МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)
«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
______________________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины <u>ЕН.01 Математика</u>
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности <u>11.02.03 Эксплуатация оборудования радиосвязи и электрорадионавигации судов</u>
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании

Методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Председатель МК

Е.А. Чекашова

Протокол от 29 мая 2019 г.

Разработано

на основе ФГОС СПО по специальности 11.02.03 Эксплуатация оборудования радиосвязи и электрорадионавигации судов, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 14 мая 2014 г. № 522

Автор (составитель): Гарифуллина Е.А., преподаватель, «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент) Банникова Д.В., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата,

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

А. Содержание

Введение

1.1 Методические указания по самостоятельной работе обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 11.02.03 Эксплуатация оборудования радиосвязи и электрорадионавигации судов базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 14 мая 2014 г. № 522

1.2 Цели и задачи практической (лабораторной) работы - требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

уметь:

У1 решать обыкновенные дифференциальные уравнения;

У2 применять математические методы в профессиональной деятельности;

знать:

З1 - основные понятия и методы математического анализа;

З2 обыкновенные дифференциальные уравнения в частных производных;

З3 последовательности и ряды;

З4 основы теории вероятностей и математической статистики;

З5 основные численные методы решения прикладных задач;

З6 численное интегрирование и дифференцирование.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1).

Таблица 1 - Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6

	профессиональных задач, профессионального и личностного развития	
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 6.	Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 7.	Брать ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6
ПК 1.4.	Пользоваться программным обеспечением микропроцессоров радиооборудования и методами устранения сбоев программного обеспечения	У 1,У2, З1, З2, З3, З4, З5, З6

2. Тематический план видов самостоятельной работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы обучающихся	Самостоятельная работа обучающегося, час	Консультации, час
1	2	3	4
Раздел 1.	**Комплексные числа ……….**	**4**	
Тема 1.1.	**Комплексные числа……….**		
	Самостоятельная работа		
	1. Применение комплексных чисел.	**4**	
Раздел 2.	**Математический анализ.**	**11**	**2**
Тема 2.1.	**Дифференциальное исчисление.…..**		
	Самостоятельная работа		
	1. Решение физических задач с применением производной.	**2**	
Тема 2.2.	**Интегральное исчисление.**		
	Самостоятельная работа		
	1.Вычисление объемов тел вращения с помощью определённого интеграла.	**2**	
Тема 2.3.	**Дифференциальные уравнения**.		
	Самостоятельная работа		
	1. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2. Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.	**4**	
Тема 2.4.	**Ряды**		
	Самостоятельная работа		
	Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике.	**3**	
Раздел 3.	**Основы дискретной математики**	**2**	**2**
Тема 3.1.	**Понятие множества, подмножества, отношений.**	**2**	
	Самостоятельная работа		
	1. Теория графов	**2**	
Раздел 4.	**Основы теории вероятностей и математической статистики.**	**4**	
Тема 4.1.	**Вероятность случайного события. Теоремы сложения и**		

	умножения		
	Самостоятельная работа		
	Формула полной вероятности.	**2**	
Тема 4.2.	**Элементы математической статистики.**		
	Самостоятельная работа		
	1.Условное и полное математическое ожидание. 2. Выполнение расчета всех числовых характеристик случайной величины на конкретном, самостоятельно выбранном примере.	**2**	
Раздел 5.	**Основные численные методы.**	**4**	**2**
Тема 5.2.	**Численное дифференцирование.**		
	Самостоятельная работа		
	1. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	**4**	
	Всего	**23**	**6**

Порядок выполнения самостоятельной работы обучающихся

Раздел 1. Комплексные числа

Тема 1.1. Комплексные числа

Применение комплексных чисел.

Цель: Выяснить практическое применение комплексных чисел.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить предложенный материал по теме «Комплексные числа».
2. Разобрать предложенные задачи на применение комплексных чисел.
3. Решить задачи.

Порядок выполнения задания.

1. На основании предложенного краткого конспекта материала и рекомендованной литературы, изучите теоретические вопросы по данной теме по предложенному плану.
2. Составьте краткий конспект данного материала.
3. Ответьте на вопросы контроля
4. Решите предложенное задание по изученному материалу.

Дано: $u = 340\sin(\omega \cdot t - 62^0)в$, $r = 1{,}6ом$, $x_L = 1{,}2ом$, сопротивление соединены последовательно. Найти ток в цепи.

5. Сделайте общий вывод по изученному материалу.

Вопросы для изучения:

1. Применение комплексных чисел в физике.
1.1. Гармонический сигнал.
1.2. Переменный ток.
1.3. Разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты.
1.4. Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную компоненты
1.5. Задача о равномерном движении точки по окружности**.**

Теоретический материал.

