

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информационных
систем и программного обеспечения

Методические указания
к выполнению контрольной работы по темам
«Элементы линейной алгебры.
Функции. Дифференциальное исчисление
функций одной переменной»
для обучающихся заочной формы обучения направлений подготовки
естественно-технологического института

Мурманск
2020 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	3
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ».....	5
СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ».....	7
СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ».....	12
СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ».....	24
ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	32
ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	44
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	51

ВВЕДЕНИЕ

Основной формой работы обучающихся заочно является самостоятельная изучение учебного материала: чтение учебников, решение типовых задач с проверкой правильности решения, выполнение контрольных работ.

В настоящем пособии содержатся список рекомендуемой литературы, методические указания к изучению теоретического материала и рекомендации по выполнению контрольной работы по темам «Элементы линейной алгебры. Функции. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

В результате изучения этих тем обучающиеся должны:

- ознакомиться с основами линейной алгебры (действия над матрицами, вычисление определителей), научиться решать системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера и при помощи обратной матрицы;
- владеть понятиями функции, сложной и обратной функций, знать свойства основных элементарных функций, уметь определять их основные характеристики по графикам функций;
- знать определения предела функции и предела последовательности;
- уметь вычислять пределы, раскрывать неопределенности и анализировать полученный результат с точки зрения определения предела;
- уметь исследовать функции на непрерывность, определять точки разрыва функции и устанавливать тип разрыва;
- владеть основными понятиями дифференциального исчисления (производная и ее геометрический смысл, дифференциал), уметь находить производные функций, заданных явно, неявно или параметрически;
- иметь навыки решения основных задач с использованием производных: геометрические задачи на касательную и нормаль и пр.;

- знать приемы исследования функций с помощью производной.

Предлагаемое пособие включает варианты контрольной работы для обучающихся заочной формы обучения, а также справочный материал, необходимый для выполнения работы. Кроме того, в пособии содержится решение примерного варианта контрольной работы, в котором имеются ссылки на используемый справочный материал.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

В таблице 1 приведены наименования тем в соответствии с содержанием контрольной работы и ссылки на литературу по этим темам. Перед выполнением контрольной работы рекомендуется изучить соответствующий теоретический материал и решить указанные в таблице задачи.

Таблица 1.

Содержание (темы)	Литература
Матрицы. Операции над матрицами	[1], гл.I, §1; [2], гл.10, § 1; [3], ч.1, гл.IV, № 399-403, 414, 415
Определители. Обратная матрица. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы	[1], гл.I, § 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.3; [2], гл.10, § 2-4; [3], ч.1, гл.I, № 210, 211, 217, 219, 225-227; [4], гл.7, № 20-25, 38-43
Основные элементарные функции, их графики и основные характеристики. Сложные функции. Обратные функции	[1], гл. V, § 14; [2], гл. 4, § 1, 11, 12.1; [3], гл. VI, № 610–637; [4], гл. 4, № 15–38, 43–60, 62–71, 73–108,151, 153
Предел числовой последовательности и функции непрерывного аргумента. Вычисление пределов, раскрытие основных видов неопределенностей. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции	[1], гл. V, § 15–18; [2], гл. 4, § 2–6; [3], гл. VI, № 638–690, 692, 693, 700, 707, 714–719; [4], гл. 2, № 21–24, 26–28, 63–68, гл. 4, № 228–246, 285, 289, 346–351, 355, 358–359
Определение непрерывности функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции и их классификация. Исследование функции на непрерывность	[1], гл. V, § 19; [2], гл. 4, § 7–9; [3], гл. VI, № 723–735

<p>Определение производной. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производные сложных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков</p>	<p>[1], гл. V, § 20, 21, 23.1; [2], гл. 5, § 1, 4, 5, 7–9, 10.1, 11; [3], гл. VII, № 771–811, 900–907, 909–912, 950, 951, 964, 965, 969; [4], гл. 5, № 14–44, 162–167, 206–211</p>
<p>Уравнения касательной и нормали к плоской кривой</p>	<p>[1], гл. V, § 20.2; [2], гл. 5, § 1.2; [3], гл. VII, № 917–921, 923–930; [4], гл. 5, № 139–144</p>
<p>Вычисление пределов при помощи правила Лопитала</p>	<p>[1], гл. V, § 25.2; [2], гл. 6, § 1, 2; [3], гл. VII, № 1024–1028, 1030–1040; [4], гл. 5, № 225–240, 258–264</p>
<p>Монотонность и экстремумы функций. Выпуклость графика функции, точки перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты. Полное исследование функции и построение ее графика</p>	<p>[1], гл. V, § 25.3–25.8; [2], гл. 6, § 4; [3], гл. VII, № 1055–1058, 1061–1064, 1083–1084, 1091–1094, 1102–1109; [4], гл. 5, № 282, 293, 296, 297–300, 315–324, 334, 339, 342, 344–347</p>

Примечание. Ссылки на литературу в таблице даны в соответствии с номерами в списке рекомендуемой литературы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из $m \cdot n$ элементов (m строк и n столбцов):

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ где } a_{ij} - \text{элементы матрицы,}$$

$i = 1, 2, \dots, m$ – номер строки, $j = 1, 2, \dots, n$ – номер столбца.

Для краткости матрицу обозначают одной буквой, например, буквой A .

Некоторые виды матриц:

1) *нулевая матрица*: матрица, все элементы которой равны нулю;

2) при $n = 1$ *матрица-столбец*: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix};$

3) при $m = 1$ *матрица-строка*: $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n);$

4) при $m = n$ *квадратная матрица*: $A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$

У квадратной матрицы различают главную диагональ (соединяющую элементы a_{11} и a_{nn}) и побочную диагональ.

Примеры квадратных матриц:

1) *единичная матрица* (квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

2) квадратная матрица второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

3) квадратная матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковые размерности и их соответствующие элементы равны:

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

2. Линейные операции над матрицами

Умножение матрицы A на число k :

$$B = k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix},$$

или, в краткой записи:

$$B = k \cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Сложение (вычитание) матриц A и B одинаковой размерности:

$$C_{m \times n} = A_{m \times n} \pm B_{m \times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Произведение матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$:

$$C_{m \times k} = A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k). \quad (3)$$

Формулу (23) легко запомнить, как правило умножения «строка на столбец»: произведение матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ есть матрица $C_{m \times k}$, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i -й строки матрицы A и j -го столбца матрицы B .

Замечание. Перемножать можно только *соответственные* матрицы A и B , т.е. число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B .

Если задан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение

$$a_0A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где A – квадратная матрица, $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}$ и E – единичная матрица той же размерности, что и A . Значением матричного многочлена является матрица.

3. Определители

Определитель второго порядка (определитель квадратной матрицы второго порядка):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4)$$

Определитель третьего порядка (определитель квадратной матрицы третьего порядка):

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (5)$$

Для краткости определитель обозначают: $|A|$ или Δ .

Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получается из исходного путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца (обозначается M_{ij}).

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (обозначается A_{ij}) называется число:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \quad (6)$$

Определитель третьего порядка можно вычислить, используя его разложение по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

или, в краткой записи:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

т.е. определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Аналогично можно записать разложение определителя по любой другой строке или столбцу.

4. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными методом Крамера

Пусть дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \quad (8)$$

(коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_j для $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ считаются заданными).

Тройка чисел x_1^0, x_2^0, x_3^0 называется *решением системы* (8), если в результате подстановки этих чисел вместо x_1, x_2, x_3 все три уравнения системы обращаются в тождества.

Систему (8) можно переписать в *матричном виде*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad AX = B,$$

где A – это матрица коэффициентов при неизвестных, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Составим определитель матрицы A и три вспомогательных определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Определитель Δ называется *главным определителем системы* (8). *Вспомогательные определители* Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 получаются из Δ заменой элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

Если определитель $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы (8) и оно выражается формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (10)$$

Формулы (10) называются *формулами Крамера*.

5. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений при помощи обратной матрицы

Присоединенной (союзной) матрицей к квадратной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ называется матрица}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы A .

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A , если выполнено условие: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и A .

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда квадратная матрица A – *невырожденная*, т.е. $\det A \neq 0$.

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , необходимо:

- а) проверить невырожденность матрицы A , вычислив определитель $\det A$;
- б) найти союзную матрицу A^* к матрице A ;

в) найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* . \quad (12)$$

Если систему линейных алгебраических уравнений (8) переписать в матричном виде $AX = B$, то ее решение можно получить матричным способом, т.е. при помощи обратной матрицы:

$$X = A^{-1} \cdot B , \quad (13)$$

где A^{-1} – обратная матрица для данной матрицы A .

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ»

1. Функции и их свойства

Переменной называют величину $x \in X$, принимающую значения из некоторого множества значений X .

Если каждому значению переменной x из множества X поставлено в соответствие по определенному правилу f единственное значение переменной y из множества Y , то говорят, что задана *функция* $y = f(x)$, определенная на множестве X с множеством значений Y . При этом используют следующие названия:

- x — аргумент (независимая переменная);
- y – значение функции (зависимая переменная);
- X – область определения функции (ООФ);
- Y – множество значений функции (ОЗФ).

Функция $y = f(x)$, область определения X которой симметрична относительно начала координат, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$.

Примеры. $y = \cos x$ – четная функция, $y = x^3$ – нечетная функция, $y = \sqrt{x}$ – функция общего вида (ни четная, ни нечетная).

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T , такое, что $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Примеры. $y = \operatorname{tg} x$ – периодическая функция, наименьший период $T = \pi$, $y = \ln x$ – непериодическая функция.

Значение функции $y = f(x)$ – переменная величина, поэтому можно рассмотреть новую функцию с аргументом y : $z = g(y)$, где $z \in Z$, т. е. функцию $z = g(f(x))$. Такая функция называется *сложной* функцией от x , или *суперпозицией* функций f и g .

Пример. $z = \operatorname{tg}(x^2 + 3x - 1)$ – суперпозиция функций $z = \operatorname{tgy}$ и $y = x^2 + 3x - 1$.

Если $\forall y \in Y$ ставится в соответствие единственное значение $x \in X$, такое, что $y = f(x)$, то говорят, что задана функция $x = f^{-1}(y)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными функциями*. Если у обратной функции $x = f^{-1}(y)$ обозначить аргумент буквой x , а функцию – буквой y , то графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно прямой $y = x$.

Пример. $y = \lg x$ и $y = 10^x$ – взаимно обратные функции.

Все функции, задаваемые аналитическим способом, можно разбить на два класса: *элементарные* и *неэлементарные*. В классе элементарных функций выделяют *основные элементарные функции*: степенная ($y = x^n$), показательные ($y = a^x$), тригонометрические ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$), а также обратные к ним (логарифмические, обратные тригонометрические и др.). Элементарными называют функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, а также суперпозиции основных элементарных функций. Все остальные функции относятся к неэлементарным.

Примеры. $y = \lg(\cos x)$ – элементарная функция, т.к. является суперпозицией

основных элементарных функций $y = \lg x$ и $y = \cos x$; $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ –

неэлементарная функция.

Нулями функции $y = f(x)$ называют точки x , в которых выполнено равенство $f(x) = 0$. Нули функции – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox .

Пример. У функции $y = \lg(x)$ единственный нуль – точка $x = 1$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на интервале

$x \in (a; b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то есть если любому большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* на интервале $x \in (a; b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* функции.

Если функция $y = f(x)$ монотонна на интервале $x \in (a; b)$, то она имеет обратную функцию $y = f^{-1}(x)$.

Пример. Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонна на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ее ОЗФ: $y \in (-\infty; \infty)$. Она имеет обратную функцию $y = \operatorname{arctg} x$, определенную на интервале $x \in (-\infty; \infty)$, с ОЗФ: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая двухсторонняя окрестность точки x_0 , что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. При этом число $f(x_0)$ называется *максимумом* функции $f(x)$ и обозначается y_{\max} .

Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума*, а число $f(x_0)$ – *минимумом* функции $f(x)$ и обозначается y_{\min} .

Точки максимумов и минимумов называются *точками экстремумов* функции, а числа y_{\max} и y_{\min} называются *экстремумами* функции.

Пример. Функция $y = \cos x$ имеет точки максимумов $x = 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $y_{\max} = y(2\pi k) = 1$, и точки минимумов $x = \pi + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $y_{\min} = y(\pi + 2\pi k) = -1$.

2. Предел функции. Предел последовательности

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, где a – конечная или бесконечно удаленная точка на числовой прямой Ox .

Число A называется *конечным пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$ (или при $x \rightarrow a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым бы оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x , принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Определение конечного предела при $x \rightarrow a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists U(a) / |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in U(a), x \neq a. \quad (*)$$

Геометрически существование конечного предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в случае, когда $a \in (-\infty; \infty)$, означает, что значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A , если значения аргумента становятся достаточно близкими к точке $x = a$ (рис. 1). При этом в самой точке a функция может быть не определена или определена, но может иметь значение, отличное от A .

Поведение функции только слева или только справа от точки $x = a$, т.е. в ее левой или правой окрестности, характеризуется ее *односторонними пределами* (рис. 2): *левосторонний предел* функции обозначается $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, где условие $x \rightarrow a-0$ означает, что x остается левее точки a ($x \rightarrow a, x < a$); *правосторонний предел* функции обозначается $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = B$, где условие $x \rightarrow a+0$ означает, что x остается правее точки a ($x \rightarrow a, x > a$).

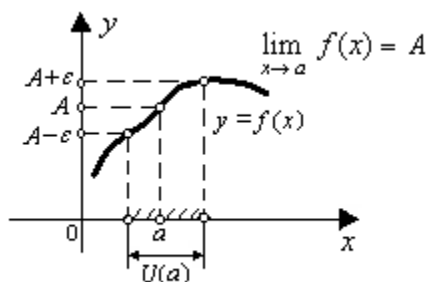


Рис. 1.

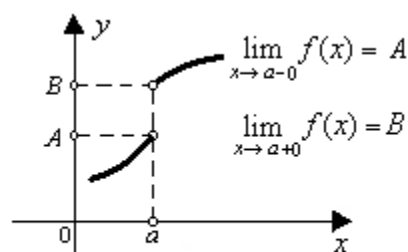


Рис. 2.

Существование предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ означает, что существуют оба односторонних предела и они совпадают между собой:

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A.$$

Если существует конечный предел функции при $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, то в его определении (*) $U(a)$ – это окрестность бесконечно удаленной точки числовой прямой (рис. 3). При этом можно рассматривать односторонние пределы: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (рис. 4).

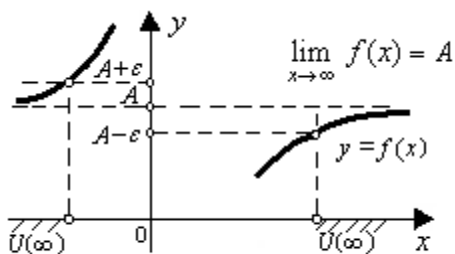


Рис. 3.

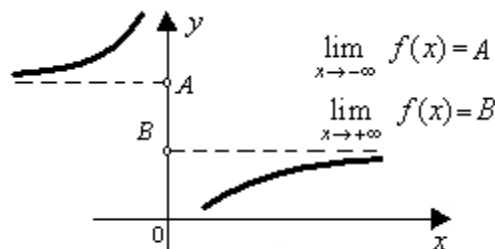


Рис. 4.

Числовую последовательность $\{u_n\}$ обычно рассматривают как функцию натурального аргумента n : $u_n = f(n)$, $\forall n \in N$.

Если существует предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A$, то его определение можно записать символически:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) / |u_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > n_0,$$

т.е. члены последовательности $\{u_n\}$ сколь угодно мало отличаются от числа A при достаточно больших номерах n (для $n > n_0$).

