МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

Методические указания
к выполнению контрольной работы по темам «Элементы линейной алгебры. Функции. Дифференциальное исчисление функций одной переменной»
для обучающихся заочной формы обучения направлений подготовки естественно-технологического института

Мурманск
2020 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Основной формой работы обучающихся заочно является самостоятельная изучение учебного материала: чтение учебников, решение типовых задач с проверкой правильности решения, выполнение контрольных работ.

В настоящем пособии содержатся список рекомендуемой литературы, методические указания к изучению теоретического материала и рекомендации по выполнению контрольной работы по темам «Элементы линейной алгебры. Функции. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

В результате изучения этих тем обучающиеся должны:

• ознакомиться с основами линейной алгебры (действия над матрицами, вычисление определителей), научиться решать системы линейных алгебраических уравнений методом Крамера и при помощи обратной матрицы;

• владеть понятиями функции, сложной и обратной функций, знать свойства основных элементарных функций, уметь определять их основные характеристики по графикам функций;

• знать определения предела функции и предела последовательности;

• уметь вычислять пределы, раскрывать неопределенности и анализировать полученный результат с точки зрения определения предела;

• уметь исследовать функции на непрерывность, определять точки разрыва функции и устанавливать тип разрыва;

• владеть основными понятиями дифференциального исчисления (производная и ее геометрический смысл, дифференциал), уметь находить производные функций, заданных явно, неявно или параметрически;

• иметь навыки решения основных задач с использованием производных: геометрические задачи на касательную и нормаль и пр.;

• знать приемы исследования функций с помощью производной.

Предлагаемое пособие включает варианты контрольной работы для обучающихся заочной формы обучения, а также справочный материал, необходимый для выполнения работы. Кроме того, в пособии содержится решение примерного варианта контрольной работы, в котором имеются ссылки на используемый справочный материал.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. ФУНКЦИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

В таблице 1 приведены наименования тем в соответствии с содержанием контрольной работы и ссылки на литературу по этим темам. Перед выполнением контрольной работы рекомендуется изучить соответствующий теоретический материал и решить указанные в таблице задачи.

Таблица 1.

Содержание (темы)	Литература
Матрицы. Операции над матрицами	[1], гл.I, §1; [2], гл.10, § 1; [3], ч.1, гл.IV, № 399-403, 414, 415
Определители. Обратная матрица. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы	[1], гл.I, § 2, 3.1, 3.2, 4.1, 4.3; [2], гл.10, § 2-4; [3], ч.1, гл.I, № 210, 211, 217, 219, 225-227; [4], гл.7, № 20-25, 38-43
Основные элементарные функции, их графики и основные характеристики. Сложные функции. Обратные функции	[1], гл. V, § 14; [2], гл. 4, § 1, 11, 12.1; [3], гл. VI, № 610–637; [4], гл. 4, № 15–38, 43–60, 62–71, 73–108,151, 153
Предел числовой последовательности и функции непрерывного аргумента. Вычисление пределов, раскрытие основных видов неопределенностей. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые функции	[1], гл. V, § 15–18; [2], гл. 4, § 2–6; [3], гл. VI, № 638–690, 692, 693, 700, 707, 714–719; [4], гл. 2, № 21–24, 26–28, 63–68, гл. 4, № 228–246, 285, 289, 346–351, 355, 358–359
Определение непрерывности функции в точке и на промежутке. Точки разрыва функции и их классификация. Исследование функции на непрерывность	[1], гл. V, § 19; [2], гл. 4, § 7–9; [3], гл. VI, № 723–735

Определение производной. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. Производные сложных функций. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически. Производные высших порядков	[1], гл.V, § 20, 21, 23.1; [2], гл. 5, § 1, 4, 5, 7–9, 10.1, 11; [3], гл. VII, № 771–811, 900–907, 909– 912, 950, 951, 964, 965, 969; [4], гл. 5, № 14–44, 162–167, 206–211
Уравнения касательной и нормали к плоской кривой	[1], гл. V, § 20.2; [2], гл. 5, § 1.2; [3], гл. VII, № 917–921, 923–930; [4], гл. 5, № 139–144
Вычисление пределов при помощи правила Лопиталя	[1], гл. V, § 25.2; [2], гл. 6, § 1, 2; [3], гл. VII, № 1024–1028, 1030–1040; [4], гл. 5, № 225–240, 258–264
Монотонность и экстремумы функций. Выпуклость графика функции, точки перегиба. Вертикальные и наклонные асимптоты. Полное исследование функции и построение ее графика	[1], гл. V, § 25.3–25.8; [2], гл. 6, § 4; [3], гл. VII, № 1055–1058, 1061–1064, 1083–1084, 1091–1094, 1102–1109; [4], гл. 5, № 282, 293, 296, 297–300, 315–324, 334, 339, 342, 344–347

Примечание. Ссылки на литературу в таблице даны в соответствии с номерами в списке рекомендуемой литературы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМАМ «ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ»

1. Матрицы

Матрицей размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из $m \cdot n$ элементов (m строк и n столбцов):

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots\ a_{mn} \end{pmatrix},$$ где a_{ij} – элементы матрицы,

$i = 1,2,\dots, m$ – номер строки, $j = 1,2,\dots, n$ – номер столбца.

Для краткости матрицу обозначают одной буквой, например, буквой A.

Некоторые виды матриц:

1) *нулевая матрица*: матрица, все элементы которой равны нулю;

2) при $n = 1$ *матрица-столбец*: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$;

3) при $m = 1$ *матрица-строка*: $Y = (y_1\ \ y_2\ \dots\dots y_n)$;

4) при $m = n$ *квадратная матрица*: $A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

У квадратной матрицы различают главную диагональ (соединяющую элементы a_{11} и a_{nn}) и побочную диагональ.

