Математическое ожидание ДСВ X, Y, входящих в систему определяется по формулам:

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i p_{ij} \qquad m_y = M(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_j p_{ij}.$$

Дисперсии:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - m_x\right)^2 p_{ij} \qquad D(Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - m_y\right)^2 p_{ij}.$$

Если случайные величины независимы, то математические ожидания можно найти по законам распределения составляющих. Случайные величины называются независимыми, если закон распределения одной из них не зависит от того какое значение принимает другая случайная величина.

Точка $\left(m_x; m_y\right)$ называется центром рассеивания системы случайных величин.

Для описания системы двух случайных величин кроме математических ожиданий и дисперсий составляющих используют и другие характеристики, такие как корреляционный момент и коэффициент корреляции.

Корреляционный момент (ковариация)

Характеристикой зависимости между случайными величинами X и Y служит математическое ожидание произведения отклонений X и Y от их центров распределений (так иногда называют математическое ожидание случайной величины), которое называется корреляционным моментом или ковариацией:

$$COV(X;Y) = M\Big(\big(X - M(X)\big)\big(Y - M(Y)\big)\Big).$$

Для вычисления корреляционного момента дискретных величин используют формулу:

$$COV(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\big(x_i - M(X)\big)\big(y_j - M(Y)\big)p\left(x_i; y_j\right)$$

а для непрерывных величин – формулу:

$$COV(X;Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(x_i - M(X)\big)\big(y_j - M(Y)\big)f\left(x_i; y_j\right)dxdy.$$

Эту формулу можно интерпретировать так. Если при больших значениях более вероятны большие значения, а при малых значениях X более вероятны малые значения Y, то в правой части формулы положительные слагаемые доминируют, и ковариация принимает положительные значения.

Если же более вероятны произведения $\left(x_i - M(X)\right)\left(y_j - M(Y)\right)$, состоящие из сомножителей разного знака, т. е. исходы случайного эксперимента, приводящие к большим значениям X в основном приводят к малым значениям Y и наоборот, то ковариация принимает большие по модулю отрицательные значения.

В первом случае принято говорить о прямой связи: с ростом X случайная величина Y имеет тенденцию к возрастанию.

Во втором случае говорят об обратной связи: с ростом X случайная величина Y имеет тенденцию к уменьшению или падению.

Если примерно одинаковый вклад в сумму дают и положительные и отрицательные произведения $\left(x_i - M(X)\right)\left(y_j - M(Y)\right)p\left(x_i, y_j\right)$, то можно сказать, что в сумме они будут “гасить” друг друга и ковариация будет близка к нулю. В этом случае не просматривается зависимость одной случайной величины от другой.

Теорема. Корреляционный момент двух независимых случайных величин X и Y равен нулю.

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерностей величин X и Y. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того, в каких единицах были измерены величины. Такая особенность корреляционного момента является недостатком этой числовой характеристики, поскольку сравнение корреляционных моментов различных систем случайных величин становится затруднительным.

Для того, чтобы устранить этот недостаток, вводят новую числовую характеристику – коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение корреляционного момента к произведению средних квадратических отклонений этих величин.

$$r_{xy} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}.$$

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной. Коэффициент корреляции независимых случайных величин равен нулю.

Свойства:

1) Абсолютная величина корреляционного момента двух случайных величин X и Y не превышает среднего геометрического их дисперсий.

$$\left|COV(X;Y)\right| \le \sqrt{D(X)D(Y)}.$$

2) Абсолютная величина коэффициента корреляции не превышает единицы:

$$\left|r_{xy}\right| \le 1.$$

Случайные величины называются **коррелированными**, если их корреляционный момент отличен от нуля, и **некоррелированными**, если их корреляционный момент равен нулю.

Если случайные величины независимы, то они и некоррелированы, но из некоррелированности нельзя сделать вывод о их независимости.

Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

Пример

Найти коэффициент корреляции двумерной случайной величины, заданный законом:

X \ Y	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

Решение

Найдем математические ожидания составляющих:

$M(X) = 7/3$;

$M(Y) = 11/6$.

Перейдем к распределению центрированной случайной величины. Для этого из каждого значения составляющих вычтем их математические ожидания.

X^0 \ Y^0	–5/6	1/6	7/6
–4/3	1/18	1/12	1/36
–1/3	1/9	1/6	1/18
2/3	1/6	1/4	1/12

Найдем дисперсии составляющих:

$$D(X)=\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{5}{9};$$

$$D(Y)=\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{9}+\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}+\ldots+\left(\frac{7}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{12}=\frac{17}{36};$$

$$COV(X;Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-M(X)\right)\left(y_j-M(Y)\right)p\left(x_i;y_j\right)=$$

$$=\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{18}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{12}+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{36}+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{9}+\ldots+$$

$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{12}=0;$$

$$r_{xy}=\frac{COV\left(X,Y\right)}{\sigma_x\sigma_y}=0.$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое двумерная случайная величина?
2. Как задается функция распределения двумерной случайной величины?
3. Что такое ковариация случайных величин?
4. Что такое коэффициент корреляции случайных величин? Перечислите основные свойства коэффициента корреляции.
5. Что такое условное математическое ожидание?
6. Объясните, как построить линию регрессии Y на X.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

Y	X			
	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти законы распределения составляющих.

2. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины:

X	Y		
	–1	0	2
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,1	0,05

а) Найти законы распределения отдельных компонент X и Y.

б) Построить функцию распределения $F(x, y)$.

в) Установить, являются ли зависимыми величины X и Y.

г) Чему равна вероятность $P(X \geq Y)$?

д) Найти коэффициент корреляции.

3. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X		
	2	5	8
0,4	0,15	0,30	0,35
0,8	0,05	0,12	0,03

Найти: а) безусловные законы распределения составляющих;

б) условный закон распределения составляющей X при условии, что составляющая *У* приняла значение 0,4;

в) условный закон распределения Y при условии, что $X = x_1 = 5$.

4. Задана дискретная двумерная случайная величина (X, Y):

Y	X	
	3	6
10	0,25	0,10
14	0,15	0,05
18	0,32	0,13

Найти: а) условное математическое ожидание составляющей X при условии, что составляющая $Y = 10$;

в) условное математическое ожидание составляющей Y при условии, что $X = x_1 = 5$.

5. Случайная точка (*X*, *У*) на плоскости распределена по закону:

X \ Y	–1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

Найти числовые характеристики ДДСВ.

ГЛАВА 3. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

§1. Неравенство Чебышева

Изучение статистических закономерностей позволило установить, что при некоторых условиях суммарное поведение большого количества случайных величин почти утрачивает случайный характер и становится закономерным (иначе говоря, случайные отклонения от некоторого среднего поведения взаимно погашаются). В частности, если влияние на сумму отдельных слагаемых является равномерно малым, закон распределения суммы приближается к нормальному. Математическая формулировка этого утверждения дается в группе теорем, называемой **законом больших чисел**.

Неравенство Чебышева справедливо как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин

Теорема (неравенство Чебышева)

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Пример

Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение

а) Обозначим через X дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M(X)=np=10\cdot 0,05=0,5;$$
$$D(X)=npq=10\cdot 0,05\cdot 0,95=0,475.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева. Подставим $M(X)=0,05;$ $D(X)=0,475;$ ε = 2, получим

$$P\left(\left|X-0,5\right|<2\right)\geq 1-\frac{0,475}{2^2}=0,88.$$

б) События $|X-0,5|<2$ и $|X-0,5|\geq 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$$P\left(|X-0,5|\geq 2\right)\leq 1-0,88=0,12.$$

§2. Теорема Чебышева

Теорема (теорема Чебышева)

Если X_1, X_2, …, X_n – попарно независимые случайные величины, дисперсии которых равномерно ограничены ($D(X_i)\leq C$), то для сколь угодно малого числа ε вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M\left(X_1\right)+M\left(X_2\right)+\ldots+M\left(X_n\right)}{n}\right|<\varepsilon.$$

будет сколь угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико.