3. Бесконечно малые, бесконечно большие и локально ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (рис. 5, 6).

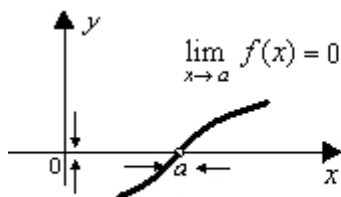


Рис. 5.

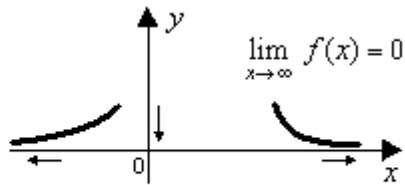


Рис. 6.

Две бесконечно малые при $x \rightarrow a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Основные соотношения эквивалентностей:

$$\sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$\arcsin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (16)$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (17)$$

$$\ln(1+x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (18)$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \text{ при } x \rightarrow 0, \quad (19)$$

$$e^x - 1 \sim x \text{ при } x \rightarrow 0. \quad (20)$$

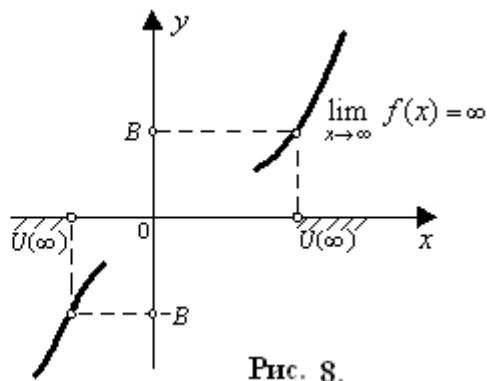
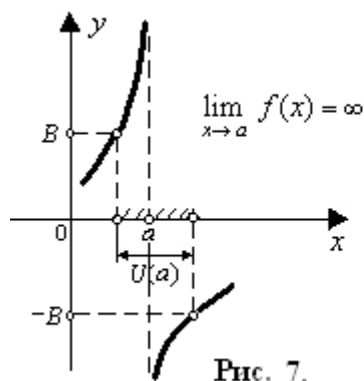
Функция $y = f(x)$ называется бесконечно большой при $x \rightarrow a$, если для любого числа $B > 0$, сколь бы большим оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x , принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(x)| > B$.

Предел бесконечно большой функции при $x \rightarrow a$ обозначается символом ∞ : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ и называется бесконечным пределом функции при $x \rightarrow a$.

Определение бесконечно большой функции при $x \rightarrow a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall B > 0 \exists U(a) / |f(x)| > B \quad \forall x \in U(a), x \neq a.$$

Геометрически существование бесконечного предела $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ означает, что значения функции $y = f(x)$ становятся сколь угодно большими по модулю, если значения аргумента достаточно близки к точке $x = a$ (рис. 7, 8).



Пример. $y = \frac{1}{x-1}$ – бесконечно большая функция при $x \rightarrow 1$.

Бесконечный предел последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ означает, что члены последовательности $\{u_n\}$ становятся сколь угодно большими по модулю при достаточно больших номерах n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \Leftrightarrow \forall B > 0 \exists n_0(\varepsilon) / |u_n| > B \quad \forall n > n_0.$$

Функция $y = f(x)$ называется *локально ограниченной в точке $x = a$* , если существует такая окрестность точки $U(a)$, в которой значения функции удовлетворяют неравенству $m \leq f(x) \leq M$, где m и M – некоторые числа.

Любая функция, имеющая конечный предел при $x \rightarrow a$, в том числе и бесконечно малая функция, является локально ограниченной в точке $x = a$.

Если $y = f(x)$ – бесконечно большая при $x \rightarrow a$, то она не является локально ограниченной в точке $x = a$.

Пример. $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ – локально ограниченная функция во всех точках, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$.

4. Вычисление пределов

При вычислении пределов используют теоремы о конечных пределах и теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.

Основные теоремы о конечных пределах.

1. Если $f(x) = const$ ($const$ – константа) при $\forall x \in U(a)$, то

$$\lim_{x \rightarrow a} const = const.$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, где $C = const$.

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, если $f(x)$ – функция, непрерывная в точке $x = a$ (см. п. 6).

4. Если $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$, где A_1, A_2 – числа, то

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \pm f_2(x)) = A_1 \pm A_2, \quad \lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = A_1 \cdot A_2 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$$

при условии, что $A_2 \neq 0$.

Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях

(для краткости обозначим: $\bar{b}m$ – бесконечно малая функция, $\bar{b}\bar{b}$ – бесконечно большая функция, $огр$ – локально ограниченная функция).

5. $\bar{b}m \pm \bar{b}m = \bar{b}m$.

6. $\bar{b}m \cdot \bar{b}m = \bar{b}m$.

7. $\bar{b}m \cdot огр = \bar{b}m$.

8. $\frac{огр}{\bar{b}m} = \bar{b}\bar{b}$, если $огр$ не является $\bar{b}m$.

9. $\bar{b}\bar{b} + \bar{b}\bar{b} = \bar{b}\bar{b}$, если обе $\bar{b}\bar{b}$ одного знака.

10. $\bar{b}\bar{b} \cdot \bar{b}\bar{b} = \bar{b}\bar{b}$.

11. $\bar{b}\bar{b} \cdot огр = \bar{b}\bar{b}$, если $огр$ не является $\bar{b}m$.

12. $\frac{огр}{\bar{b}\bar{b}} = \bar{b}m$.

Примеры.

1) $\lim_{x \rightarrow a} 10 = 10$ (здесь использована теорема 1);

2) $\lim_{x \rightarrow 2} (10(2x - 1)) = 10 \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 10(2 \cdot 2 - 1) = 30$ (здесь использованы теоремы 2,

3 и непрерывность функции $y = 2x - 1$);

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{огр}{\bar{b}m} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \bar{b}\bar{b} = \infty$ (здесь использована теорема 8);

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} =$
 $= 1 + 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{b}m - 5 \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{b}m = 1 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1$ (здесь использованы теоремы 2, 4 и 12).

5. Раскрытие неопределенностей

Если некоторый предел существует, но не может быть вычислен при помощи теорем о конечных пределах или теорем о бесконечно малых, бесконечно больших и локально ограниченных функциях, то говорят, что этот предел *имеет неопределенность* и указывают ее вид. Основные виды неопределенностей: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, (1^∞) .

Чтобы вычислить предел, имеющий неопределенность, нужно предварительно преобразовать функцию, стоящую под знаком предела, таким образом, чтобы неопределенность исчезла, т.е. *раскрыть неопределенность*. Для этой цели рекомендуется использовать определенные правила.

Правило 1. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \rightarrow \infty$, образованную отношением двух многочленов или иррациональных функций, нужно в числителе и знаменателе вынести за скобки старшие степени x и сократить дробь на степень x .

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + x + 7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{огр}{бб} = \lim_{x \rightarrow \infty} бм = 0$$

(здесь использовано, что $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, $\frac{1}{x^3} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$).

Из правила 1 следует, что для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \rightarrow \infty$, образованной делением целых многочленов одинаковой степени, достаточно вычислить отношение коэффициентов при старших степенях переменной x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{a_0}{b_0}. \quad (21)$$

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0} \right)$ при $x \rightarrow a$, где a – число, образованную отношением двух функций, нужно в числителе и знаменателе дроби выделить *критический множитель* $(x - a)$, и сократить дробь на него.

Пример.
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = 1,5$$
 (здесь

критический множитель – это $(x - 3)$, для его выделения использовано разложение многочленов на множители).

Для выделения критического множителя в случае, когда неопределенность $\left(\frac{0}{0} \right)$ образована отношением тригонометрических, показательных, или логарифмических функций, используют *принцип замены бесконечно малых функций*: при вычислении предела можно заменить любой бесконечно малый сомножитель на ему эквивалентный. При этом можно использовать теоретические соотношения эквивалентностей (см. формулы (14) – (19)).

