МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра МИС и ПО

Методические указания к выполнению РГР по теме:

"Теория вероятностей и математическая статистика."

по дисциплине **"Математика "** для специальности
15.03.02 Технологические машины и оборудование
направленности/специализации
Пищевая инженерия малых предприятий
для студентов очной формы обучения

Мурманск
2020 г.

Оглавление

Введение	Стр. 3
Задания для выполнения **РГР №3 "Теория вероятностей и математическая статистика"**	Стр. 4
Решение примерного варианта **РГР №3**	Стр. 12

Введение.

Методические указания к выполнению РГР содержат задания на выполнение РГР**№3 "Теория вероятностей и математическая статистика"** по дисциплине **"Математика "**, а также решение примерного варианта РГР.

Расчетно-графическая работа по дисциплине выполняется в соответствии с учебным планом по специальности.

Целью РГР являются систематизация, расширение и углубление знаний, полученных при теоретическом изучении дисциплины, с тем, чтобы студент мог использовать полученные знания на практике.

Приступая к выполнению расчетно-графической работы, необходимо ознакомиться с соответствующими разделами программы курса и методическими указаниями.

РГР должна быть выполнено и представлено в срок, установленный кафедрой.

При выполнении задания студенту необходимо руководствоваться следующими требованиями:

1. В работе должен быть указан номер варианта работы.
2. Вариант каждой задачи выбирается по последней цифре номера зачетной книжки студента. Самовольная замена одного варианта задания другим не разрешается.
3. Перед решением задания должно быть приведено его условие. Отделите решение задачи от ее условия некоторым интервалом.
4. Решение задания следует сопровождать развернутыми расчетами.
5. Выполненная работа должна быть оформлена в соответствии с требованиями по оформлению письменных работ.
6. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты, а также выполнить все рекомендации.
7. Студенты, не получившие зачета по предусмотренным учебным планом письменным работам, к экзамену не допускаются.
8. Работы, выполненные не по своему варианту, рецензированию не подлежат.

Задания для выполнения
РГР №3 "Теория вероятностей и математическая статистика"

Задача 1.

Вариант 1. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи из-за выхода из строя одного из трех элементов, Вероятности выхода из строя элементов 0,3, 0,4 и 0,5 соответственно. Какова вероятность того, что не будет разрыва сети?

Вариант 2. Радист 3 раза вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста хотя бы один раз.

Вариант 3. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ по двум дисциплинам.

Вариант 4. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ хотя бы по двум дисциплинам.

Вариант 5. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,85 и в третье – 0,7. Найти вероятность, того, что хотя бы одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 6. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность, того, что только два отделения получат газеты вовремя.

Вариант 7. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе отделение – 0,95 и в третье – 0,85. Найти вероятность, того, что только одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 8. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что только два орудия попадут в цель.

Вариант 9. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадет в цель.

Вариант 10. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы одно орудие попадет в цель.

Задача 2.

В каждом варианте для заданной случайной величины ξ составить закон распределения, построить многоугольник распределения вероятностей, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 1. Вероятность отказа каждого прибора при проведении испытания равна 0,4, для испытания было отобрано 4 прибора, случайная величина ξ – число приборов, отказавших при проведении испытаний.

Вариант 2. Вероятность совершить покупку для каждого покупателя магазина равна 0,3, в магазин пришли 4 покупателя, случайная величина ξ – число покупателей, совершивших покупку.

Вариант 3. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515, случайная величина ξ – число мальчиков в семье из 4 детей.

Вариант 4. Вероятность того, что корреспондент примет вызов радиста, равна 0,4, случайная величина ξ – число вызовов, принятых корреспондентом, если радистом было передано 4 вызова.

Вариант 5. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб., случайная величина ξ – размер выигрыша при четырех сделанных покупках, если вероятность выигрыша в каждой покупке равна 0,1.

Вариант 6. В контрольной работе 4 задачи, вероятность правильного решения учеником каждой задачи 0,7, случайная величина ξ – число правильно решенных задач.

Вариант 7. Торговый агент имеет четырех потенциальных покупателей, вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4, случайная величина ξ – число покупателей, сделавших заказ.