Примеры квадратных матриц:

1) *единичная матрица* (квадратная матрица, на главной диагонали которой стоят единицы, а остальные элементы – нули):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix};$$

2) квадратная матрица второго порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$;

3) квадратная матрица третьего порядка: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Две матрицы A и B называются *равными*, если они имеют одинаковые размерности и их соответствующие элементы равны:

$$A_{m\times n} = B_{m\times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m; \ j = 1,2,\ldots, n).$$

2. Линейные операции над матрицами

Умножение матрицы A на число k:

$$B = k\cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix},$$

или, в краткой записи:

$$B = k\cdot A \Leftrightarrow b_{ij} = k\cdot a_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m; \ j = 1,2,\ldots, n). \qquad (1)$$

Сложение (*вычитание*) матриц A и B одинаковой размерности:

$$C_{m\times n} = A_{m\times n} \pm B_{m\times n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \ (i = 1,2,\ldots, m; \ j = 1,2,\ldots, n). \qquad (2)$$

Произведение матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$:

$$C_{m\times k} = A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} \Leftrightarrow$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \ (i = 1,2,\ldots, m; \ j = 1,2,\ldots, k). \qquad (3)$$

Формулу (23) легко запомнить, как правило умножения «строка на столбец»: произведение матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times k}$ есть матрица $C_{m\times k}$, у которой элемент c_{ij} равен сумме произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Замечание. Перемножать можно только *соответственные* матрицы A и B, т.е.число столбцов матрицы A должно быть равно числу строк матрицы B.

Если задан многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, то *матричным многочленом* $f(A)$ называется выражение

$$a_0A^n+a_1\cdot A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nE,$$

где A – квадратная матрица, $A^n=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{n\ раз}$ и E – единичная матрица той же размерности, что и A. Значением матричного многочлена является матрица.

3. Определители

Определитель второго порядка (определитель квадратной матрицы второго порядка):

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \quad (4)$$

Определитель третьего порядка (определитель квадратной матрицы третьего порядка):

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}. \quad (5)$$

Для краткости определитель обозначают: $|A|$ или Δ.

Минором элемента a_{ij} определителя называется определитель, который получается из исходного путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца (обозначается M_{ij}).

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя (обозначается A_{ij}) называется число:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \quad (6)$$

Определитель третьего порядка можно вычислить, используя его разложение по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (7)$$

или, в краткой записи:

$$\det A = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13},$$

т.е. определитель равен сумме произведений элементов первой строки на их алгебраические дополнения. Аналогично можно записать разложение определителя по любой другой строке или столбцу.

4. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными методом Крамера

Пусть дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

(коэффициенты a_{ij} и свободные члены b_j для $i = 1, 2, 3,$ $j = 1, 2, 3$ считаются заданными).

Тройка чисел $x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0$ называется *решением системы* (8), если в результате подстановки этих чисел вместо x_1, x_2, x_3 все три уравнения системы обращаются в тождества.

Систему (8) можно переписать *в матричном виде*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad AX = B,$$

где A – это матрица коэффициентов при неизвестных, X – столбец неизвестных, B – столбец свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Составим определитель матрицы A и три вспомогательных определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Определитель Δ называется *главным определителем системы* (8). *Вспомогательные определители* Δ_1, Δ_2 и Δ_3 получаются из Δ заменой элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов.

Если определитель $\Delta \neq 0$, то существует единственное решение системы (8) и оно выражается формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \tag{10}$$

Формулы (10) называются *формулами Крамера*.

5. Решение системы трех линейных алгебраических уравнений при помощи обратной матрицы

Присоединенной (союзной) матрицей к квадратной матрице

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя матрицы A.

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A, если выполнено условие: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица той же размерности, что и A.

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда квадратная матрица A – *невырожденная*, т.е. $\det A \neq 0$.

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1}, необходимо:

а) проверить невырожденность матрицы A, вычислив определитель $\det A$;

б) найти союзную матрицу A^* к матрице A;

в) найти обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* . \quad (12)$$

Если систему линейных алгебраических уравнений (8) переписать в матричном виде $AX = B$, то ее решение можно получить матричным способом, т.е. при помощи обратной матрицы:

$$X = A^{-1} \cdot B , \quad (13)$$

где A^{-1} – обратная матрица для данной матрицы A.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ»

1. Функции и их свойства

Переменной называют величину $x \in X$, принимающую значения из некоторого множества значений X.

Если каждому значению переменной x из множества X поставлено в соответствие по определенному правилу f единственное значение переменной y из множества Y, то говорят, что задана *функция* $y = f(x)$, определенная на множестве X с множеством значений Y. При этом используют следующие названия:

x –– аргумент (независимая переменная);

y – значение функции (зависимая переменная);

X – область определения функции (ООФ);

Y – множество значений функции (ОЗФ).

Функция $y = f(x)$, область определения X которой симметрична относительно начала координат, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и называется *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$, $\forall\, x \in X$.

<u>Примеры</u>. $y = \cos x$ – четная функция, $y = x^3$ – нечетная функция, $y = \sqrt{x}$ – функция общего вида (ни четная, ни нечетная).

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T, такое, что $f(x+T) = f(x)$, $\forall\, x \in X$.

<u>Примеры</u>. $y = \mathrm{tg} x$ – периодическая функция, наименьший период $T = \pi$, $y = \ln x$ – непериодическая функция.

Значение функции $y = f(x)$ – переменная величина, поэтому можно рассматравать новую функцию с аргументом y: $z = g(y)$, где $z \in Z$,
т. е. функцию $z = g(f(x))$. Такая функция называется *сложной* функцией от x, или *суперпозицией* функций f и g.
Пример. $z = \mathrm{tg}(x^2 + 3x - 1)$ – суперпозиция функций $z = \mathrm{tg} y$ и $y = x^2 + 3x - 1$.