Пример.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(1 - 2x^2)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\ln(1 + (-2x^2))} = \left. \begin{array}{l} \text{используем замены эквивалентных бм} \\ \arcsin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \arcsin 2x \sim 2x \text{ при } x \rightarrow 0 \\ \ln(1 + x) \sim x \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \ln(1 + (-2x^2)) \sim -2x^2 \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-2x^2} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o2p}{бм} = - \lim_{x \rightarrow 0} бб = \infty$$

(здесь критический множитель – это $(x - 0) = x$, для его выделения использован принцип замены эквивалентных бесконечно малых и соотношения эквивалентностей (15) и (18)).

Правило 3. Чтобы раскрыть неопределенность (1^∞) , нужно свести ее ко второму замечательному пределу, который может быть записан в двух формах:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{\frac{1}{z}} = e;$$

здесь e – это иррациональное число, которое можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби: $e = 2,7182818\dots$ ($e \approx 2,72$).

Пример. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{-x^3} = (1^\infty) = \left\{ \begin{array}{l} \text{сводим ко второму} \\ \text{замечательному пределу} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(3x+1)+1}{3x+1}\right)^{-x^3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x+1}\right)^{-x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}}_{\rightarrow e}\right)^{\frac{-x^3}{3x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{3x+1}} = e^{-\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3x+1}} = e^{-\infty} = 0.$$

При вычислении предела учтено, что $z = \frac{1}{3x+1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3}{3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x\left(3 + \frac{1}{x}\right)} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3 + \frac{1}{x}} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty}{огр} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \infty = -\infty, \quad e^y \rightarrow 0$$

при $y = \frac{-x^3}{3x+1} \rightarrow -\infty$.

6. Непрерывность функции, точки разрыва

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке x_0* , если:

- 1) $x_0 \in \text{ООФ}$ вместе с некоторой своей окрестностью;
- 2) существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$;
- 3) этот предел совпадает со значением функции в точке x_0 ,

т.е

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

(22)

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Если функция не является непрерывной в точке x_0 , но она определена в окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0), то x_0 называется *точкой разрыва* функции.

Для определения вида разрыва в точке x_0 находят односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$. При этом если существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$, но $A \neq f(x_0)$, то говорят, что функция терпит в точке x_0 разрыв типа *выколотой точки*; если существуют односторонние пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A_2$, но $A_1 \neq A_2$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ не существует; в этом случае говорят, что функция терпит в точке x_0 разрыв типа «скачок»; если левосторонний либо правосторонний (или оба) пределы функции при $x \rightarrow x_0$ бесконечные, то говорят, что функция терпит в точке x_0 *бесконечный разрыв*.

Разрывы типа выколотой точки и типа «скачок» относятся к *конечным разрывам*, или *разрывам I рода*, бесконечные разрывы относятся к *разрывам II рода*.

Примеры.

1) Функция $y = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$ непрерывна $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ в силу непрерывности функций $y = -x$ и $y = 2x$. В точке $x = 0$ функция также непрерывна, т.к.

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (-x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 2x = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0;$$

$$f(0) = (-x)|_{x=0} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0).$$

Следовательно, функция непрерывна для всех $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 9).

2) Функция $y = \begin{cases} 2+x, & x \leq 0, \\ 3, & x > 0 \end{cases}$ непрерывна $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ в силу

непрерывности функций $y = 2+x$ и $y = 3$. В точке $x = 0$ функция терпит разрыв типа «скачок» (рис. 10), т.к.

$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} (2+x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} 3 = 3$, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не существует.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна во всех точках своей ООФ, т.е. для $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ функция терпит разрывы II рода (рис. 11),

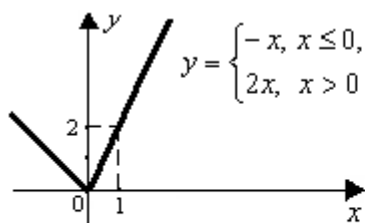


Рис. 9.

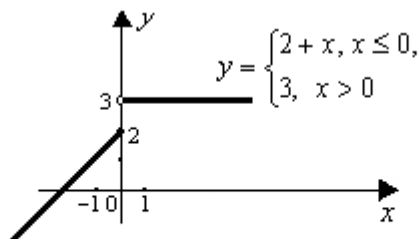


Рис. 10.

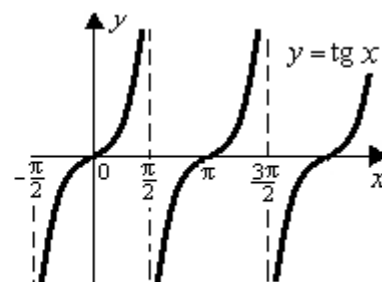


Рис. 11.

Т.к. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi k - 0} \operatorname{tg} x = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi k + 0} \operatorname{tg} x = -\infty$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Дифференцирование функций

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (23)$$

где $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Другие обозначения производной: y'_x , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$.

Если существует производная функции $y = f(x)$ в точке x , то функция называется *дифференцируемой* в этой точке. *Дифференцирование* функции – это процесс нахождения производной y'_x . При дифференцировании используют таблицу производных и правила дифференцирования.

Таблица 2.

Таблица производных основных элементарных функций.

1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$		
2	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$	10	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
3	$(e^x)' = e^x$	11	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1$	12	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	13	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$
6	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	15	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
8	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	16	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
9	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$	17	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Основные правила дифференцирования.

Производная от постоянной равна нулю:

$$(c)' = 0. \quad (24)$$

Производная алгебраической суммы $(u \pm v)$ двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \quad (25)$$

Производная произведения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \quad (26)$$

Производная отношения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \quad (27)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x) \quad (28)$$

Производная от сложной функции: если $y = f(z(x))$, где $f(z)$ и $z(x)$ – дифференцируемые функции, то $y'_x = f'_z \cdot z'_x$ («правило цепочки»).

Производная от функции, заданной неявно: если функция $y(x)$ задана уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения y'_x нужно продифференцировать обе части тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства найти y'_x как решение линейного уравнения.

1) Производная от функций $y(x)$, заданной параметрически: если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, то:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (29)$$

Производные высших порядков: производная 2-го порядка: $y''_x = (y'_x)'_x$, 3-го порядка: $y'''_x = (y''_x)'_x$ и т.д. Для обозначений производных высшего порядка используются также символы вида: $f''(x)$, f''_{xx} , $\frac{d^3 f}{dx^3}$. Производные 4 и более высоких порядков обозначаются при помощи римских цифр: y^{IV} , y^V Производная n -го порядка обозначается $y^{(n)}$, она получается n -кратным дифференцированием функции $y = f(x)$: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

2. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой

Касательной к кривой l в ее точке M называют предельное положение секущей MN , когда точка N , двигаясь по кривой l , неограниченно приближается к точке M (рис. 25).

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой и проходящая через точку касания (рис. 26).

Геометрический смысл производной:

$y'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$k_{кас.} = y'(x_0)$. Тогда из условия перпендикулярно-



Рис. 25.

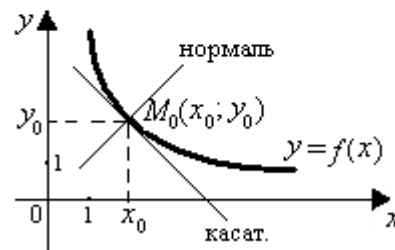


Рис. 26.

сти прямых можно найти угловой коэффициент нормали:

$$k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Если $y'(x_0)$ существует, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad (30)$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Если $y'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0). \quad (31)$$

3. Вычисление пределов при помощи правила Лопиталья

Правило Лопиталья: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x \rightarrow a$ равен пределу отношения их производных, если предел отношения производных существует (конечный или бесконечный):

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (32)$$

Правило Лопиталья позволяет раскрывать неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталья справедливо и в случае, когда $x \rightarrow \infty$. Его можно применять неоднократно.

4. Исследование функций и построение графиков

Полное исследование функции $y = f(x)$ для построения ее графика включает следующие пункты (не обязательно именно в этом порядке).