Вариант 8. Студент должен сдать в сессию 4 экзамена, вероятность успешной сдачи каждого экзамена 0,7, случайная величина ξ – число экзаменов, которые сдал студент в сессию.

Вариант 9. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,2. В случайном порядке выбраны четыре телезрителя, случайная величина ξ – число лиц, видевших рекламу.

Вариант 10. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75, контроль расхода электроэнергии производится в течение четырех суток, случайная величина ξ – число дней, в которые расход электроэнергии был выше установленной нормы.

Задача 3

Вариант 1. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется меньше 95.

Вариант 2. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах. Вес заряда - нормально распределенная случайная величина с параметрами a = 2,3 г и σ=150 мг. Найти вероятность повреждения ружья при выстреле, если максимально допустимый вес заряда пороха равен 2,5 г.

Вариант 3. Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами a = 30 см и σ = 5 см. Детали считаются годными, если их размер находится в пределах от 20 до 40 см. Если размер детали больше 40 см, то она подлежит переделке. Найти вероятность того, что случайно отобранная деталь подлежит переделке.

Вариант 4. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется в пределах от 80 до 120.

Вариант 5. Средняя длина взрослой рыбы оценивается в 65 см. со стандартным отклонением в 5 см. Считая распределение длины рыбы нормальным, найдите вероятность того, что длина конкретной рыбы будет больше 70 см.

Вариант 6. Спортсмен бросает копье. Дальность полета копья – нормально распределенная случайная величина со средним значением 70 м и средним квадратическим отклонением σ=5 м. Найти вероятность того, что дальность полета копья будет от 65 до 72 м.

Вариант 7. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением σ=150 кг. Определить вероятность того, что вес случайно отобранной туши будет между 800 и 1300 кг.

Вариант 8. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет не выше 15,3 ден. ед.

Вариант 9. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет в интервале от 14,9 до 15,3 ден. ед.

Вариант 10. На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma = 150$ кг. Найти вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг.

Задача 4.

Из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, сделана выборка. Найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с заданной надежностью γ.

Вариант 1.

x_i	54-58	58-62	62-66	66-70	70-74	74-78	78-82
n_i	12	16	22	24	12	10	4

$\gamma = 0{,}93$.

Вариант 2

x_i	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
n_i	10	14	26	28	12	8	2

$\gamma = 0{,}94$.

Вариант 3.

x_i	0-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700
n_i	3	5	9	14	8	3

$\gamma = 0{,}97$.

Вариант 4.

x_i	33,2	38,2	43,2	48,2	53,2
n_i	1	2	18	3	1

$\gamma = 0{,}92$.

Вариант 5.

x_i	15,4	18,4	21,4	24,4	27,4
n_i	2	4	11	5	3

$\gamma = 0{,}96$.

Вариант 6.

x_i	15	20	16	17	19	18
n_i	3	9	2	7	6	8

$\gamma = 0{,}91$.

Вариант 7.

x_i	4 - 9	9 - 14	14 - 19	19 - 24	24 - 29
n_i	5	9	13	6	7

$\gamma = 0{,}98$.

Вариант 8.

x_i	12,4	16,4	20,4	24,4	28,4	32,4	36,4
n_i	5	15	40	25	8	4	3

$\gamma = 0{,}93$.

Вариант 9.

x_i	1,7– 2,8	2,8– 3,9	3,9-5,0	5,0-6,1	6,1-7,2	7,2-8,3
n_i	8	10	22	10	6	4

$\gamma = 0{,}97$.

Вариант 10.

x_i	3 - 7	7 - 11	11- 15	15 - 19	19 - 23
n_i	1	5	11	7	3

$\gamma = 0{,}94$

Задача 5.

Имеются две нормально распределенные генеральные совокупности X и Y, из которых были сделаны выборки. По полученным выборкам на уровне значимости α проверить гипотезу $H_0:\ \bar{x}_0 = \bar{y}_0$, считая дисперсии неизвестными, но равными.