1. Комплексные числа в физике

Решение многих задач физики и техники приводит к квадратным уравнениям с отрицательным дискриминантом. Эти уравнения не имеют решения в области действительных чисел. Но решение многих таких задач имеет вполне определенный физический смысл. Значение величин, получающихся в результате решения указанных уравнений, назвали комплексными числами. Комплексные числа широко использовал Н. Е. Жуковский (1847 – 1921) при разработке теории крыла, автором которой он является. Комплексные числа нашли применение во многих вопросах науки и техники.

1.1 Гармонический сигнал

Гармонический сигнал — это гармонические колебания с течением времени распространяющиеся в пространстве, которые несут в себе информацию или какие-то данные и описываются уравнением: $y = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где A — амплитуда сигнала;

$\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ - фаза гармонического сигнала; t - время; ω - циклическая частота сигнала.

Тем не менее, часто используют комплексную запись сигнала: $y = A\exp[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_0)]$.

Достоинство комплексного метода: при его применении в анализе цепей переменного тока можно применять все известные методы анализа постоянного тока.

1.2. Переменный ток.

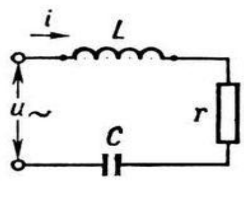
В конце прошлого столетия стали широко применять генераторы переменного тока. Для расчета цепей переменного тока оказались непригодными старые методы, разработанные для цепей постоянного тока и основанные на законе Ома. В 1893 г. американский электротехник Ч. П. Штейнмец предложил эффективный метод расчета цепей переменного тока. Этот метод целиком основан на применении комплексных чисел.

Переменный ток - в широком смысле электрический ток, изменяющийся во времени. Мгновенное значение силы i переменного тока меняется во времени по синусоидальному закону: $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$, где I_m — амплитуда тока, $\omega = 2\pi f$ — его угловая частота, α — начальная фаза. Синусоидальный (гармонический) ток создаётся синусоидальным напряжением той же частоты: $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$, где U_m — амплитуда напряжения, β — начальная фаза

Закон Ома формулируется так: Сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению, приложенному к участку, и обратно пропорциональна характеристике участка, которую называют электрическим сопротивлением этого участка.

Под законом Ома в комплексной форме понимают:Í = Ú / Z

$$\begin{cases} \dot{I} = Ie^{j\varphi_i} \\ \dot{U} = Ue^{j\varphi_i} \end{cases} \Rightarrow \underline{z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = ze^{\pm j\varphi} = z\cos\varphi \pm jz\sin\varphi = r \pm jx.$$



Сопротивление в цепи переменного тока характеризуется не только величиной активного сопротивления r (то, что подразумевается под сопротивлением, когда говорится о цепях постоянного тока), но и индуктивностью L и электрической емкостью C.

Индуктивность - физическая величина, характеризующая магнитные свойства электрической цепи.

Электрическая ёмкость — характеристика проводника, мера его способности накапливать электрический заряд.

Комплексное сопротивление участка цепи представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует величине активного сопротивления, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению.

Активное сопротивление — сопротивление электрической цепи или её участка, обусловленное необратимыми превращениями электрической энергии в другие виды энергии (в тепловую энергию). Реактивное сопротивление - это сопротивление обусловленное передачей энергии электрическому или магнитному полю (и обратно), с учётом поверхностного эффекта (эффект затухания электромагнитных волн по мере их проникновения в глубь проводящей среды). В результате этого эффекта, например, переменный ток высокой частоты, при протекании по проводнику распределяется не равномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое.

Z = R + iX, где Z — импеданс, R — величина активного сопротивления, X — величина реактивного сопротивления, i — мнимая единица.

Импедансом $\hat{z}(j\omega)$ называется отношение комплексной амплитуды напряжения гармонического сигнала, прикладываемого к двухполюснику, к комплексной амплитуде тока, протекающего через двухполюсник. При этом импеданс не должен зависеть от времени.

$$\hat{z}(j\omega) = \frac{\hat{u}(j\omega,t)}{\hat{i}(j\omega,t)} = \frac{U(\omega)e^{j(\omega t+\phi_u(\omega))}}{I(\omega)e^{j(\omega t+\phi_i(\omega))}} = \frac{U(\omega)e^{j\phi_u(\omega)}}{I(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}} = \frac{\hat{U}(j\omega)}{\hat{I}(j\omega)}$$

Здесь:

- j — мнимая единица;
- ω — циклическая частота;
- U(ω), I(ω) — амплитуды напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;
- $\varphi_u(\omega)$, $\varphi_i(\omega)$ — фазы напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;
- $\hat{U}(j\omega)$, $\hat{I}(j\omega)$ — Комплексные амплитуды напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;

Исторически сложилось, что обозначение импеданса, комплексных амплитуд и других комплекснозначных функций частоты записывают как $f(j\omega)$, а не $f(\omega)$. Такое обозначение показывает, что мы имеем дело с комплексными представлениями гармонических функций вида $e^{j\omega t}$. Кроме того, над символом, обозначающим комплексный сигнал или комплексный импеданс, обычно ставят «домик» или точку: $\hat{U}(j\omega)$чтобы отличать от соответствующих действительных величин.