Замечание. Иначе говоря, при выполнении этих условий

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M\left(X_i\right)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Следствие

Если X_1, X_2, …, X_n – попарно независимые случайные величины с равномерно ограниченными дисперсиями, имеющие одинаковое математическое ожидание, равное a, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ вероятность неравенства $\left|\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$ будет как угодно близка к 1, если число случайных величин достаточно велико.

Иначе говоря,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Вывод: среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин принимает значения, близкие к сумме их математических ожиданий, т. е. утрачивает характер случайной величины. Например, если проводится серия измерений какой-либо физической величины, причем: а) результат каждого измерения не зависит от результатов остальных, т. е. все результаты представляют собой попарно независимые случайные величины; б) измерения производятся без систематических ошибок (их математические ожидания равны между собой и равны истинному значению a измеряемой величины);

в) обеспечена определенная точность измерений, следовательно, дисперсии рассматриваемых случайных величин равномерно ограничены; то при достаточно большом числе измерений их среднее арифметическое окажется сколь угодно близким к истинному значению измеряемой величины.

§3. Теорема Бернулли

Теорема (теорема Бернулли)

Пусть производится последовательность независимых испытаний, в результате каждого из которых может наступить или не наступить событие A, причем вероятность наступления этого события одна и та же при каждом испытании и равна p. Если событие A фактически произошло m раз в n испытаниях, то отношение m/n называют, как мы знаем, частотой появления события A. Частота есть случайная величина, причем вероятность того, что частота принимает значение m/n, выражается по формуле Бернулли:

$$p_n(m) = C_n^m p^n q^{n-m}.$$

Закон больших чисел в форме Бернулли состоит в следующем: с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе опытов частота появления события А как угодно мало отличается от его вероятности, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Замечание. Из теоремы Бернулли *не следует*, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{m}{n} = p.$

Речь идет лишь о *вероятности* того, что разность относительной частоты и вероятности по модулю может стать сколь угодно малой. Разница заключается в следующем: при обычной сходимости, рассматриваемой в математическом анализе, для всех n, начиная с некоторого значения, неравенство $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$ выполняется всегда; в нашем случае могут найтись такие значения n, при которых это неравенство неверно. Этот вид сходимости называют **сходимостью по вероятности**.

Вопросы для самоконтроля

1. Запишите неравенство Маркова.
2. Запишите неравенство Чебышева.
3. Что называется законом больших чисел?
4. Сформулируйте теорему Чебышева.

5. Сформулируйте теорему Бернулли.
6. Закон больших чисел.
7. Какие утверждения принято называть "законом больших чисел"?
8. Сформулируйте теорему, известную как "неравенство Чебышева".

Задачи для самостоятельного решения

1. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(\mathrm{X})| < 0{,}2$, если $D(X) = 0{,}004$.

2. Дано: $P(|X - M(\mathrm{X})| < \varepsilon) \geq 0{,}9$ и $D(X) = 0{,}009$. Используя неравенство Чебышева, оценить ε снизу.

3. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) меньше двух; б) не меньше двух.

4. Вероятность появления события A в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события A заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

5. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $|X - M(X)| < 0{,}2.$

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балдин, К. В. Основы теории вероятностей и математической статистики : учебник / К.В. Балдин, В. Н. Башлыков, А. В. Рокосуев ; ред. К. В. Балдина. – Москва : Изд-во "Флинта", 2010. – 245 с.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для бакалавриата и специалитета / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во Юрайт, 2019. – 406 с.

3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для прикладного бакалавриата / В. Е. Гмурман. – 12-е изд. – Москва : Изд-во Юрайт, 2019. – 479 с.