Вариант 1.

x_i	51	44	47	24	43	34	60
y_i	40	38	37	52	42		

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 2.

x_i	113	120	113	109	111	102	116

y_i	97	104	105	103	122	128	113

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 > \bar{y}_0$

Вариант 3.

x_i	49	51	46	49	56		
y_i	57	58	50	51	46	39	67

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 4.

x_i	35	65	50	46			
y_i	38	33	37	65	78	66	31

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 5.

x_i	58	56	53	53	56	52	52
y_i	50	54	51	56	53	70	68

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 6.

x_i	93	94	93	92	90	65	87
y_i	93	92	103	95			

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 7.

x_i	35	34	47	46			
y_i	65	45	34	53	68	70	70

Уровень значимости $\alpha = 0{,}015$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 8.

x_i	99	97	95	94	90	91	89
y_i	93	96	94	95			

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 9.

x_i	47	59	61	60			
y_i	55	55	61	62	67	75	64

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 10.

x_i	16	17	14	8	20		

y_i	27	24	18	15	5	7	30

Уровень значимости $\alpha = 0{,}025$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Задача 6.

Была исследована зависимость признака Y от признака X. В результате проведения 10 измерений были получены результаты, представленные в таблице.

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости α; 2) найти уравнение линейной регрессии Y на X; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

Вариант 1.

x_i	9	12	13	14	15	17	18	19	21	23
y_i	69	73	95	87	96	98	105	111	107	129

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

Вариант 2.

x_i	6,0	6,5	6,8	7,0	7,4	8,0	8,2	8,7	9,0	10,0
y_i	10	11	12	13	15	17	18	20	20	25

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$.

Вариант 3.

x_i	39,0	38,7	38,9	40,1	39,4	39,4	39,5	39,1	40,4	39,5
y_i	4	3	4	6	6	5	4	6	7	5

Уровень значимости $\alpha = 0{,}03$.

Вариант 4.

x_i	85	88	85	106	100	97	105	106	105	103
y_i	45	49	50	56	53	55	56	58	60	62

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$.

Вариант 5.

x_i	28	25	33	49	32	24	32	24	36	32
y_i	34	28	38	47	36	27	28	29	31	37

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вариант 6.

x_i	3,5	4,0	3,8	4,6	3,9	3,0	3,5	3,9	4,5	4,1
y_i	4,2	3,9	3,8	4,5	4,2	3,4	3,8	3,9	4,6	3,0

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$.

Вариант 7.

x_i	2	3	4	4	5	5	7	10	10	12
y_i	2	2	3	2,5	3,5	4	4	5	6	8

Уровень значимости $\alpha = 0{,}07$.

Вариант 8.

x_i	30	41	52	60	73	80	92	100	112	125
y_i	19	25	30	32	37	40	45	47	51	53

Уровень значимости $\alpha = 0{,}08$.

Вариант 9.

x_i	2,8	2,2	3,0	3,5	3,2	3,7	4,0	4,8	6,0	5,4
y_i	6,7	6,9	7,2	7,3	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7

Уровень значимости $\alpha = 0{,}09$.

Вариант 10.

x_i	3,2	3,7	4,0	4,8	6,0	5,4	5,2	5,4	6,0	9,0
y_i	8,4	8,8	9,1	9,8	10,6	10,7	11,1	11,8	12,1	12,4

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.

Решение примерного варианта РГР №3

Задача 1. По каналу связи передаются три сообщения. Вероятность того, что первое сообщение будет искажено равна 0,1, второе – 0,2, третье – 0,3. Найти вероятности следующих событий: A – все три сообщения переданы без искажения; B – ровно одно сообщение передано без искажения; C – хотя бы одно сообщение искажено.

Решение.

Введем в рассмотрение вспомогательные события A_k – k-ое сообщение передано без искажений, $\overline{A}_k$ – k-ое сообщение искажено, $k = 1,2,3$. Согласно условию $P(\overline{A}_1)=0{,}1$, тогда $P(A_1)=1-P(\overline{A}_1)=1-0{,}1=0{,}9$. Аналогично, $P(\overline{A}_2)=0{,}2$ и $P(A_2)=0{,}8$, $P(\overline{A}_3)=0{,}3$ и $P(A_3)=0{,}7$.