Если $\forall y \in Y$ ставится в соответствие единственное значение $x \in X$, такое, что $y = f(x)$, то говорят, что задана функция $x = f^{-1}(y)$, которую называют *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными функциями*. Если у обратной функции $x = f^{-1}(y)$ обозначить аргумент буквой x, а функцию – буквой y, то графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ будут симметричны относительно прямой $y = x$.
Пример. $y = \lg x$ и $y = 10^x$ – взаимно обратные функции.

Все функции, задаваемые аналитическим способом, можно разбить на два класса: *элементарные* и *неэлементарные*. В классе элементарных функций выделяют *основные элементарные функции*: степенная ($y = x^n$), показательные ($y = a^x$), тригонометрические ($y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$), а также обратные к ним (логарифмические, обратные тригонометрические и др.). Элементарными называют функции, полученные из основных элементарных функций при помощи конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, а также суперпозиции основных элементарных функций. Все остальные функции относятся к неэлементарным.
Примеры. $y = \lg(\cos x)$ – элементарная функция, т.к. является суперпозицией основных элементарных функций $y = \lg x$ и $y = \cos x$; $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ – неэлементарная функция.

Нулями функции $y = f(x)$ называют точки x, в которых выполнено равенство $f(x) = 0$. Нули функции – это абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ox.
Пример. У функции $y = \lg(x)$ единственный нуль – точка $x = 1$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на интервале

$x \in (a;\, b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$, то есть если любому большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* на интервале $x \in (a;\, b)$, если для любых двух точек x_1 и x_2 этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Промежутки возрастания и убывания функции называются *промежутками монотонности* функции.

Если функция $y = f(x)$ монотонна на интервале $x \in (a;\, b)$, то она имеет обратную функцию $y = f^{-1}(x)$.

<u>Пример</u>. Функция $y = \mathrm{tg}x$ монотонна на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, ее ОЗФ: $y \in (-\infty; \infty)$. Она имеет обратную функцию $y = \mathrm{arctg}x$, определенную на интервале $x \in (-\infty; \infty)$, с ОЗФ: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если существует такая двухсторонняя окрестность точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. При этом число $f(x_0)$ называется *максимумом* функции $f(x)$ и обозначается $y_{\max}$.

Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, то x_0 называется *точкой минимума*, а число $f(x_0)$ – *минимумом* функции $f(x)$ и обозначается $y_{\min}$.

Точки максимумов и минимумов называются *точками экстремумов* функции, а числа $y_{\max}$ и $y_{\min}$ называются *экстремумами* функции.

<u>Пример</u>. Функция $y = \cos x$ имеет точки максимумов $x = 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $y_{\max} = y(2\pi k) = 1$, и точки минимумов $x = \pi + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $y_{\min} = y(\pi + 2\pi k) = -1$.

2. Предел функции. Предел последовательности

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$, где a – конечная или бесконечно удаленная точка на числовой прямой Ox.

Число A называется *конечным пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$ (или при $x \to a$), если для любого числа $\varepsilon > 0$, сколь малым бы оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

Предел функции обозначается так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Определение конечного предела при $x \to a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists U(a) \ / \ \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \ \ \forall x \in U(a), \ x \neq a. \qquad (*)$$

Геометрически существование конечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ в случае, когда $a \in (-\infty; \infty)$, означает, что значения функции $y = f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A, если значения аргумента становятся достаточно близкими к точке $x = a$ (рис. 1). При этом в самой точке a функция может быть не определена или определена, но может иметь значение, отличное от A.

Поведение функции только слева или только справа от точки $x = a$, т.е. в ее левой или правой окрестности, характеризуется ее *односторонними пределами* (рис. 2): *левосторонний предел* функции обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, где условие $x \to a - 0$ означает, что x остается левее точки a ($x \to a, \ \ x < a$); *правосторонний предел* функции обозначается $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B$, где условие $x \to a + 0$ означает, что x остается правее точки a ($x \to a, \ \ x > a$).

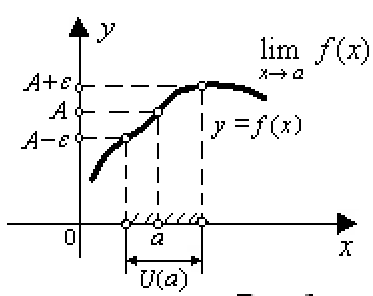

Рис. 1.

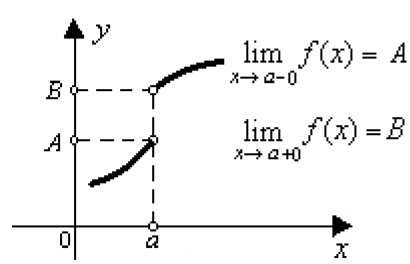

Рис. 2.

Существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что существуют оба односторонних предела и они совпадают между собой:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Если существует конечный предел функции при $x \to \infty$: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, то в его определении (*) $U(a)$ – это окрестность бесконечно удаленной точки числовой прямой (рис. 3). При этом можно рассматривать односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (рис. 4).

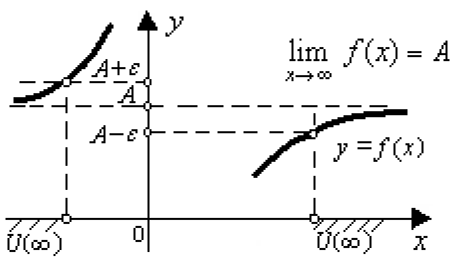

Рис. 3.