4. Гусева, Е. Н. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / Е. Н. Гусева. – 6-е изд., стереотип. – Москва : Изд-во "Флинта", 2016. – 220 с.

5. Дегтярь, Л. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для самостоятельной работы студентов / Л. А. Дегтярь, А. Г. Мордкович. – пос. Персиановский : Донской ГАУ, 2013. – 108 с.

6. Колмогоров, А. Н. Введение в теорию вероятностей / А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. – 3-е изд., испр. – М. : Изд-во МЦНМО, 2015. – 168 с. (Библиотека "Квант". Вып. 135. Приложение к журналу "Квант" №4/2015.)

7. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Изд-во Юрайт, 2019. – 538 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Таблица значений функции Лапласа $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица значений интегральной функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)	x	Ф(x)
0,00	0,0000	**0,46**	0,1772	**0,92**	0,3212	**1,38**	0,4162	**1,84**	0,4671	**2,60**	0,4953
0,01	0,0040	**0,47**	0,1808	**0,93**	0,3238	**1,39**	0,4177	**1,85**	0,4678	**2,62**	0,4956
0,02	0,0080	**0,48**	0,1844	**0,94**	0,3264	**1,40**	0,4192	**1,86**	0,4686	**2,64**	0,4959
0,03	0,0120	**0,49**	0,1879	**0,95**	0,3289	**1,41**	0,4207	**1,87**	0,4693	**2,66**	0,4961
0,04	0,0160	**0,50**	0,1915	**0,96**	0,3315	**1,42**	0,4222	**1,88**	0,4699	**2,68**	0,4963
0,05	0,0199	**0,51**	0,1950	**0,97**	0,3340	**1,43**	0,4236	**1,89**	0,4706	**2,70**	0,4965
0,06	0,0239	**0,52**	0,1985	**0,98**	0,3365	**1,44**	0,4251	**1,90**	0,4713	**2,72**	0,4967
0,07	0,0279	**0,53**	0,2019	**0,99**	0,3389	**1,45**	0,4265	**1,91**	0,4719	**2,74**	0,4969
0,08	0,0319	**0,54**	0,2054	**1,00**	0,3413	**1,46**	0,4279	**1,92**	0,4726	**2,76**	0,4971
0,09	0,0359	**0,55**	0,2088	**1,01**	0,3438	**1,47**	0,4292	**1,93**	0,4732	**2,78**	0,4973
0,10	0,0398	**0,56**	0,2123	**1,02**	0,3461	**1,48**	0,4306	**1,94**	0,4738	**2,80**	0,4974
0,11	0,0438	**0,57**	0,2157	**1,03**	0,3485	**1,49**	0,4319	**1,95**	0,4744	**2,82**	0,4976
0,12	0,0478	**0,58**	0,2190	**1,04**	0,3508	**1,50**	0,4332	**1,96**	0,4750	**2,84**	0,4977
0,13	0,0517	**0,59**	0,2224	**1,05**	0,3531	**1,51**	0,4345	**1,97**	0,4756	**2,86**	0,4979
0,14	0,0557	**0,60**	0,2257	**1,06**	0,3554	**1,52**	0,4357	**1,98**	0,4761	**2,88**	0,4980
0,15	0,0596	**0,61**	0,2291	**1,07**	0,3577	**1,53**	0,4370	**1,99**	0,4767	**2,90**	0,4981
0,16	0,0636	**0,62**	0,2324	**1,08**	0,3599	**1,54**	0,4382	**2,00**	0,4772	**2,92**	0,4982