Так как событие A можно представить в виде $A=A_1A_2A_3$ и события A_1, A_2, A_3 независимы, то вероятность события A можно найти по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(A)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)$$

$$P(A)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Событие B можно представить следующим образом:

$$B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

причем слагаемые $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ являются попарно несовместными событиями. Поэтому на основании теоремы сложения вероятностей получаем:

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3).$$

Для вычисления вероятностей событий $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ используем теорему умножения вероятностей:

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}054;$$

$$P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3=0{,}024;$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}014.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$P(B)=0{,}054+0{,}024+0{,}014=0{,}092.$$

События A и C являются противоположными, следовательно,

$$P(C)=1-P(A)=1-0{,}504=0{,}496.$$

Ответы: $P(A)=0{,}504$, $P(B)=0{,}092$, $P(C)=0{,}496$.

Задача 2. Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,4. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела, построить многоугольник распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение.

Случайная величина ξ может принимать 4 значения:

0 – если стрелок промахнулся 3 раза;

5 – если стрелок попал 1 раз при трех выстрелах;

10 – если стрелок попал 2 раза при трех выстрелах;

15 – если стрелок попал 3 раза.

Так как каждый выстрел можно рассматривать, как независимое испытание, в результате которого возможны только два исхода: попадание («успех») или промах («неудача»), то вероятности, соответствующие каждому значению случайной величины, можно найти по формуле Бернулли:

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

По условию задачи имеем: число испытаний $n = 3$, вероятность успеха $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, значения m будут изменяться от 0 до 3. Т.о. имеем:

$$p_0 = p(\xi = 0) = C_3^0\, 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216,$$

$$p_1 = p(\xi = 5) = C_3^1\, 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432,$$

$$p_2 = p(\xi = 10) = C_3^2\, 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288,$$

$$p_3 = p(\xi = 15) = C_3^3\, 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064.\text{о}$$

Следовательно, окончательно закон распределения случайной величины ξ будет иметь вид:

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

Построим многоугольник распределения. Для этого по оси абсцисс отложим возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности и соединяем точки (x_i, p_i) отрезками прямых. Полученная при этом ломаная линия и есть многоугольник распределения вероятностей случайной величины ξ.

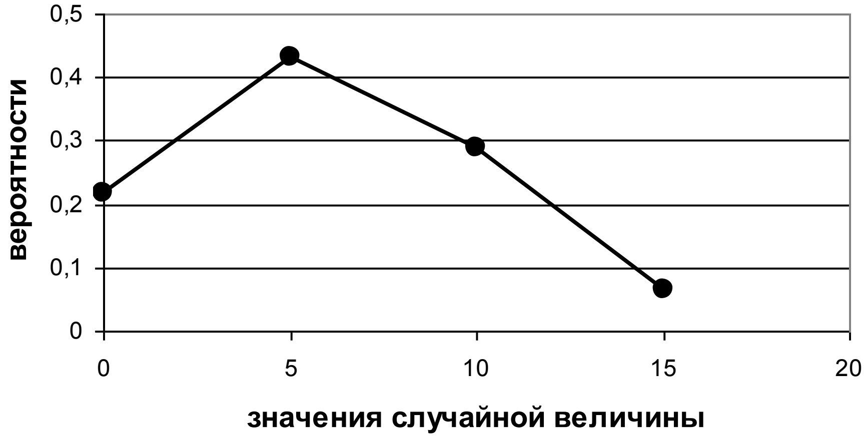


Рис. 1. Многоугольник распределения вероятностей

Рассчитаем числовые характеристики случайной величины ξ.

1. Математическое ожидание вычисляем по формуле

$$M\xi = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 5 \cdot 0{,}432 + 10 \cdot 0{,}288 + 15 \cdot 0{,}064 = 6.$$

2. Дисперсия вычисляется по формуле:

$$D\xi = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M\xi)^2 = 0^2 \cdot 0{,}216 + 5^2 \cdot 0{,}432 + 10^2 \cdot 0{,}288 + 15^2 \cdot 0{,}064 - 6^2 = 18.$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{18} \approx 4{,}2.$$

Ответ. Закон распределения случайной величины ξ:

x_i	0	5	10	15
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

многоугольник распределения – на рисунке 1, $M\xi = 6$, $D\xi = 18$, $\sigma_\xi = \sqrt{18} \approx 4{,}2$.

Задача 3. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что в результате испытания ξ примет значение, заключенное в интервале $(12;14)$.

Решение.