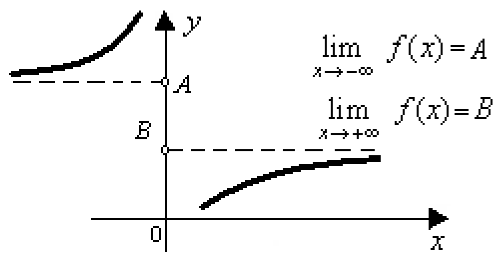

Рис. 4.

Числовую последовательность $\{u_n\}$ обычно рассматривают как функцию натурального аргумента n: $u_n = f(n), \ \forall n \in N$.

Если существует предел последовательности $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = A$, то его определение можно записать символически:

$$\lim_{n \to \infty} u_n = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \ / \ |u_n - A| < \varepsilon \ \ \forall n > n_0,$$

т.е. члены последовательности $\{u_n\}$ сколь угодно мало отличаются от числа A при достаточно больших номерах n (для $n > n_0$).

3. Бесконечно малые, бесконечно большие и локально ограниченные функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ (рис. 5, 6).

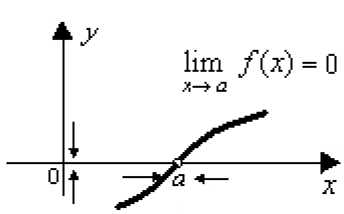

Рис. 5.

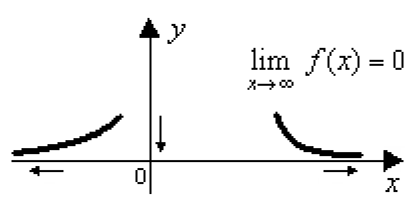

Рис. 6.

Две бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми*, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Основные соотношения эквивалентностей:

$$\sin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{14}$$

$$\arcsin x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{15}$$

$$\operatorname{tg} x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{16}$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{17}$$

$$\ln(1+x) \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{18}$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{19}$$

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{при} \quad x \to 0. \tag{20}$$

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $B > 0$, сколь бы большим оно ни было, можно указать такую окрестность $U(a)$ точки $x = a$ (не включающую саму точку a), что при всех x, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $|f(x)| > B$.

Предел бесконечно большой функции при $x \to a$ обозначается символом ∞: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и называется *бесконечным пределом* функции при $x \to a$.

Определение бесконечно большой функции при $x \to a$ можно записать символически следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall B > 0 \ \exists U(a) \ / \ |f(x)| > B \ \ \forall x \in U(a),\, x \neq a.$$

Геометрически существование бесконечного предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ означает, что значения функции $y = f(x)$ становятся сколь угодно большими по модулю, если значения аргумента достаточно близки к точке $x = a$ (рис. 7, 8).

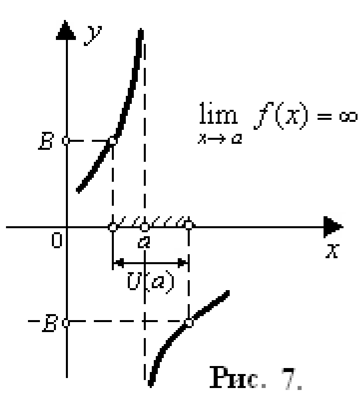

Рис. 7.

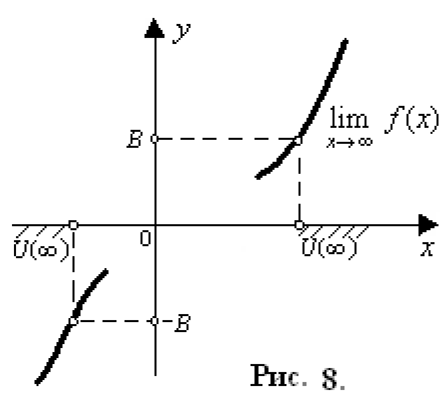

Рис. 8.

Пример. $y = \dfrac{1}{x-1}$ – бесконечно большая функция при $x \to 1$.

Бесконечный предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ означает, что члены последовательности $\{u_n\}$ становятся сколь угодно большими по модулю при достаточно больших номерах *n*:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall B > 0 \;\; \exists n_0(\varepsilon) \;/\; |u_n| > B \;\; \forall n > n_0 .$$

Функция $y = f(x)$ называется *локально ограниченной в точке* $x = a$, если существует такая окрестность точки $U(a)$, в которой значения функции удовлетворяют неравенству $m \le f(x) \le M$, где m и M – некоторые числа.

Любая функция, имеющая конечный предел при $x \to a$, в том числе и бесконечно малая функция, является локально ограниченной в точке $x = a$.

Если $y = f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то она не является локально ограниченной в точке $x = a$.

Пример. $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ – локально ограниченная функция во всех точках, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$.

4. Вычисление пределов

При вычислении пределов используют теоремы о конечных пределах и теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях.

Основные теоремы о конечных пределах.

1. Если $f(x) = const$ ($const$ – константа) при $\forall x \in U(a)$, то $\lim\limits_{x\to a} const = const$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$, где $C = const$.
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, если $f(x)$ – функция, непрерывная в точке $x = a$ (см. п. 6).
4. Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$, где A_1, A_2 – числа, то

$$\lim_{x\to a}\big(f_1(x) \pm f_2(x)\big) = A_1 \pm A_2, \quad \lim_{x\to a}\big(f_1(x)\cdot f_2(x)\big) = A_1 \cdot A_2 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2}$$

при условии, что $A_2 \ne 0$.

<u>Теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях</u>
(для краткости обозначим: *бм* – бесконечно малая функция, *бб* – бесконечно большая функция, *огр* – локально ограниченная функция).