1) Область определения функции (ООФ) и область ее значений (ОЗФ).

Если область определения функции $y = f(x)$ не задана специально, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений ее аргумента, т.е. с множеством всех точек x , для которых выполнима операция f . При нахождении ООФ используют ООФ элементарных функций $y = \ln(x)$ ($x > 0$),

$$y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0), \quad y = \sqrt[n]{x} \quad (x \geq 0), \quad \text{и др.}$$

Область значений функции находят только в случаях, когда ее можно сразу указать, опираясь на свойства элементарных функций, например, для функции $y = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2$, очевидно, $y \geq 0$.

2) Четность функции, ее периодичность.

Для установления четности (нечетности) функции $y = f(x)$, имеющей симметричную область определения, проверяют справедливость равенств $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) для всех $x \in \text{ООФ}$.

В случае четности или нечетности функции исследование ее поведения и построение графика можно проводить только для $x \geq 0$, а затем достроить график, используя симметрию: для четной функции график симметричен относительно оси OY , а для нечетной – относительно начала координат.

Для установления периодичности функции проверяют справедливость равенства $f(x+T) = f(x)$ для $\forall x \in \text{ООФ}$, где T определяется видом функции. В случае периодической функции исследование проводят для одного промежутка периодичности.

3) Непрерывность функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты.

Для определения промежутков непрерывности функции используют непрерывность основных элементарных функций. В точках, «подозрительных» на разрыв (отдельных точек, не входящих в ООФ), проверяют выполнение условий непрерывности. Если функция терпит разрыв в точке x_0 , то определяют тип разрыва.

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в некоторой точке x_0 , то прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции. Если только один из односторонних пределов при $x \rightarrow x_0 - 0$ или $x \rightarrow x_0 + 0$ является бесконечным, то асимптота называется *односторонней*.

Если функция определена не на всей числовой оси, то необходимо вычислить односторонние пределы функции в точках, ограничивающих промежутки ООФ. Если односторонний предел функции в точке a , ограничивающей промежутки ООФ, бесконечен, то $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой графика функции. Например, если ООФ: $x \in (a; +\infty)$, то нужно

найти $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$; если этот предел окажется бесконечным, то $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой графика функции.

4) Промежутки монотонности и экстремумы.

Для определения промежутков монотонности функции $y = f(x)$ используют *достаточный признак монотонности*.

Достаточный признак монотонности дифференцируемой функции: если на интервале $x \in (a, b)$ производная $f'(x)$ сохраняет знак, то функция $y = f(x)$ сохраняет монотонность на этом интервале, а именно: если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

Для установления точек экстремумов функции $y = f(x)$ используют *необходимый и достаточные признаки существования экстремума*.

Необходимое условие существования экстремума функции: если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие ООФ, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции по ее первой производной* (точками, «подозрительными на экстремум»).

Первый достаточный признак существования экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 (слева направо) производная $f'(x)$ изменяет свой знак, то в точке x_0 есть экстремум причем это максимум, если знак $f'(x)$ меняется с плюса на минус, и это минимум, если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не изменяет свой знак, то в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$.

Второй достаточный признак существования экстремума: если $y = f(x)$ – дважды дифференцируемая функция в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, тогда: если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Для нахождения точек экстремумов функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по первой производной. После этого проверяют выполне-

ние в них достаточных условий существования экстремума функции.

5) Промежутки выпуклости, вогнутости графика и точки перегиба.

Дуга кривой L называется *выпуклой*, если все ее точки расположены не выше касательной, проведенной в любой точке этой дуги (рис. 27), и называется *вогнутой*, если все ее точки расположены не ниже касательной, проведенной в любой точке дуги кривой.

Точки, принадлежащие кривой, и отделяющие участки выпуклости от участков вогнутости, называются *точками перегиба* кривой (рис. 27).

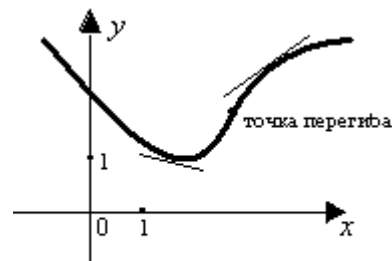


Рис. 27.

Достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции: если функция $y = f(x)$ является дважды дифференцируемой и ее вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак при всех $x \in (a; b)$, то график функции имеет постоянное направление выпуклости на этом интервале: при $f''(x) < 0$ – выпуклость вверх, при $f''(x) > 0$ – вогнутость (выпуклость вниз).

Необходимое условие для точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то ее вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками функции по ее второй производной* (точками, «подозрительными на перегиб»).

Достаточное условие для точек перегиба: если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 , подозрительную на перегиб, изменяет знак, то точка графика с абсциссой x_0 является точкой перегиба. Если $f''(x)$ не изменяет знак при переходе через точку x_0 , то перегиба нет.

При нахождении промежутков выпуклости, вогнутости графика функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по второй производной, после этого выделяют промежутки знакопостоянства второй производной на ООФ: если $f''(x) > 0$, то кривая вогнутая, а если $f''(x) < 0$, то кривая выпуклая. Точки перегиба определяют, используя достаточные условия перегиба.

6) Наклонные и горизонтальные асимптоты.

Асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, расстояние до которой от текущей точки M кривой стремится к нулю при удалении точки M от начала координат (рис. 28).

Если график функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* с уравнением $y = kx + b$,

то параметры k и b в уравнении асимптоты можно найти по формулам:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad (33)$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx). \quad (34)$$

Если хотя бы один из этих пределов является бесконечным или не существует, то наклонных асимптот нет. В случае, когда $k = 0$, график имеет *горизонтальную асимптоту* с уравнением $y = b$.

В некоторых случаях (как правило, если $f(x)$ выражена через показательную или логарифмическую функцию), график может иметь асимптоты только при $x \rightarrow -\infty$ или только при $x \rightarrow +\infty$.

Иногда ветви графика $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ имеют разные асимптоты.

7) Точки пересечения графика с осями координат или другие дополнительные точки графика.

Дополнительные точки графика находят в случаях, когда недостаточно информации для выбора масштаба по осям координат, т.е. когда на некотором промежутке ООФ нет ни точек экстремумов, ни точек перегибов, ни точек пересечения графика с осями координат.



Рис. 28.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Задача 1. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

Задача 2. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя

неизвестными:
$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Требуется:

- 1) записать систему в матричном виде;
- 2) найти решение системы с помощью формул Крамера;
- 3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 3. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n - 3n^3}{2n^2 - 3}, \quad n \in N; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x}}{x^2 + x - 6}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{x^2} - e^x}$$

Задача 4. Найти производную y'_x :

$$\text{а) } y = \frac{x \cdot e^{-2x} + 3 \operatorname{tg} x}{1 + \sin 4x}; \quad \text{б) } 2x^5 y^2 - x \ln y + 4x = 0; \quad \text{в) } \begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1 - 4t^2} + 1. \end{cases}$$

Задача 5. Дана функция $y = 3x + \ln \cos x + 2$ и значение $x_0 = 0$. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0 . Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

Задача 6. Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y = x^2 \cdot e^{1-x}.$$

Решение задачи 1.

Записываем матричный многочлен: $f(A) = 3A^2 - 5A + 2E$. Здесь E – единичная матрица той же размерности, что и A , т.е. 3-го порядка.

Найдем матрицу A^2 . При умножении матрицы A на себя используем правило «строка на столбец» (формула (3)):

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot (-2) & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2E$, используя правило умножения матрицы на число (формула (1)):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем значение матричного многочлена $f(A)$, используя правило умножения матрицы на число и правило сложения матриц (формула (2)):

$$f(A) = 3A^2 - 5A + 2E = 3 \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \\ -10 & 5 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5+2 & 18-10+0 & -6-0+0 \\ 6-0+0 & 9-10+2 & -18+5+0 \\ -30+10+0 & 6-5+0 & 45-20+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи 2.

1) Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Во втором уравнении системы отсутствует неизвестная x_3 , т.е. $a_{23} = 0$).

2) Решим систему с помощью формул Крамера. Для этого по формулам (9) составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных в левых частях уравнений и три вспомогательных определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим эти определители, используя формулу (5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -9 + 20 + 6 - 8 = 9.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-3) \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \cdot 5 - 2(-3) \cdot 0 - 8 \cdot 0 \cdot 5 - 4 \cdot 7 \cdot 1 = -24 + 70 - 28 = 18;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 7 \cdot 1 - 3 \cdot 0 \cdot 0 - 8 \cdot 2 \cdot 1 = 21 - 14 - 16 = -9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3(-3) \cdot 0 + 4 \cdot 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2 \cdot 5 - 8(-3) \cdot 1 - 3 \cdot 7 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 28 + 80 + 24 - 105 = 27.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера (10):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{9} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3.$$

3) Решим систему при помощи обратной матрицы.

а) Определитель $\det A = \Delta = 9 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

б) Чтобы найти союзную матрицу A^* к матрице A , необходимо вычислить по формулам (6) алгебраические дополнения всех ее элементов:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 0 = -3; \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2 - 0) = -2; \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13;$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -(4 - 10) = 6; \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(15 - 4) = -11;$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6; \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 4) = 4; \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17.$$

Здесь определители 2-го порядка вычислены по формуле (4).

Тогда союзная матрица (см. формулу (11)):
$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix}.$$

в) Найдем обратную матрицу по формуле (12):

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{13}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{17}{9} \end{pmatrix}.$$

г) Получим решение системы при помощи обратной матрицы по формуле (3) (правило «строка на столбец»):

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 13 & -11 & -17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -24 + 42 + 0 \\ -16 + 7 + 0 \\ 104 - 77 + 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ -9 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3.$$

Решение, полученное матричным способом, совпадает с тем, которое получено по формулам Крамера, что подтверждает правильность этого решения.

Ответы:

1) система в матричном виде: $AX = B$, где
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix};$$

2) решение системы, полученное с помощью формул Крамера:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3;$$

3) решение системы, полученное при помощи обратной матрицы:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3.$$

Решение задачи 3а.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n - 3n^3}{2n^2 - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} - 3 \right)}{n^2 \left(2 - \frac{3}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} - 3 \right)}{2 - \frac{3}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{бб}}{\text{огр}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{бб} = \infty$$

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ при $n \rightarrow \infty$ использовано правило 1: в числителе и знаменателе вынесены за скобки старшие степени n . При вычислении предела учтено, что при $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{const} = \text{const}$, использованы теоремы о конечных пределах и теорема о бесконечно больших функциях:

$$\frac{\text{бб}}{\text{огр}} = \text{бб} \cdot \text{огр} = \text{бб}, \text{ если } \text{огр} \neq \text{бм}.$$

С точки зрения определения бесконечного предела последовательности $u_n = \frac{1 + 2n - 3n^3}{2n^2 - 3}$, $n \in N$ полученный результат $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ означает, что для достаточно больших значений номера n члены последовательности u_n становятся сколь угодно большими по модулю.

Решение задачи 3б.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x}}{x^2 + x - 6} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})}{(x^2 + x - 6)(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - (\sqrt{5-x})^2}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+x-5+x}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})} = 2 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+3)(\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x})} = \\
&= 2 \frac{1}{5(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \frac{2}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Здесь для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель $(x-2)$. Для его выделения в знаменателе использовано разложение многочлена на множители, а в числителе – домножение числителя и знаменателя на выражение $\sqrt{1+x} + \sqrt{5-x}$, сопряженное числителю $\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x}$. При вычислении предела использованы теоремы о конечных пределах.

С точки зрения определения предела функции $y = f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x}}{x^2 + x - 6}$ при $x \rightarrow 2$ полученный результат $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{5\sqrt{3}}$ означает, что для значений аргумента x , достаточно близких к точке $x = 2$, значения функции будут становиться сколь угодно близкими к числу $\frac{1}{5\sqrt{3}}$.

Решение задачи 3в.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{x^2} - e^{-x}} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(2x)}{e^x(e^{x^2-x} - 1)} = \left. \begin{array}{l} \text{используем замены эквивалентных бм :} \\ \sin z \sim z \text{ при } z \rightarrow 0 \Rightarrow \sin^2(2x) \sim (2x)^2 = 4x^2 \text{ при } x \rightarrow 0 \\ e^z - 1 \sim z \text{ при } z \rightarrow 0 \Rightarrow e^{x^2-x} - 1 \sim (x^2 - x) \text{ при } x \rightarrow 0 \end{array} \right\} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{e^x(x^2 - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{e^x(x-1)x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{e^x(x-1)} = \frac{0}{1(0-1)} = 0.
\end{aligned}$$

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель $(x-0) = x$. Для его выделения использован принцип замены эквивалентных бесконечно малых.

С точки зрения определения конечного предела функции

$y = f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{e^{x^2} - e^x}$ при $x \rightarrow 0$ полученный результат $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ означает, что для значений аргумента x , достаточно близких к точке $x = 0$, значения функции будут становиться сколь угодно сколь угодно близкими к числу 0.

Ответы: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2n - 3n^3}{2n^2 - 3} = \infty, \quad n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{5-x}}{x^2 + x - 6} = \frac{1}{5\sqrt{3}};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{e^{x^2} - e^x} = 0.$

Решение задачи 4а.

Функция $y(x)$ задана в явном виде и является отношением двух функций: $y = \frac{x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg}x}{1 + \sin 4x} = \frac{u(x)}{v(x)}$. Будем искать ее производную по формуле (27):

$$y'_x = \frac{(x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg}x)' \cdot (1 + \sin 4x) - (x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg}x) \cdot (1 + \sin 4x)'}{(1 + \sin 4x)^2}.$$

Найдем производные ее числителя и знаменателя:

$$\begin{aligned} (x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg}x)' &= x' \cdot e^{-2x} + x \cdot (e^{-2x})' + 3 \cdot (\operatorname{tg}x)' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot e^{-2x} \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= (1 - 2x) \cdot e^{-2x} + \frac{3}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

(здесь использованы формулы (25), (26), (28) и «правило цепочки»);

$$(1 + \sin 4x)' = 1' + (\sin 4x)' = 0 + \cos 4x \cdot 4 = 4 \cos 4x$$

(здесь использованы формулы (24), (25) и «правило цепочки»).

Теперь получаем: $y'_x = \frac{\left((1 - 2x) \cdot e^{-2x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) \cdot (1 + \sin 4x) - (x \cdot e^{-2x} + 3\operatorname{tg}x) \cdot 4 \cos 4x}{(1 + \sin 4x)^2}.$

Преобразование результата не производим, поскольку оно не дает существенного упрощения выражения для y'_x .

Решение задачи 4б.

Равенство $2x^5 y^2 - x \ln y + 4x = 0$ есть уравнение вида $F(x, y) = 0$, которое неявно задает функцию $y(x)$. Для нахождения y'_x продифференцируем обе части тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства найдем y'_x как решение линейного уравнения:

$$\begin{aligned} 2x^5 y^2(x) - x \ln(y(x)) + 4x = 0 &\Rightarrow (2x^5 y^2(x) - x \ln(y(x)) + 4x)'_x = (0)'_x \Rightarrow \\ 2 \cdot 5x^4 \cdot y^2(x) + 2x^5 \cdot 2y(x) \cdot y'_x - \ln(y(x)) - \frac{x}{y(x)} \cdot y'_x + 4 = 0 &\Rightarrow \\ 10x^4 y^2 + 4x^5 y y'_x - \ln y - \frac{xy'_x}{y} + 4 = 0 &\Rightarrow 10x^4 y^3 + 4x^5 y^2 y'_x - y \ln y - xy'_x + 4y = 0 \Rightarrow \\ y'_x(4x^5 y^2 - x) = y \ln y - 10x^4 y^3 - 4y &\Rightarrow y'_x = \frac{y \ln y - 10x^4 y^3 - 4y}{4x^5 y^2 - x}. \end{aligned}$$

Производная неявно заданной функции y'_x зависит от аргумента x и функции y , поэтому в ответе нужно отразить их взаимосвязь:

$$y'_x = \frac{y \ln y - 10x^4 y^3 - 4y}{4x^5 y^2 - x}, \text{ где } 2x^5 y^2 - x \ln y + 4x = 0.$$

Решение задачи 4в.