Так как случайная величина ξ имеет нормальное распределение, то вероятность ее попадания в интервал можно найти следующим образом. Учитывая, что по условию имеем: $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$, $\sigma^2 = 4$, то получим:

$$P(12 < \xi < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим: Ф(2)=0,4772, Ф(1)=0,3413. Значит, получаем: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$.

Ответ: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$

Задача 4. По выборке из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака X найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

x_i	33,2	38,2	43,2	48,2	53,2
n_i	2	4	10	3	1

Решение.

1. Сначала вычислим числовые характеристики выборки.

Найдем выборочную среднюю:

Учитывая, что объем выборки $n = 2 + 4 + 10 + 3 + 1 = 20$, получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(33{,}2 \cdot 2 + 38{,}2 \cdot 4 + 43{,}2 \cdot 3 + 48{,}2 \cdot 3 + 53{,}2 \cdot 1) = 42{,}45.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{20}(33{,}2^2 \cdot 2 + 38{,}2^2 \cdot 4 + 43{,}2^2 \cdot 3 + 53{,}2^2 \cdot 1) - 42{,}45^2 = 23{,}1875.$$

Выборочное СКО:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{23{,}1875} \approx 4{,}82.$$

2. Несмещенной оценкой для генеральной средней $\bar{x}_0$ является выборочная средняя $\bar{x} = 42{,}45$.

Несмещенной оценкой дисперсии σ_0^2 генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия s_x^2, которая вычисляется по формуле $s_x^2 = \dfrac{n}{n-1}\sigma^2$:

$$s_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 23{,}1875 \approx 24{,}41.$$

3. Так как генеральная дисперсия σ_0^2 неизвестна, а известна лишь ее оценка – исправленная выборочная дисперсия s_x^2 и данная выборка имеет небольшой объем ($n < 30$), то доверительный интервал для генеральной средней можно найти, используя формулы $\bar{x} - \Delta < \bar{x}_0 < \bar{x} + \Delta$ и $\Delta = \dfrac{t_{\gamma,k} \cdot s}{\sqrt{n}}$.

Значение $t_{\gamma,n-1}$ находим по таблице распределения Стьюдента, где $\gamma = 0{,}99$ – доверительная вероятность, $n = 20$ – объем выборки, $n-1 = 19$ - число степеней свободы.

Учитывая, что $\bar{x} = 42{,}45$, $s_x = \sqrt{24{,}41} \approx 4{,}94$, $t_{0{,}99;19} = 2{,}86$, находим сначала точность оценки по формуле $\Delta = \dfrac{t_{\gamma,k} \cdot s}{\sqrt{n}}$:

$$\Delta = 2{,}86 \cdot \frac{4{,}94}{\sqrt{20}} \approx 3{,}16.$$

Теперь определяем искомый доверительный интервал :

$$42{,}45 - 3{,}16 < \bar{x}_0 < 42{,}45 + 3{,}16$$

$$\text{или } 39{,}39 < \bar{x}_0 < 45{,}61.$$

<u>Ответы:</u> 1. $\bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_x^2 = 23{,}1875$, $\sigma_x \approx 4{,}82$; 2. $\bar{x}_0 \approx \bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_0^2 \approx s_x^2 \approx 24{,}41$; 3. $39{,}21 < \bar{x}_0 < 45{,}69$.

<u>Задача 5.</u> Массовую долю (%) оксида меди в минерале определили методом иодометрии и методом комплексометрии. По первому методу получили результаты: 38,20; 38,00; 37,66, а по второму: 37,70; 37,65; 37,55. Проверить, различаются ли средние результаты данных методов на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если известно, что результаты измерений имеют нормальный закон распределения с неизвестными, но равными дисперсиями.

Решение.

Вычисляем для каждого метода числовые характеристики, учитывая, что объем каждой выборки равен $n_x = n_y = 3$:

- выборочные средние значения:

$$\bar{y} = \frac{1}{n_y}\sum y_i = \frac{1}{3}(37{,}70 + 37{,}65 + 37{,}55) = 37{,}63;$$

- исправленные выборочные дисперсии:

$$s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1}\sum (x_i - \bar{x})^2,\ s_y^2 = \frac{1}{n_y - 1}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{2}((38{,}20 - 37{,}95)^2 + (38{,}00 - 37{,}95)^2 + (37{,}66 - 37{,}95)^2) = 0{,}07453;$$

$$s_y^2 = \frac{1}{2}((37{,}70 - 37{,}63)^2 + (37{,}65 - 37{,}63)^2 + (37{,}55 - 37{,}63)^2) = 0{,}00583.$$

Теперь проверим гипотезу о равенстве средних двух совокупностей.