5. $бм \pm бм = бм$.

6. $бм \cdot бм = бм$.

7. $бм \cdot огр = бм$.

8. $\dfrac{огр}{бм} = бб$, если *огр* не является *бм*.

9. $бб + бб = бб$, если обе *бб* одного знака.

10. $бб \cdot бб = бб$.

11. $бб \cdot огр = бб$, если *огр* не является *бм*.

12. $\dfrac{огр}{бб} = бм$.

<u>Примеры</u>.

1) $\lim\limits_{x\to a} 10 = 10$ (здесь использована теорема 1);

2) $\lim\limits_{x\to 2}\big(10(2x-1)\big) = 10\lim\limits_{x\to 2}(2x-1) = 10(2\cdot 2-1) = 30$ (здесь использованы теоремы 2, 3 и непрерывность функции $y = 2x - 1$);

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\overbrace{x^2-4}^{\to -3}}{\underbrace{x-1}_{\to 0}} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{огр}{бм}\right) = \lim\limits_{x\to 1} бб = \infty$ (здесь использована теорема 8);

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{4x}{x^2}-\dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}1 + 4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x} - 5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2} =$

$= 1 + 4\lim\limits_{x\to\infty} бм - 5\lim\limits_{x\to\infty} бм = 1 + 4\cdot 0 - 5\cdot 0 = 1$ (здесь использованы теоремы 2, 4 и 12).

5. Раскрытие неопределенностей

Если некоторый предел существует, но не может быть вычислен при помощи теорем о конечных пределах или теорем о бесконечно малых, бесконечно больших и локально ограниченных функциях, то говорят, что этот предел *имеет неопределенность* и указывают ее вид. Основные виды неопределенностей: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$.

Чтобы вычислить предел, имеющий неопределенность, нужно предварительно преобразовать функцию, стоящую под знаком предела, таким образом, чтобы неопределенность исчезла, т.е. *раскрыть неопределенность*. Для этой цели рекомендуется использовать определенные правила.

<u>Правило 1</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to \infty$, образованную отношением двух многочленов или иррациональных функций, нужно в числителе и знаменателе вынести за скобки старшие степени x и сократить дробь на степень x.

<u>Пример.</u>

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^3+x+7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\textit{огр}}{\textit{бб}} = \lim_{x\to\infty} \textit{бм} = 0$$

(здесь использовано, что $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{1}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x^3} \to 0$ при $x \to \infty$**)**.

Из правила 1 следует, что для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $x \to \infty$, образованной делением целых многочленов одинаковой степени, достаточно вычислить отношение коэффициентов при старших степенях переменной x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{a_0}{b_0}. \tag{21}$$

<u>Правило 2</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to a$, где a – число, образованную отношением двух функций, нужно в числителе и знаменателе дроби выделить *критический множитель* $(x-a)$, и сократить дробь на него.

<u>Пример.</u> $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{6}{4}=1{,}5$ (здесь критический множитель – это $(x-3)$, для его выделения использовано разложение многочленов на множители).

Для выделения критического множителя в случае, когда неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ образована отношением тригонометрических, показательных, или логарифмических функций, используют *принцип замены бесконечно малых функций*: при вычислении предела можно заменить любой бесконечно малый сомножитель на ему эквивалентный. При этом можно использовать теоретические соотношения эквивалентностей (см. формулы (14) – (19)).

<u>Пример.</u>

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(1-2x^2)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{\ln(1+(-2x^2))}=\left\{\begin{array}{l}\text{используем замены эквивалентных } \textit{бм}\\ \arcsin x\sim x \ \text{ при } \ x\to0\Rightarrow\\ \arcsin 2x\sim 2x \ \text{ при } \ x\to0\\ \ln(1+x)\sim x \ \text{ при } \ x\to0\Rightarrow\\ \ln(1+(-2x^2))\sim -2x^2 \ \text{ при } \ x\to0\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{-2x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{\textit{огр}}{\textit{бм}}=-\lim_{x\to0}\textit{бб}=\infty$$

(здесь критический множитель – это $(x-0)=x$, для его выделения использован принцип замены эквивалентных бесконечно малых и соотношения эквивалентностей (15) и (18)).

<u>Правило 3</u>. Чтобы раскрыть неопределенность $\left(1^{\infty}\right)$, нужно свести ее ко второму замечательному пределу, который может быть записан в двух формах:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}=e \quad \text{или} \quad \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e;$$

здесь e – это иррациональное число, которое можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби: $e = 2{,}7182818\ldots$ ($e\approx 2{,}72$).

<u>Пример.</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{-x^3}=\left(1^{\infty}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{сводим ко второму}\\ \text{замечательному пределу}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{(3x+1)+1}{3x+1}\right)^{-x^3}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{-x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}}_{\to e}\right)^{\frac{-x^3}{3x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^3}{3x+1}}=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}бб}=0.$$

При вычислении предела учтено, что $z=\dfrac{1}{3x+1}\to 0$ при $x\to\infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^3}{3x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3+\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{бб}{огр}=-\lim_{x\to\infty}бб=-\infty, \qquad e^{y}\to 0$$

при $y=\dfrac{-x^3}{3x+1}\to-\infty$.

6. Непрерывность функции, точки разрыва

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если:

1) $x_0\in$ООФ вместе с некоторой своей окрестностью;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$;

3) этот предел совпадает со значением функции в точке x_0, т.е

$$A=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{22}$$

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

Если функция не является непрерывной в точке x_0, но она определена в окрестности этой точки (за исключением, быть может, самой точки x_0), то x_0 называется *точкой разрыва* функции.