Если рассматривать комплексный импеданс как комплексное число в алгебраической форме, то действительная часть соответствует активному сопротивлению, а мнимая — реактивному. Рассмотрение действительной части полезно при расчёте мощности, выделяемой в двухполюснике, поскольку мощность выделяется только на активном сопротивлении.

Если рассматривать импеданс как комплексное число в тригонометрической форме, то модуль соответствует отношению амплитуд напряжения и тока (сдвиг фаз не учитывается), а аргумент — сдвигу фазы между током и напряжением, то есть, на сколько ток отстаёт от напряжения.

Фаза колебаний — аргумент периодической функции $cos(\omega t + \varphi_0), sin(\omega t + \varphi_0)$ или $e^{i(\omega t+\varphi_0)}$, описывающей гармонический колебательный процесс (ω — угловая частота, t— время, φ_0— начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в начальный момент времени $t = 0$). Фаза обычно выражается в угловых единицах (радианах, градусах) или в циклах (долях периода): 1 цикл = 2π радиан = 360°. Сдвиг фаз — разность начальных фаз переменных величин, изменяющихся по синусоидальному закону с одинаковой частотой. Сдвиг фаз измеряется в градусах, радианах или долях периода. В электротехнике большое практическое значение имеет сдвиг фаз между напряжением и током, определяющий коэффициент мощности в цепях переменного тока.

Комплексные числа также используются в описании процессов плоского течения жидкости, обтекания профилей жидкостью, волновые движения жидкости.

Комплексные числа широко используются в различных областях физики, в особенности в описании волновых и электромагнитных процессов. С помощью комплексных чисел можно рассчитать параметры для сетей не только постоянного, но и переменного тока.

Применение комплексных функций действительного аргумента позволяет компактно изложить ряд вопросов из области кинематики и динамики.

Пусть точка Z перемещается по плоскости. Выбрав прямоугольную систему координат xOy, можем считать, что движение происходит по комплексной плоскости, а точка Z имеет комплексную координату $z = x + iy$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. В каждый момент времени t точка Z будет иметь определенную скорость $\upsilon(t)$, причем ее компоненты равны $x(t)$ и $y(t)$. Следовательно, в каждый момент времени t скорость точки Z характеризуется комплексным числом $x(t)+iy(t)$, которое можно записать так: $z(t)$. Аналогично ускорение w точки Z в каждый момент времени t задается комплексным числом $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Числа $z(t)$ и $z(t)$ будем называть комплексной скоростью и комплексным ускорением точки Z.

Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, электротехнике, гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции (функции, у которых и значениями аргумента, и значениями функции являются комплексные числа) успешно применялись русскими и советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским (1847 — 1921), С. А. Чаплыгиным (1869— 1942), М. В. Келдышем (1911 — 1978) и другими в аэродинамике. Советские математики Г. В. Колосов (1867—1936) и Н. И. Мусхелишвили (1891 — 1976) впервые стали применять комплексные функции в теории упругости (то есть по существу к расчетам различных конструкций на прочность). С применением комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования советских ученых Н. Н. Боголюбова (род. 1909) и В. С. Владимирова (род. 1923).

В 20-х годах нашего столетия стала разрабатываться квантовая механика. Для нее оказался особенно полезным аппарат комплексных чисел. Вот что пишет об этом известный современный физик Е. Вагнер в своем очерке «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»: «Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее, использование комплексных чисел становится почти неизбежным при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую роль в формулировке квантовой теории».

Для навигаторов представляет значительный интерес способ построения географической карты, при котором сохраняются углы между линиями. Такой способ называется конформной (то есть сохраняющей форму) проекцией. Оказывается, что с помощью функций комплексного переменного возможно указать бесконечно много конформных проекций.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем пример. Одна из важных задач, возникшая при подготовке запусков первых искусственных спутников Земли, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием тяготения к «сплюснутому сфероиду» (такую форму имеет земной шар, который несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 42 километра меньше экваториального диаметра). Одним из самых эффективных способов решения этой задачи оказался способ, основанный на применении комплексных чисел. Он был предложен советскими учеными Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребенщиковым и В. Г. Деминым.

1. 3. Разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты

Пусть точка Р (рис. 51) движется в плоскости по какому-либо закону, А — начало отсчета. Требуется найти компоненты скорости: радиальную υ_r (проекцию вектора скорости на ось АР) и трансверсальную (или поперечную) υ_n (проекцию вектора скорости на ось, образующую с осью АР угол $+\pi/2$ радиан).