0,17	0,0675	**0,63**	0,2357	**1,09**	0,3621	**1,55**	0,4394	**2,02**	0,4783	**3,00**	0,49865
0,18	0,0714	**0,64**	0,2389	**1,10**	0,3643	**1,56**	0,4406	**2,04**	0,4793	**3,20**	0,49931
0,19	0,0753	**0,65**	0,2422	**1,11**	0,3665	**1,57**	0,4418	**2,06**	0,4803	**3,40**	0,49966
0,20	0,0793	**0,66**	0,2454	**1,12**	0,3686	**1,58**	0,4429	**2,08**	0,4812	**3,60**	0,499841
0,21	0,0832	**0,67**	0,2486	**1,13**	0,3708	**1,59**	0,4441	**2,10**	0,4821	**3,80**	0,499928
0,22	0,0871	**0,68**	0,2517	**1,14**	0,3729	**1,60**	0,4452	**2,12**	0,4830	**4,00**	0,499968
0,23	0,0910	**0,69**	0,2549	**1,15**	0,3749	**1,61**	0,4463	**2,14**	0,4838	**4,50**	0,499997
0,24	0,0948	**0,70**	0,2580	**1,16**	0,3770	**1,62**	0,4474	**2,16**	0,4846	**5,00**	0,499997
0,25	0,0987	**0,71**	0,2611	**1,17**	0,3790	**1,63**	0,4484	**2,18**	0,4854		
0,26	0,1026	**0,72**	0,2642	**1,18**	0,3810	**1,64**	0,4495	**2,20**	0,4861		
0,27	0,1064	**0,73**	0,2673	**1,19**	0,3830	**1,65**	0,4505	**2,22**	0,4868		
0,28	0,1103	**0,74**	0,2703	**1,20**	0,3849	**1,66**	0,4515	**2,24**	0,4875		
0,29	0,1141	**0,75**	0,2734	**1,21**	0,3869	**1,67**	0,4525	**2,26**	0,4881		
0,30	0,1179	**0,76**	0,2764	**1,22**	0,3883	**1,68**	0,4535	**2,28**	0,4887		
0,31	0,1217	**0,77**	0,2794	**1,23**	0,3907	**1,69**	0,4545	**2,30**	0,4893		
0,32	0,1255	**0,78**	0,2823	**1,24**	0,3925	**1,70**	0,4554	**2,32**	0,4898		
0,33	0,1293	**0,79**	0,2852	**1,25**	0,3944	**1,71**	0,4564	**2,34**	0,4904		
0,34	0,1331	**0,80**	0,2881	**1,26**	0,3962	**1,72**	0,4573	**2,36**	0,4909		
0,35	0,1368	**0,81**	0,2910	**1,27**	0,3980	**1,73**	0,4582	**2,38**	0,4913		
0,36	0,1406	**0,82**	0,2939	**1,28**	0,3997	**1,74**	0,4591	**2,40**	0,4918		

Окончание таблицы

x	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)
0,37	0,1443	**0,83**	0,2967	**1,29**	0,4015	**1,75**	0,4599	**2,42**	0,4922		
0,38	0,1480	**0,84**	0,2995	**1,30**	0,4032	**1,76**	0,4608	**2,44**	0,4927		
0,39	0,1517	**0,85**	0,3023	**1,31**	0,4049	**1,77**	0,4616	**2,46**	0,4931		
0,40	0,1554	**0,86**	0,3051	**1,32**	0,4066	**1,78**	0,4625	**2,48**	0,4934		
0,41	0,1591	**0,87**	0,3078	**1,33**	0,4082	**1,79**	0,4633	**2,50**	0,4938		
0,42	0,1628	**0,88**	0,3106	**1,34**	0,4099	**1,80**	0,4641	**2,52**	0,4941		
0,43	0,1664	**0,89**	0,3133	**1,35**	0,4115	**1,81**	0,4649	**2,54**	0,4945		
0,44	0,1700	**0,90**	0,3159	**1,36**	0,4131	**1,82**	0,4656	**2,56**	0,4948		
0,45	0,1736	**0,91**	0,3186	**1,37**	0,4147	**1,83**	0,4664	**2,58**	0,4951		