Для определения вида разрыва в точке x_0 находят односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. При этом если существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$, но $A\neq f(x_0)$, то говорят, что функция терпит в точке x_0 разрыв типа *выколотой точки*; если существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A_1$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A_2$, но $A_1\neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует; в этом случае говорят, что функция терпит в точке x_0 разрыв типа «*скачок*»; если левосторонний либо правосторонний (или оба) пределы функции при $x\to x_0$ бесконечные, то говорят, что функция терпит в точке x_0 *бесконечный разрыв*.

Разрывы типа выколотой точки и типа «скачок» относятся к *конечным разрывам*, или *разрывам I рода*, бесконечные разрывы относятся к *разрывам II рода*.

<u>Примеры.</u>

1) Функция $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 2x, & x>0\end{cases}$ непрерывна $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ в силу непрерывности функций $y=-x$ и $y=2x$. В точке $x=0$ функция также непрерывна, т.к.

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}(-x)=0,\quad \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0} 2x=0 \;\Rightarrow\; \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0;$$

$$f(0)=(-x)\big|_{x=0}=0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0} f(x)=f(0).$$

Следовательно, функция непрерывна для всех $x\in(-\infty;+\infty)$ (рис. 9).

2) Функция $y=\begin{cases}2+x, & x\le 0,\\ 3, & x>0\end{cases}$ непрерывна $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ в силу непрерывности функций $y=2+x$ и $y=3$. В точке $x=0$ функция терпит разрыв типа «скачок» (рис. 10), т.к.

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} (2+x) = 2,\quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} 3 = 3$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует.

3) Функция $y = \mathrm{tg}x$ непрерывна во всех точках своей ООФ, т.е. для $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ В точках $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ функция терпит разрывы II рода (рис. 11),

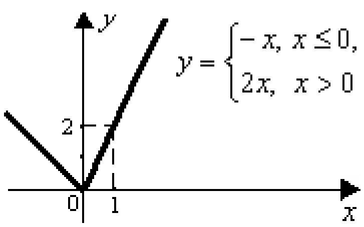

Рис. 9.

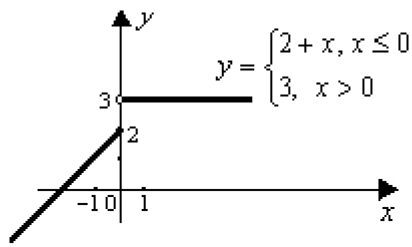

Рис. 10.

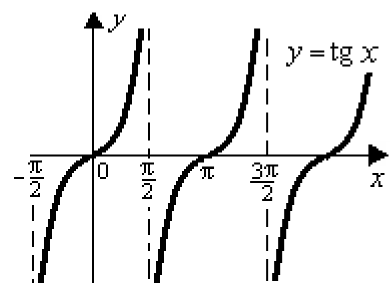

Рис. 11.

т.к. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+\pi k-0} \mathrm{tg}x = +\infty;\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+\pi k+0} \mathrm{tg}x = -\infty$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Дифференцирование функций

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется конечный предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{23}$$

где $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Другие обозначения производной: $y'_x,\quad f'(x),\quad \dfrac{dy}{dx},\quad \dfrac{df}{dx}$.

Если существует производная функции $y = f(x)$ в точке x, то функция называется *дифференцируемой* в этой точке. *Дифференцирование* функции – это процесс нахождения производной y'_x. При дифференцировании используют таблицу производных и правила дифференцирования.

Таблица 2.

Таблица производных основных элементарных функций.

1	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in R$		
2	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$	10	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$
3	$(e^x)' = e^x$	11	$(\mathrm{ch} x)' = \mathrm{sh}\, x$
4	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1$	12	$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x};$
5	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	13	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$
6	$(\sin x)' = \cos x$	14	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
7	$(\cos x)' = -\sin x$	15	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
8	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$	16	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$
9	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$	17	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Основные правила дифференцирования.

Производная от постоянной равна нулю:

$$(c)' = 0. \qquad (24)$$

Производная алгебраической суммы $(u \pm v)$ двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и равна алгебраической сумме производных этих функций:

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (25)$$

Производная произведения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'. \qquad (26)$$

Производная отношения двух дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ существует и вычисляется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \qquad (27)$$

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(c\cdot u(x))' = c\cdot u'(x) \qquad (28)$$

Производная от сложной функции: если $y = f(z(x))$, где $f(z)$ и $z(x)$ – дифференцируемые функции, то $y'_x = f'_z \cdot z'_x$ («правило цепочки»).
Производная от функции, заданной неявно: если функция $y(x)$ задана уравнением $F(x,y)=0$, то для нахождения y'_x нужно продифференцировать обе части тождества $F(x,y(x))\equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства найти y'_x как решение линейного уравнения.

1) Производная от функций $y(x)$, заданной параметрически: если $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ где $x(t)$, $y(t)$ – дифференцируемые функции, то:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (29)$$

Производные высших порядков: производная 2-го порядка: $y''_x = (y'_x)'_x$, 3-го порядка: $y'''_x = (y''_x)'_x$ и т.д. Для обозначений производных высшего порядка используются также символы вида: $f''(x)$, f''_{xx}, $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$. Производные 4 и более высоких порядков обозначаются при помощи римских цифр: y^{IV}, y^{V}.... Производная n-го порядка обозначается $y^{(n)}$, она получается n-кратным дифференцированием функции $y = f(x)$: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$.

2. Уравнения касательной и нормали к плоской кривой

Касательной к кривой l в ее точке M называют предельное положение секущей MN, когда точка N, двигаясь по кривой l, неограниченно приближается к точке M (рис. 25).

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной к этой кривой и проходящая через точку касания (рис. 26).