Решение. Пусть AN — действительная ось *Ax*, <NAP = φ. В каждый момент t точка *P* имеет комплексную координату $z = re^{i\varphi}$ (*г* и φ — функции от t). Скорость точки *P* характеризуется комплексным числом $\frac{dz}{dt}(\dot{z})$. Дифференцируя по обычным правилам произведение $re^{i\varphi}$, получим:

$z = re^{i\varphi} + r\varphi\, i\, e^{i\varphi}$. Отсюда ясно, что $\upsilon_r = r$, $\upsilon_n = r\varphi$.

1.4. Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную компоненты Пусть точка Р движется по некоторой кривой Г так, что скорость точки задается в каждый момент t комплексным числом υ=υ(t) (рис. 52). Понятно, что скорость будет в течение всего движения направлена по касательной т к кривой, чего нельзя сказать об ускорении. Требуется найти проекции ускорения на касательную (w_ι) и на нормаль (w_H) к кривой.

Эта задача аналогична предыдущей. Запишем вектор скорости в комплексной форме: $z = \upsilon e^{i\Psi}$, где υ — абсолютная величина скорости точки *P*, а Ψ— угол между осью Ох и касательной (Ψ) к кривой Г. Дифференцируя по переменному t, получим: $w = \dot{z} = \upsilon\, e^{i\Psi} + \upsilon\Psi i e^{i\Psi}$.

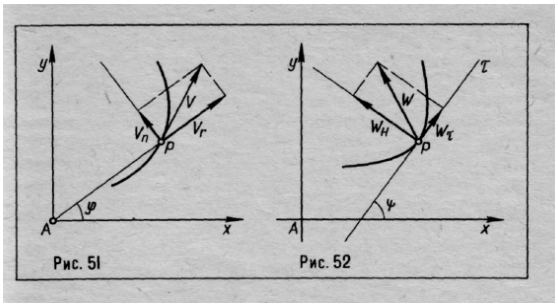
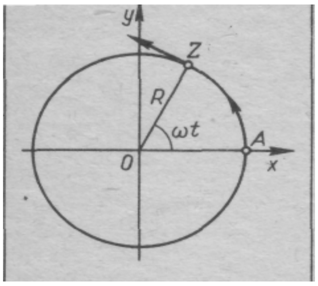


Рис. 51 Рис. 52

Отсюда ясно, что проекция w_ι вектора ускорения w на касательную ось т равна υ, а проекция w_h того же вектора w на ось, получающуюся из оси т поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан, равна $\upsilon\Psi$: $W_r = \upsilon$, $W_H = \upsilon\psi$.

1.5. Задача о равномерном движении точки по окружности.



Пусть точка Z движется по некой окружности$|z|=R$ в положительном направлении с постоянной скоростью (по абсолютной величине) линейной скоростью υ. Какое ускорение имеет эта точка? (рис. 2)

Решение. Пусть точка Z в момент $t=0$ находиться в точке A.

Угловая скорость точки Z равна ω.

Тогда $\upsilon = R\omega$. Точка Z имеет комплексную координату $z = Re^{i\omega t}$, комплексную скорость $\check{z}=R\omega i e^{ti\omega}$ комплексное ускорение $\dot{z} = R\omega^2 e^{i\omega t} = \frac{v^2}{R^2} e^{it\omega} = \frac{v^2}{R}(-e^{i\omega t})$. Отсюда видно, что $|\check{z}|=\frac{v^2}{R}$, а направление ускорения характеризуется ортом (вектором единичной длины), имеющим комплексную координату. А это значит, что точка Z движется с ускорением, которое в каждый момент времени t направлено к центру окружности (см. приложение).

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Поясните, как изображается и записывается гармонический сигнал при помощи комплексных чисел.
2. Поясните на примерах, как применяются комплексные числа для переменного тока.
3. Расскажите, как разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты использует комплексные числа.
4. Поясните, как в задаче о равномерном движении точки по окружности используются комплексные числа**.**

Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.

Дополнительная литература:

1. Большая Советская Энциклопедия
2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии, М. Физматгиз, 1963
3. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел, М. Просвещение, 1975

4. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения, изд-во ЛГУ, 1986
5. Роджерс Э. Физика для любознательных, М., 1971
6. Балк, М.В. Реальные применения мнимых чисел / М.В. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин.- Киев: Радянськая школа, 1988.
7. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного / В.Д. Морозова.- М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
8. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов.- М.: Гос. из-во техн.-теор. лит., 1954.
9. Туманов, С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования / С.И. Туманов.- М.: Просвещение, 1970.
10. Цыркин, М.Я. Краткий курс теории функций комплексного переменного / М.Я. Цыркин.- М.: Просвещение, 1964.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1. Дифференциальное исчисление

Решение физических задач с применением производной

Цель: Научиться решать задачи физического содержания с применением производной

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. Необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме [1].стр. 167
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решите предложенные задачи:

1. Тело движется вертикально вверх по закону: $S = 40t - \frac{gt^2}{2}$ (путь в метрах, время – в секундах, ускорение свободного падения, принять 10 м/с^2). Найти максимальную высоту подъема данного тела.