Функция $y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1 - 4t^2} + 1. \end{cases}$ Для нахождения

y'_x

используем формулу (29):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sqrt{1 - 4t^2} + 1)'_t}{(\arcsin 2t - 3)'_t} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1 - 4t^2}} \cdot (-8t)}{\frac{1}{\sqrt{1 - (2t)^2}} \cdot 2} = \frac{-4t \cdot \sqrt{1 - 4t^2}}{2\sqrt{1 - 4t^2}} = -2t \Rightarrow y'_x = -2t$$

(при дифференцировании использованы формулы (24), (25) и «правило цепочки»).

Производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически, поэтому записываем результат в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$$

Ответы:

$$a) y'_x = \frac{\left((1-2x) \cdot e^{-2x} + \frac{3}{\cos^2 x} \right) \cdot (1 + \sin 4x) - (x \cdot e^{-2x} + 3 \operatorname{tg} x) \cdot 4 \cos 4x}{(1 + \sin 4x)^2};$$

$$б) y'_x = \frac{y \ln y - 10x^4 y^3 - 4y}{4x^5 y^2 - x}, \text{ где } 2x^5 y^2 - x \ln y + 4x = 0;$$

$$в) \begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$$

Решение задачи 5.

Найдем ординату точки касания: $y_0 = f(x_0) = 0 + \ln \cos 0 + 2 = \ln 1 + 2 = 2$.

Для вычисления угловых коэффициентов касательной и нормали найдем производную y'_x :

$$y = 3x + \ln \cos x + 2 \Rightarrow y' = 3 + \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' + 0 = 3 + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = 3 - \operatorname{tg} x.$$

Вычислим угловой коэффициент касательной: $k_{кас.} = y'(x_0) = 3 - \operatorname{tg} 0 = 3$.

Тогда угловой коэффициент нормали: $k_{норм.} = -\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{3}$.

Запишем уравнение касательной в точке $M(0; 2)$ по формуле (30) и приведем его к виду общего уравнения прямой:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 3(x - 0) \Leftrightarrow y = 3x + 2 \Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0.$$

Запишем уравнение нормали по формуле (31) и аналогично упростим его:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{3} \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 2 \Leftrightarrow x + 3y - 6 = 0.$$

Для построения графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0; y_0)$ вычислим значения функции $y = 3x + \ln \cos x + 2$ в точках, близких к $x_0 = 0$:

$$y(-1) = -3 + \ln \cos(-1) + 2 \approx -1 + \ln 0,54 \approx -1 - 0,6 = -1,6,$$

$$y(1) = 3 + \ln \cos(1) + 2 \approx 5 + \ln 0,54 \approx 5 - 0,6 = 4,4.$$

На рис. 29 построены участок графика функции $y = 3x + \ln \cos x + 2$, касательная $3x - y + 2 = 0$ и нормаль $x + 3y - 6 = 0$ в окрестности точки $M(0; 2)$.

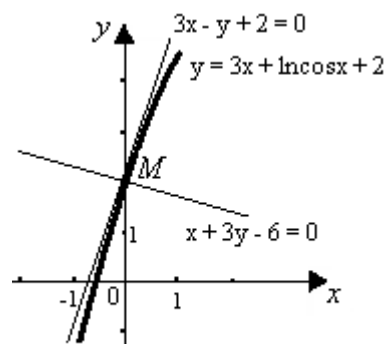


Рис. 29.

Ответы: $3x - y + 2 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$. Графики на рис. 29.

Решение задачи 6.

Проведем полное исследование функции $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.

1) ООФ: $x \in (-\infty; +\infty)$, ОЗФ: $y \in [0; +\infty)$, т.к. $e^{1-x} > 0$, $x^2 \geq 0$.

2) Функция не является четной или нечетной, т.к. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, эта функция общего вида. Функция непериодическая.

3) Функция непрерывна на всей ООФ. Точек разрыва нет.

4) Промежутки монотонности и экстремумы найдем при помощи 1-й производной:

$$y' = (x^2 \cdot e^{1-x})' = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x}(-1) = (2x - x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 1-й производной: $y' = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$; y'_x не существует – таких точек нет.

Проверим выполнение достаточных условий монотонности и экстремума по знаку 1-й производной. На рис. 33 видно, что функция возрастает на интервале $x \in (0; 2)$, убывает на интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$.

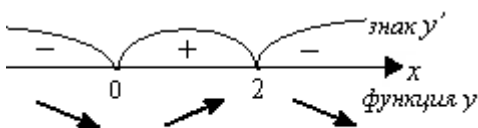


Рис. 33.

В точке $x = 0$ минимум функции,
 $y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot e^1 = 0$, в точке $x = 2$ максимум,
 $y_{\max} = y(2) = 2^2 \cdot e^{1-2} = \frac{4}{e} \approx 1,5$.

5) Выпуклость, вогнутость графика и точки перегиба исследуем при помощи 2-й производной:

$$y'' = ((2x - x^2) \cdot e^{1-x})' = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} + (2x - x^2) \cdot e^{1-x}(-1) = (2 - 2x - 2x + x^2) \cdot e^{1-x} \Rightarrow$$

$$y'' = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 2-й производной: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, т.е. $x_1 \approx 0,6$, $x_2 \approx 3,4$.

Проверим выполнение достаточных условий выпуклости, вогнутости графика функции по знаку 2-й производной. На рис. 34 видно, что график функции выпуклый на интервале $x \in (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, и вогнутый на интервалах $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{2})$ и $x \in (2 + \sqrt{2}; +\infty)$.

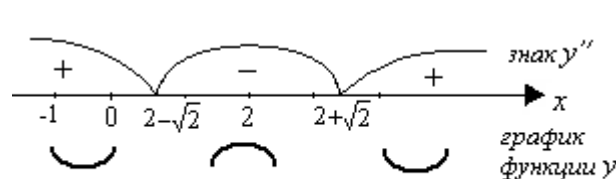


Рис. 34.

В точках с абсциссами $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ имеются перегибы графика; вычисляем ординаты точек перегиба:

$$y_1 = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-1-\sqrt{2}} \approx 1,0, \quad y_2 = (2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \approx 0,5.$$

б) Найдем наклонные асимптоты графика $y = kx + b$ при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$ (отдельно) по формулам (33), (34).

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x \cdot e^{1-x}) = (\infty \cdot \infty) = -\infty$$

(здесь при $x \rightarrow -\infty$ обе функции под знаком предела являются бесконечно большими). Следовательно, при $x \rightarrow -\infty$ наклонных асимптот нет.

При $x \rightarrow +\infty$ получаем:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x} = (\infty \cdot 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \left(\frac{огр}{\infty} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot e^{1-x} - 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{правило} \\ \text{Лопиталя} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = \left(\frac{огр}{\infty} \right) = 0.$$

Следовательно, при $x \rightarrow +\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту, ее уравнение: $y = 0$.

7) Точка пересечения с осями координат – единственная: $(0; 0)$, т.к.

$$y = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

8) Построение графика начинаем с построения асимптоты $y = 0$ (она совпадает с осью абсцисс), затем отмечаем точки графика, в которых функция имеет экстремумы: точку минимума $(0; 0)$, максимума $\left(2; \frac{4}{e}\right)$, и точки перегиба $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, где $x_1 \approx 3,4$, $y_1 \approx 1,0$, $x_2 \approx 0,6$, $y_2 \approx 0,5$. После этого выполняем построение графика функции $y = x^2 \cdot e^{1-x}$ сначала на промежутках $x \in (-\infty; 2 - \sqrt{2})$ и $x \in (2 + \sqrt{2}; +\infty)$, затем на промежутке $x \in (2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.