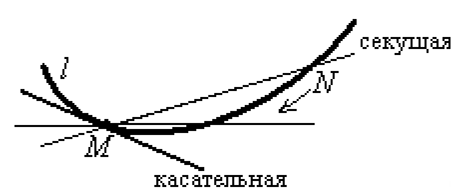

Рис. 25.

Геометрический смысл производной: $y'(x_0)$ – это угловой коэффициент касательной к графику $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$: $k_{кас.} = y'(x_0)$. Тогда из условия перпендикулярно-

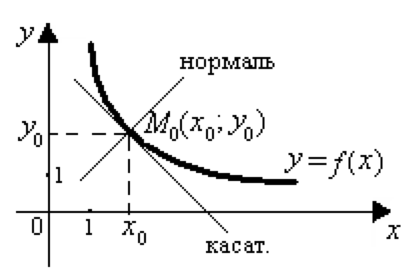

Рис. 26.

сти прямых можно найти угловой коэффициент нормали:

$$k_{норм.} = -\frac{1}{k_{кас.}} = -\frac{1}{y'(x_0)}.$$

Если $y'(x_0)$ существует, то уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0), \tag{30}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Если $y'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0). \tag{31}$$

3. Вычисление пределов при помощи правила Лопиталя

Правило Лопиталя: предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций при $x \to a$ равен пределу отношения их производных, если предел отношения производных существует (конечный или бесконечный):

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{32}$$

Правило Лопиталя позволяет раскрывать неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Правило Лопиталя справедливо и в случае, когда $x \to \infty$. Его можно применять неоднократно.

4.Исследование функций и построение графиков

Полное исследование функции $y = f(x)$ для построения ее графика включает следующие пункты (не обязательно именно в этом порядке).

<u>1)Область определения функции (ООФ) и область ее значений (ОЗФ).</u>

Если область определения функции $y = f(x)$ не задана специально, то считают, что она совпадает с областью допустимых значений ее аргумента, т.е. с множеством всех точек *x*, для которых выполнима операция *f*. При нахождении ООФ используют ООФ элементарных функций $y = \ln(x) \quad (x > 0)$, $y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$, $y = \sqrt[2n]{x} \quad (x \geq 0)$, и др.

Область значений функции находят только в случаях, когда ее можно сразу указать, опираясь на свойства элементарных функций, например, для функции $y=\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$, очевидно, $y \geq 0$.

<u>2)Четность функции, ее периодичность</u>.

Для установления четности (нечетности) функции $y = f(x)$, имеющей симметричную область определения, проверяют справедливость равенств $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$) для всех $x \in$ ООФ.

В случае четности или нечетности функции исследование ее поведения и построение графика можно проводить только для $x \geq 0$, а затем достроить график, используя симметрию: для четной функции график симметричен относительно оси *OY*, а для нечетной – относительно начала координат.

Для установления периодичности функции проверяют справедливость равенства $f(x+T) = f(x)$ для $\forall x \in$ ООФ, где *T* определяется видом функции. В случае периодической функции исследование проводят для одного промежутка периодичности.

<u>3)Непрерывность функции, точки разрыва, вертикальные асимптоты</u>.

Для определения промежутков непрерывности функции используют непрерывность основных элементарных функций. В точках, «подозрительных» на разрыв (отдельных точек, не входящих в ООФ), проверяют выполнение условий непрерывности. Если функция терпит разрыв в точке x_0, то определют тип разрыва.

Если функция $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв в некоторой точке x_0, то прямая $x = x_0$ является *вертикальной асимптотой* графика функции. Если только один из односторонних пределов при $x \to x_0 - 0$ или $x \to x_0 + 0$ является бесконечным, то асимптота называется *односторонней.*

Если функция определена не на всей числовой оси, то необходимо вычислить односторонние пределы функции в точках, ограничивающих промежутки ООФ. Если односторонний предел функции в точке *a*, ограничивающей промежуток ООФ, бесконечен, то *x* = *a* является односторонней вертикальной асимптотой графика функции. Например, если ООФ: $x \in (a; +\infty)$, то нужно найти $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$; если этот предел окажется бесконечным, то $x = a$ является односторонней вертикальной асимптотой графика функции.

4)Промежутки монотонности и экстремумы.

Для определения промежутков монотонности функции $y = f(x)$ используют *достаточный признак монотонности.*

Достаточный признак монотонности дифференцируемой функции: если на интервале $x\in(a,\, b)$ производная $f'(x)$ сохраняет знак, то функция $y = f(x)$ сохраняет монотонность на этом интервале, а именно: если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает, если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает.

Для установления точек экстремумов функции $y = f(x)$ используют *необходимый и достаточные признаки существования экстремума*.

Необходимое условие существования экстремума функции: если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие ООФ, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции по ее первой производной* (точками, «подозрительными на экстремум»).

Первый достаточный признак существования экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 (слева направо) производная $f'(x)$ изменяет свой знак, то в точке x_0 есть экстремум причем это максимум, если знак $f'(x)$ меняется с плюса на минус, и это минимум, если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс. Если при переходе через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ не изменяет свой знак, то в точке x_0 нет экстремума функции $f(x)$.

Второй достаточный признак существования экстремума: если $y = f(x)$ – дважды дифференцируемая функция в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$, тогда: если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума функции, а если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Для нахождения точек экстремумов функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по первой производной. После этого проверяют выполнение в них достаточных условий существования экстремума функции.

5)Промежутки выпуклости, вогнутости графика и точки перегиба.

Дуга кривой L называется *выпуклой*, если все ее точки расположены не выше касательной, проведенной в любой точке этой дуги (рис. 27), и называется *вогнутой,* если все ее точки расположены не ниже касательной, проведенной в любой точке дуги кривой.