2. Докажите, что величина ускорения гармонического колебания $x = 5\sin(2t+1)$ пропорциональна отклонению x от положения равновесия. Найдите коэффициент пропорциональности

3. Найти модуль силы, действующей на тело массой 300г, в момент времени 1 с, если тело движется прямолинейно и его скорость изменяется по закону $v = \frac{1}{1+t}$, где v – скорость, м/с, t – время в с.

4. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных резисторов. При каком соотношении между сопротивлениями этих резисторов сопротивление цепи минимально, если при последовательном соединении оно равно R Ом?

5. Судно В, находящееся в данный момент на расстоянии 75 км к востоку от судна А, идет на запад со скоростью 12 км в час; судно же А идет на юг со скоростью 4 км в час. Через сколько часов суда будут наиболее близки к друг другу?

Вопросы для изучения:

1. Сформулировать утверждения, полученные Ньютоном И., относительно первой и второй производных.
2. Разобрать предложенные задачи.
3. Решить задачи на данную тему.

Теоретический материал.

1. Скорость и ускорение.

В основе задач, которые решаются в физике с помощью производных (первой и второй), лежат следующие утверждения одного из создателей дифференциального исчисления И.Ньютона.

1. Находя первую производную от функции, мы решаем очень важную физическую задачу, а именно: определяем быстроту изменения функции, т.е. собственно, скорость. Таким образом, по Ньютону: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть скорость функции.

Применительно к движению, если $S = f(t)$ или $x = f(t)$ - закон движения тела (точки), который позволяет найти положение тела (точки) или пройденный ими путь для любого момента времени, то их скорость:.

2. Находя вторую производную от функции, мы определяем быстроту изменения её скорости, т.е. ускорение функции. $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V' = \frac{dS}{dt}$ (1)

Применительно к движению, если известен закон движения тела , то $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = V' = \frac{dv}{dt}$,

где a – ускорение точки (тела) с учетом (1) имеем: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = S'' = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

Итак, по Ньютону: если $S = f(t)$ - закон движения тела, то его скорость (скорость для любого момента времени) $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = V' = \frac{dS}{dt}$, $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = S'' = \frac{d^2 s}{dt^2}$.

По существу, Ньютон ответил на вопросы, которые стояли перед механиками два тысячелетия – как рассчитывать скорость и ускорение движущихся тел в любой момент времени. Эти скорость и ускорение называются мгновенными.

2. Рассмотрите задачи.

№ 1. Угол φ поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\varphi = \left(2t^2 + 3t + 1\right)$рад. Найти угловую скорость ω при $t = 4$с.

Решение: Если $\varphi = (t + \Delta t) - \varphi(t)$- угол поворота шкива за промежуток времени, средняя угловая скорость равна: $\varphi' = \left(2t^2 + 3t + 1\right)' = 4t + 3$, то $\varphi'(4) = 4 \cdot 4 + 3 = 19$ (рад/с).

№ 2. Тело массой 10 кг движется по закону: $S = \frac{t^3}{3} - 6t$ (путь в метрах, время в секундах). Найти силу, действующую на тело, и его кинетическую энергию через 3 с от начала движения.

Решение: 1) Найдем кинетическую энергию данного тела для любого момента времени: $E_k = \frac{mv^2}{2}$.Но $V = S' = \left(\frac{t^3}{3} - 6t\right)' = t^2 - 6$. Т.о., $E_k = \frac{m\left(t^2 - 6\right)^2}{2} = \frac{10 \cdot \left(3^2 - 6\right)^2}{2} = 45$ (Дж);

2) Силу, действующую на тело в момент времени t, найдем по формуле $F = m \cdot a$, где $a = V' = \left(t^2 - 6\right)' = 2t$. Т.о., $F = m \cdot 2t$. Значение силы для момента времени 3с будет равна: $F = m \cdot 2t = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$ (Н).

№ 3. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}$, где x есть отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение: В данном случае нам не требуется составлять функцию, которую надлежит исследовать на экстремум. Она задана. Исследуем её на интервале (0; +∞)

$f' = \left(x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}\right)' = -x\left(2\ln x + 1\right)$. Корнем производной, принадлежащей заданному интервалу, является $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{\frac{-1}{2}}$. Если мы проследим поведение производной при переходе через данную точку, то увидим, что она меняет знак с плюса на минус. Значит в этой точке функция принимает максимум. Значит, искомое отношение должно быть равно $e^{\frac{-1}{2}}$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте: в чем заключается физический смысл производной?
2. Решите задачу: Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы источников относятся, как 27 : 8.