На графике (рис. 35) видно сближение кривой с асимптотой $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$ и перегибы кривой.

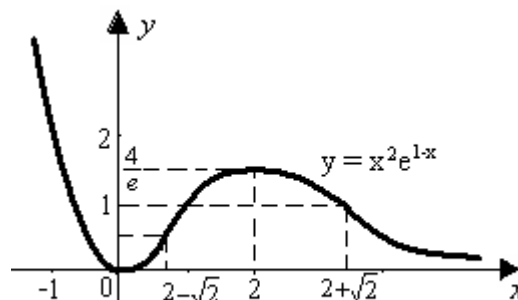


Рис. 35.

Ответ: график на рис. 35.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Каждый вариант контрольной работы содержит 6 задач по темам «Элементы линейной алгебры. Функции. Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии с методическими указаниями, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта контрольной работы.

Задания для всех вариантов общие; студенту следует выбрать из условия каждой задачи данные, необходимые для ее решения, в соответствии со своим вариантом. Оформление контрольной работы должно соответствовать установленным правилам и требованиям. Необходимые чертежи должны выполняться четко, с соответствующими подписями и комментариями (см. образец выполнения примерного варианта работы).

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A . Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

№ варианта	многочлен $f(x)$	Матрица A
1	$f(x) = -x^2 + 5x + 3$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
2	$f(x) = -2x^2 + 4x + 7$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3	$f(x) = 3x^2 + x + 2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
4	$f(x) = 2x - x^2 - 3$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
5	$f(x) = 3x + x^2 - 2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$
6	$f(x) = 2(1 - x)^2$	$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
7	$f(x) = (3 - x)^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$
8	$f(x) = -3(x^2 - x + 1)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
9	$f(x) = 2x - x^2 + 1$	$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
10	$f(x) = 4(x^2 - x) - 3$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задача 2. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 10, \\ 3x_1 + 5x_3 = -11. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 = -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_3 = -1. \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = -9. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$

Требуется:

- 1) записать систему в матричном виде;
- 2) найти решение системы с помощью формул Крамера;
- 3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 3. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

№ варианта	Пределы
1	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - n^2}{n^2 + 5n - 2}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{3x+1} - 5}{x^2 - 8x};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin \sqrt{x})}{e^{3x} - 1}$
2	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 7n^2 + n - 1}{6n^2 + 3n}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 8x - 9};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin \sqrt{2x}}$
3	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2}{3n^4 - 10}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{\sqrt{x^2 - 5} - 2};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\ln(1 + 2x)}.$
4	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 4n - 1}{n^2 - 9n}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x^2 - 16};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(3x - x^2)}{5^{1-x^2} - 5}$
5	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - n^2 + 3n - 4}{n^3 + 12n^2 + 5n + 3}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{2x^2 - 3x - 2};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 6x)}{\arcsin 3x}$
6	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + n + n^2}{7n + 25}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2+x} - 1}{x^2 - 3x - 4};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x \cdot \sin x)}{4^{3x} - 4^x}.$
7	а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{n^2 + 4n + 4}, n \in N;$ б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{\sqrt{2-x^2} - x};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-5x)}{\cos 3x - 1};$ г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+2}{8x+5} \right)^{x-4}.$

8	<p>a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 10n + 3}{1 - 2n}, n \in N$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x-4}}{x^2 - 6x + 5}$;</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\operatorname{arctg} \sqrt{5x}}$</p>
9	<p>a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 12n - 1}{n^2 + 3}, n \in N$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 - 5x - 9}{x + \sqrt{5x + 6}}$;</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\arcsin(x^3)}$</p>
10	<p>a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^3 + 3n}{2n^4 - n^2 - n^5}, n \in N$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$;</p> <p>в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{3x} - 1)}{\ln(1 + 2x^3)}$</p>

Задача 4. Найти производную y' :

№ варианта	Функции		
	а)	б)	в)
1	$y = \frac{\operatorname{arctg} 5x}{1 + \ln 3x}$	$3x^2 + 4xy - \sin y = 0$	$\begin{cases} x = t^2 \cdot e^{3t}, \\ y = t \cdot e^{-t} \end{cases}$
2	$y = \frac{\cos 5x}{1 + 3x^2}$	$e^y + 2xy - 6x = 0$	$\begin{cases} x = \sqrt{1 + 3t^2} \\ y = \ln(1 + 3t^2) \end{cases}$
3	$y = \frac{e^{4x}}{2 - x + 3x^2}$	$3xy - \cos y + 2x^3 = 0$	$\begin{cases} x = \arcsin 3t, \\ y = \ln(1 - 9t^2) \end{cases}$
4	$y = \frac{5x^2 + 4}{\arccos(3x)}$	$\sin y + xy^2 - 5x^3 = 0$	$\begin{cases} x = t \cdot \operatorname{ctg} 2t, \\ y = 2\sqrt{t^5} - 3t \end{cases}$
5	$y = \frac{\ln(5x + 2)}{1 + 2x + x^2}$	$4xy - \sqrt{y} - x^5 = 0$	$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos 5t}, \\ y = \operatorname{tg} 5t - 4 \end{cases}$
6	$y = \frac{4^{x+2}}{5x + 3x^2}$	$\arcsin x + x^3 y^3 - 3y^4 = 0$	$\begin{cases} x = \ln t \cdot (t + 1), \\ y = \frac{1}{2} t^2 + t \end{cases}$

7	$y = \frac{\ln 5x}{\cos 4x}$	$xy^2 - e^y + 3x^2 = 0$	$\begin{cases} x = \frac{1}{(t+1)^2}, \\ y = \frac{t-4}{t+1} \end{cases}$
8	$y = \frac{\arctg 5x}{\sqrt{1+3x}}$	$xy^2 - \ln y - 7x = 0$	$\begin{cases} x = t \cdot \sin 2t, \\ y = t - \cos t \end{cases}$
9	$y = \frac{\text{arcctg} 7x}{3x^2 - 2}$	$3e^{2y} - xy + 6x^2 = 0$	$\begin{cases} x = 2t - \ln^2 t, \\ y = \frac{t^2 - 1}{t} \end{cases}$
10	$y = \frac{e^{4x+3}}{\ln(x)+2}$	$x^5 y^3 - \text{tg} x - 2y = 0$	$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = 2 + \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Задача 5. Дана функция $y = f(x)$ и значение x_0 .

№ варианта	Функция	Точка
1	$y = \ln \frac{2-x}{x^3}$	$x_0 = 1$
2	$y = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$	$x_0 = 4$
3	$y = e^{3x}(x+1)$	$x_0 = 0$
4	$y = \ln(2x^2 - 2x - 3)$	$x_0 = 2$
5	$y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	$x_0 = 1$
6	$y = x - 2\arctg x + 1$	$x_0 = 0$
7	$y = \arcsin 3x + 3$	$x_0 = 0$
8	$y = \frac{\ln x + 1}{x + 1}$	$x_0 = 1$
9	$y = \sqrt[3]{2 - x^3}$	$x_0 = 1$
10	$y = e^{\sin 2x}$	$x_0 = 0$

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 . Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

Задача 6. Провести полное исследование функции и построить ее график.

№ варианта	Функция
1	$y = e^{4x-x^2-5}$
2	$y = \ln(x^2 - 2x)$
3	$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
4	$y = (3-x)e^{x-2}$
5	$y = \frac{1}{\ln x}$
6	$y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
7	$y = xe^{-x}$
8	$y = \sqrt{x} \cdot \ln x$
9	$y = \frac{e^x}{1-x}$
10	$y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- Москва : Айрис-пресс, 2011. - 602, [1] с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 212.
2. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург : Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003, 2001. - 432 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 781.

Дополнительная литература

1. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Профессия, 2007, 2003 ; Москва. - 200 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 378.
2. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 815 с.: ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 30.