1. Нулевая гипотеза: H_0: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$.

   Альтернативная гипотеза: H_1: $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

2. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Проверку гипотезы будем проводить с помощью t-критерия, так как выборки маленькие и по условию дисперсии генеральных совокупностей неизвестны, но равны. По таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента при $\gamma = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$ и числе степеней свободы $k = 3 + 3 - 2 = 4$ находим критическое значение: $t_{0,95;4} = 2{,}78$.

4. Рассчитаем эмпирическое значение t-критерия, используя формулу

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}:$$

$$t = \frac{37{,}95 - 37{,}63}{\sqrt{\dfrac{3 \cdot 0{,}07453 + 3 \cdot 0{,}00583}{3 + 3 - 2}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}\right)}} = 1{,}96.$$

Сравним полученное значение t с табличным значением $t_{0,95;4}$. Так как $|t| < t_{0,95;4}$, то гипотеза H_0 принимается.

5. Гипотеза о равенстве средних значений двух методов проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью t-критерия и принята. Следовательно, результаты обоих методов отражают истинное содержание CuO в минерале.

Ответ: гипотеза H_0 о равенстве средних проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью t-критерия и принята.

Задача 6. Имеются следующие данные об уровне механизации работ X (%) и производительности труда Y (т/чел.) для 14 однотипных предприятий:

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7
x_i	30	32	36	40	41	47	54
y_i	24	20	28	30	31	33	37

№ п/п	8	9	10	11	12	13	14
x_i	55	56	60	61	67	69	76
y_i	40	34	38	41	43	45	48

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$; 2) найти уравнение линейной регрессии Y на X; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

Решение.

1. Для удобства проведем все необходимые предварительные расчеты в таблице.

Таблица 1

Расчетная таблица

№ п/п	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	30	24	900	576	720
2	32	20	1024	400	640
3	36	28	1296	784	1008
4	40	30	1600	900	1200
5	41	31	1681	961	1271
6	47	33	2209	1089	1551
7	54	37	2916	1369	1998
8	55	40	3025	1600	2200
9	56	34	3136	1156	1904
10	60	38	3600	1444	2280
11	61	41	3721	1681	2501
12	67	43	4489	1849	2881
13	69	45	4761	2025	3105
14	76	48	5776	2304	3648
Всего	**724**	**492**	**40134**	**18138**	**26907**

Рассчитаем числовые характеристики выборки, используя итоговую строку расчетной таблицы и учитывая, что объем выборки $n = 14$:

- выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{14} \cdot 724 = 51,71;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{1}{14} \cdot 492 = 35,14;$$

- средние по квадратам:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{1}{14} \cdot 40134 = 2866,71;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2 = \frac{1}{14} \cdot 18138 = 1295,57;$$

- средняя по произведениям:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i = \frac{1}{14}\cdot 26907 = 1921{,}93;$$

- выборочные средние квадратические отклонения:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 2866{,}71 - 51{,}71^2 = 192{,}79;\ \sigma_x = \sqrt{192{,}79} = 13{,}88;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 1295{,}57 - 35{,}14^2 = 60{,}75;\ \sigma_y = \sqrt{60{,}75} = 7{,}79.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле $r = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}$:

$$r = \frac{1921{,}93 - 51{,}71\cdot 35{,}14}{13{,}88\cdot 7{,}79} = 0{,}970.$$

Т.к. $r > 0$ и $r \in (0{,}9;\,0{,}99)$, то, следовательно, линейная связь между изучаемыми признаками является прямой и весьма тесной.