Рекомендуемая литература.

Основная:

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.1.Изд.2, испр.- М.: ЛЕНАНД, 2015. – 368 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 416 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2010
2. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть I, М. «Наука», 1978
3. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть П, М «Наука», 1978. Шипачёв В.С. Начала высшей математики: Учебное пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2004.
4. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.-576
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
6. 4. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.

Тема 2.2. Интегральное исчисление.

Вычисление объемов тел вращения с помощью определённого интеграла

Цель: познакомиться с формулами нахождения объемов тел вращения относительно оси ОХ; научиться применять определенный интеграл для решения задач.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу: Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла. [1] гл. с.68
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решите предложенные задачи:

1) Из всех цилиндров, вписанных в шар радиусом R, найдите тот у которого объем наибольший.

2) Из бумажного круга радиуса R вырезан сектор и из оставшейся части круга склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольший? Найдите радиус основания и высоту воронки.

3) Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения Ox. $y = -1 + x^2$, $y = 0$.

4) Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения Ox. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.

Вопросы для изучения:

1. Объемы фигур вращения. Общие формулы.
2. Исследования на экстремум в задачах на объемы фигур вращения.
3. Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла.
4. Разобрать предложенные задачи.

Вычисление объёмов тел вращения.

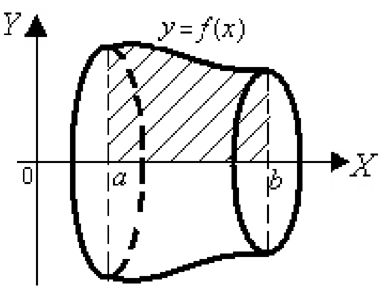
Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Оx, может быть выражена как функция от x, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Оx плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле: $V = \int_a^b S(x)dx$.

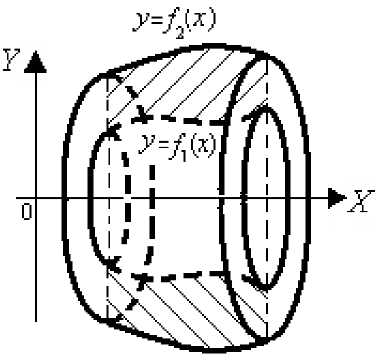
Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Оx, то объем тела вращения вычисляется: $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и непрерывной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси OX. Объем полученного при этом тела вращения (рис. 1) вычисляется по формуле: $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Если криволинейная трапеция ограничена линиями $x = a$, $x = b$,
$y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a; b]$, то объем полученного при ее вращении вокруг OX тела (рис. 2) можно вычислить по формуле:

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi\int_a^b f_2^2(x)dx - \pi\int_a^b f_1^2(x)dx = \pi\int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx.$$





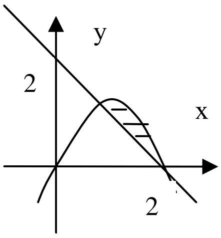
Пример: Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ и прямой $y = 2x$ и $x \in [0;2]$.

Решение: $V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}\pi$.

Ответ: $1\frac{1}{3}\pi$ (куб.ед.)

Пример: Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения

Ox . $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.



$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

$$V = \pi \int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi \left(\frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4 \right) = \frac{\pi}{30}.$$

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите формулы для нахождения объемов тел вращения относительно оси ОХ.
2. Запишите формулы для нахождения объема тел вращения относительно оси ОУ.

Рекомендуемая литература.

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.2. Изд.стереотип, М.: ЛЕНАНД, 2015. – 416 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
3. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.

Дополнительная:

4. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009

Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.
Дифференциальные уравнения в частных производных.
Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.

Цель: познакомиться с дифференциальными уравнениями в частных производных, научиться решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных применительно разделов науки.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. [1] гл. 10 с. 198. , [3] стр.351.
2. Частные производные функции нескольких переменных. [1] гл. 10 с. 205. [3] стр.353.
3. Полный дифференциал. [1] гл. 10 с. 209 [3] стр.355.
4. Частные производные высших порядков. [1] гл. 10 с. 219, 222, [3] стр.357.
5. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. [1] гл. 12 с. 376 [4] стр.186 - 194.
6. Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение частных производных.
2. Поясните, что такое частный дифференциал функции? Полный дифференциал?

Рекомендуемая литература.

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.2. Изд.стереотип, М.: ЛЕНАНД, 2015. – 416 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
3. Е.В. Филимонова. Математика. Р.-на-Д. «Феникс».2008 г.

4. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Каплан И.А. Пустынников В.И. Практикум по высшей математики в двух томах, Т.1.: учебное пособие/И.А. Каплан, В.И. Пустынников: под общей ред. проф. В.И. Пустынникова. 6 изд., испр. и доп.. – М. Эксмо. 2006. – 576с.

Тема 2.4. Ряды.

Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике

Цель: научиться раскладывать тригонометрический ряд в ряд Фурье на различных интервалах, раскладывать в ряд Фурье функции, часто используемые в электротехнике.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить задачи на данную тему

Вопросы для изучения:

1. Прочитайте [1] Глава 28 §1Тригонометрический ряд Фурье: понятие гармоника, понятие тригонометрического ряда Фурье, Теорема Дирихле.
2. Составьте краткий конспект данного материала.
3. Прочитайте [1] Глава 28 §2 Ряд Фурье для нечетной функции.
4. Составьте краткий конспект данного материала.
5. Прочитайте [1] Глава 28 §3 Ряд Фурье для четной функции.
6. Составьте краткий конспект данного материала.
7. Прочитайте [1] Глава 28 §4 Разложение в Ряд Фурье функции, заданной в промежутке $0 \leq x \leq 2\pi$.
8. Составьте краткий конспект данного материала.

9. Прочитайте [1] Глава 28 §5 Разложение в Ряд Фурье функции, заданной в произвольном промежутке

10. Составьте краткий конспект данного материала.

11. Прочитайте [1] Глава 28 §6 Разложение в Ряд Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике.

12. Решите предложенные задачи.

1. Разложить в ряд Фурье на $(0;2\pi)$ функцию: $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$;

2. Разложить в ряд Фурье периодическую $(T=2\pi)$ функцию $f(x)$, определенную на $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ равенствами $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}.\end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье на $(-\pi,\pi)$ $f(x)=x\cos x$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите формулы для разложения в ряд Фурье функции на промежутке $0 \le x \le 2\pi$.
2. Расскажите в чем отличие разложения в ряд Фурье функции четной от нечетной?
3. Проанализируйте, как отличается тригонометрический ряд, в зависимости от промежутка разложения.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2014г.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное Фобразование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
3. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010 г.

Дополнительная литература

1. Е.В. Филимонова. Математика для средних специальных учебных заведений. Р.-на-Дону. «Феникс». 2008 г.

2. В.С. Михеев, О.В. Стяжкина, О.М. Шведова, Г.П. Юрлова. Ростов-на-Дону, «Феникс»,2009г.
3. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
4. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.

Тема 3.1. Понятие множества, подмножества, отношений. Теория графов.

Цель: познакомиться с понятиями теории графов.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить основные понятия теории графов, свойства и виды графов.
2. Решить предложенные задачи.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить задачу:

В обеденный перерыв члены строительной бригады разговорились о том, кто, сколько газет читает. Выяснилось, что каждый выписывает и читает две и только две газеты, каждую газету читает пять человек, и любая комбинация читается одним человеком. Сколько различных газет выписывают члены бригады? Сколько человек в бригаде?

Вопросы для изучения:

1. Определение графа. Его элементы. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
2. Виды графов: орграф, неограф, мультиграф, псевдограф. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
3. Способы задания графов [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
4. Связность. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
5. Маршруты, пути, цепи и циклы [1] Глава 1 §1 п. 1.2.2. стр.34.
6. Планарность [1] Глава 1 §1 п. 1.2.4. стр.44.
7. Деревья и лес [1] Глава 1 §1 п. 1.2.3. стр.41.
8. Обзор задач теории графов:
   - Задача о кратчайшей цепи;

— Задача о максимальном потоке;

— Задача об упаковках и покрытиях;

— Раскраска графа;

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Перечислите способы задания графа.
2. Перечислите основные элементы графа.
3. Изобразите связный граф. Назовите элементы.
4. Дайте определение понятиям: маршруты, пути, цепи и циклы, деревья.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная литература

1. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
2. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.
3. Е.П. Липатов. Теория графов и её применение. – М., Знание, 1986, 32с.
4. В.П. Сигорский. Математический аппарат инженера. – К., «Техника», 1975, 768с.
5. О.Оре «Графы и их применение», М. Мир, 1965.

Тема 4.1. Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения Формула полной вероятности

Цель: познакомиться с формулой полной вероятности; научиться применять её для решения задач на вероятность.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить формулу полной вероятности.
2. Решить предложенные задачи.

1) На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный?

2)Вероятность того, что в летнюю сессию студент сдаст первый экзамен, равна 0,8; второй – 0,9, третий – 0,8. Найдите вероятность того, что он сдаст только первый экзамен.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить задачи:

Вопросы для изучения:

1. Понятие полной группы событий, гипотеза. [3] §2.11 стр. 227.
2. Формула полной вероятности. Формула Байеса. [2] Глава 4, п. 4.1.6. стр. 300
3. Задача о телевизионном шоу. [3] §2.11 стр. 229.
4. Решить задачи.