Оценим значимость выборочного коэффициента корреляции. Для этого рассчитаем эмпирическое значение t-критерия по формуле $t_r = |r|\sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$:

$$t_r = 0{,}970\sqrt{\frac{14-2}{1-0{,}970^2}} = 13{,}8.$$

Для уровня значимости $\alpha = 0{,}05$ и числа степеней свободы $k = n - 2 = 14 - 2 = 12$ находим критическое значение t-критерия: $t_{0,95;12} = 2{,}18$ по таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента. Поскольку $t > t_{0,95;48}$, то коэффициент корреляции между признаками X и Y является значимым (или значимо отличается от нуля).

2. Найдем уравнение линейной регрессии Y на X: $y_x = a_0 + a_1 x$, вычислив параметры уравнения регрессии по формулам (23) и (24):

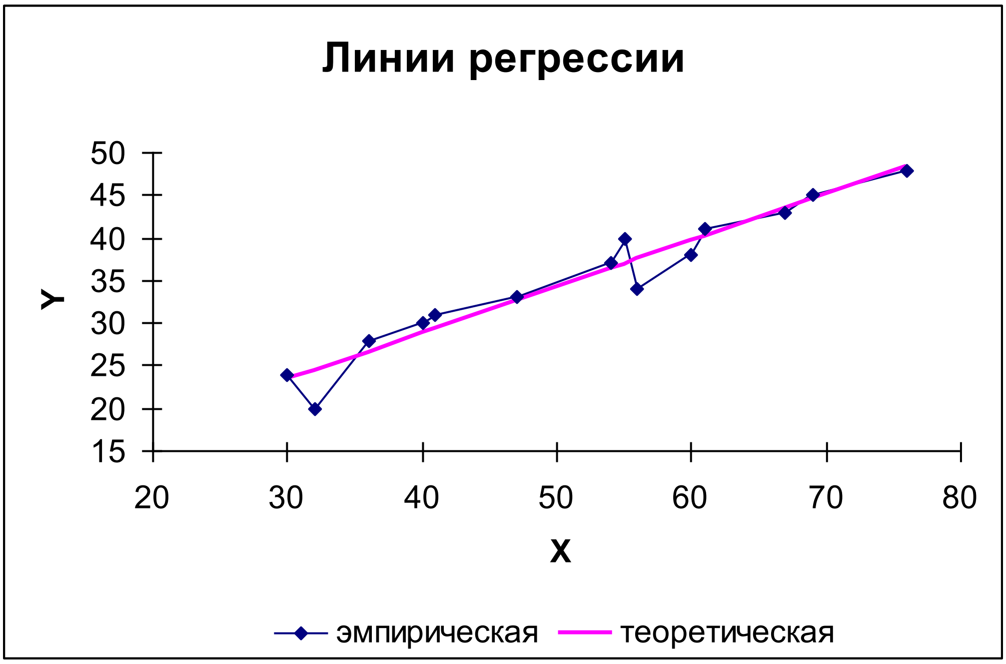
$$a_1 = \frac{1921{,}93 - 51{,}71\cdot 35{,}14}{192{,}79} = 0{,}54;$$

$$a_0 = 35{,}14 - 0{,}54\cdot 51{,}71 = 7{,}22.$$

Следовательно, уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y_x = 0{,}54x + 7{,}22.$$

3) Построим в одной системе координат эмпирическую и теоретическую линии регрессии. Эмпирическая линия – это ломаная, соединяющая точки с координатами (x_i, y_i), а теоретическая – это график прямой регрессии, уравнение которой было получено в п. 2. Теоретическую линию регрессии можно построить по двум точкам, абсциссы которых выбираются произвольно, а ординаты находятся по построенному уравнению регрессии. Найдем координаты точек для построения теоретической линии регрессии: $x_1 = 30$, тогда $y_1 = 0{,}54 \cdot 30 + 7{,}22 = 23{,}42$; $x_2 = 76$, $y_2 = 48{,}26$. Значит, теоретическую линию регрессии будем строить по двум точкам с координатами $(30;48{,}26)$ и $(76;48{,}26)$.



Эмпирическая и теоретическая линии регрессии

<u>Ответ:</u> 1) $r = 0{,}970$, линейная связь прямая, весьма тесная, коэффициент корреляции значим на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$; 2) выборочное уравнение прямой регрессии $y_x = 0{,}54x + 7{,}22$; 3) линии регрессии представлены на рис. 2.