Вопросы для самоконтроля.

1. Приведите пример n попарно несовместных событий, объединение которых есть достоверное событие, если $n = 3$.
2. Запишите формулу полной вероятности и прокомментируйте её.
3. Когда события образуют полную группу?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.
3. Я.С. Бродский, Статистика. Вероятность. Комбинаторика., М. ОНИКС. Мир и образование, 2008, с. 541.

Дополнительная:

1. Кремер. Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573с.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
3. Письменный Д.Т. Конспект по теории вероятностей и математической статистики/Д.Т. Письменный. - .2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – (Высшее образование)

Тема 4.2. Элементы математической статистики.
Условное и полное математическое ожидание
Выполнение расчета всех числовых характеристик случайной величины на конкретном, самостоятельно выбранном примере.

Цель: познакомиться с понятиями: условное и полное математическое ожидание; самостоятельно выполнить расчет на данные характеристики случайной величины на любой задаче.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить понятия случайной величины, её характеристик.
2. Составить и решить задачу.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Составить и решить задачу.

Вопросы для изучения:

1. Случайная величина, закон её распределения. [3] Глава 4, §4.1. стр. 303.
2. Математическое ожидание случайной величины. [3] Глава 4, §4.2. стр. 315.
3. Свойства математического ожидания. [3] Глава 4, §4.3. стр. 323.
4. Формула Бернулли. [3] Глава 4, §4.4. стр. 331.
5. Дисперсия случайной величины. [3] Глава 4, §4.5. стр. 344.
6. Независимые случайные величины. [3] Глава 4, §4.6. стр. 355.
7. Числовые характеристики биноминального распределения. [3] Глава 4, §4.7. стр. 366.
8. Неравенство Чебышева. [3] Глава 4, §4.8. стр. 370.
9. Закон больших чисел. [3] Глава 4, §4.9. стр. 377.
10. Нормальное распределение. [3] Глава 4, §4.10. стр. 383.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Как измениться дисперсия случайной величины, если все её значения умножить на одно и то же число?
2. Как изменится среднее квадратичное отклонение случайной величины, если все её значения умножить на одно и то же число?
3. Имеет ли содержательный смысл правило «одной сигмы»?
4. Какие из следующих случайных величин являются дискретными, а какие - непрерывными:

А) число попыток, которые нужно сделать, чтобы запустить двигатель;

Б) число аварий на перекрестке;

В) дальность полета снаряда;

Д) диаметр валика, изготовленного на станке;

Г) число людей, обратившихся в фирму по объявлению о наличии вакансии?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Я.С. Бродский, Статистика. Вероятность. Комбинаторика., М. ОНИКС. Мир и образование, 2008, с. 541
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

1. Кремер. Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573с.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
3. Письменный Д.Т. Конспект по теории вероятностей и математической статистики/Д.Т. Письменный. - .2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – (Высшее образование)

Тема 5.2. Численное дифференцирование.

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: познакомиться с формулой Эйлера для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить способ Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Порядок выполнения задания.

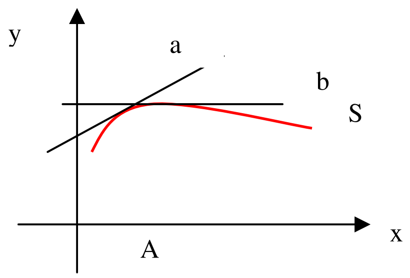
1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Теория

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



1. Основные понятия.

Линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная *y'* является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки A можно наглядно изобразить поле направлений кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется полем направлений.

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

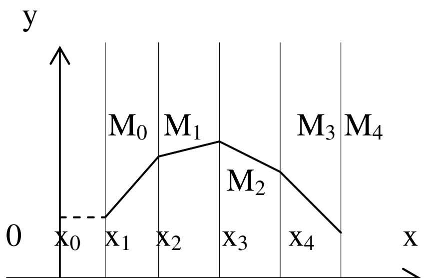
В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Рассмотрим Метод Эйлера.(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0)$.

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

Производя аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется ломаной Эйлера.

Можно записать общую формулу вычислений: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1})$.

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый уточненный метод Эйлера или формула пересчета.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение: $y_1^{(1)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье: $y_1^{(3)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h;$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений *y*.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Пример. Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{matrix}\right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1;$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1; \qquad C = 2;$

Частное решение: $y = 2e^x - x - 1;$ Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i		
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Точное значение
0	0	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1103

2	0,2	1,22	1,243	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7975

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Проанализируйте, как отличается точное значение при решении дифференциального уравнения, от значения, получаемого методом Эйлера.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 416 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.
4. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.
5. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010 г.
6. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
7. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.