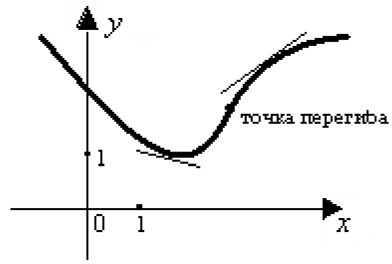

Рис. 27.

Точки, принадлежащие кривой, и отделяющие участки выпуклости от участков вогнутости, называются *точками перегиба* кривой (рис. 27).

Достаточное условие выпуклости, вогнутости графика функции: если функция $y = f(x)$ является дважды дифференцируемой и ее вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак при всех $x \in (a;b)$, то график функции имеет постоянное направление выпуклости на этом интервале: при $f''(x)<0$ – выпуклость вверх, при $f''(x)>0$ – вогнутость (выпуклость вниз).

Необходимое условие для точки перегиба: если x_0 – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то ее вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

Точки, принадлежащие графику функции $y = f(x)$, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, называются *критическими точками функции по ее второй производной* (точками, «подозрительными на перегиб»).

Достаточное условие для точек перегиба: если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0, подозрительную на перегиб, изменяет знак, то точка графика с абсциссой x_0 является точкой перегиба. Если $f''(x)$ не изменяет знак при переходе через точку x_0, то перегиба нет.

При нахождении промежутков выпуклости, вогнутости графика функции $y = f(x)$ сначала находят критические точки по второй производной, после этого выделяют промежутки знакопостоянства второй производной на ООФ: если $f''(x) > 0$, то кривая вогнутая, а если $f''(x) < 0$, то кривая выпуклая. Точки перегиба определяют, используя достаточные условия перегиба.

<u>6)Наклонные и горизонтальные асимптоты</u>.

Асимптотой кривой, имеющей бесконечную ветвь, называется прямая, расстояние до которой от текущей точки M кривой стремится к нулю при удалении точки M от начала координат (рис. 28).

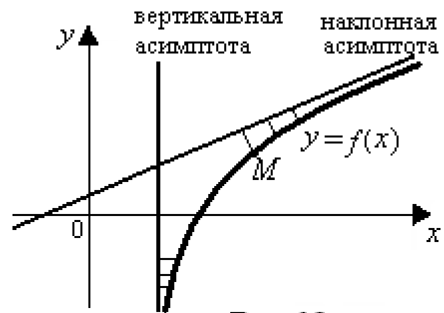

Рис. 28.

Если график функции $y = f(x)$ имеет *наклонную асимптоту* с уравнением $y = kx + b$, то параметры k и b в уравнении асимптоты можно найти по формулам:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{33}$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \big(f(x) - kx\big). \tag{34}$$

Если хотя бы один из этих пределов является бесконечным или не существует, то наклонных асимптот нет. В случае, когда $k = 0$, график имеет *горизонтальную асимптоту* с уравнением $y = b$.

В некоторых случаях (как правило, если $f(x)$ выражена через показательную или логарифмическую функцию), график может иметь асимптоты только при $x \to -\infty$ или только при $x \to +\infty$.

Иногда ветви графика $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ имеют разные асимптоты.

<u>7)Точки пересечения графика с осями координат или другие дополнительные точки графика</u>.

Дополнительные точки графика находят в случаях, когда недостаточно информации для выбора масштаба по осям координат, т.е. когда на некотором промежутке ООФ нет ни точек экстремумов, ни точек перегибов, ни точек пересечения графика с осями координат.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Задача 1. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A:

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

Задача 2. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Требуется:

1) записать систему в матричном виде;

2) найти решение системы с помощью формул Крамера;

3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 3. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}, \quad n \in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^x}$

Задача 4. Найти производную y'_x:

а) $y = \dfrac{x \cdot e^{-2x} + 3\,\mathrm{tg}x}{1+\sin 4x}$; б) $2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0$; в) $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1-4t^2} + 1. \end{cases}$

Задача 5. Дана функция $y = 3x + \ln\cos x + 2$ и значение $x_0 = 0$. Найти уравнения касательной и нормали к графику функции в точке с абсциссой x_0. Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

<u>Задача 6.</u> Провести полное исследование функции и построить ее график:

$$y = x^2 \cdot e^{1-x}.$$

<u>Решение задачи 1</u>.

Записываем матричный многочлен: $f(A) = 3A^2 - 5A + 2E$. Здесь E – единичная матрица той же размерности, что и A, т.е. 3-го порядка.

Найдем матрицу A^2. При умножении матрицы A на себя используем правило «строка на столбец» (формула (3)):

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 0\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) + 0\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)(-2) & 0\cdot 2 + 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 & 0\cdot 0 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 4\cdot(-2) & (-2)\cdot 2 + 1\cdot 2 + 4\cdot 1 & -2\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу $2E$, используя правило умножения матрицы на число (формула (1)):

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем значение матричного многочлена $f(A)$, используя правило умножения матрицы на число и правило сложения матриц (формула (2)):

$$f(A) = 3A^2 - 5A + 2E = 3\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & -6 \\ -10 & 2 & 15 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 & -6 \\ 6 & 9 & -18 \\ -30 & 6 & 45 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & -5 \\ -10 & 5 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5+2 & 18-10+0 & -6-0+0 \\ 6-0+0 & 9-10+2 & -18+5+0 \\ -30+10+0 & 6-5+0 & 45-20+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 6 & 1 & -13 \\ -20 & 1 & 27 \end{pmatrix}.$

Решение задачи 2.

1) Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ или } AX = B, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Во втором уравнении системы отсутствует неизвестная x_3, т.е. $a_{23} = 0$).

2) Решим систему с помощью формул Крамера. Для этого по формулам (9) составляем главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных в левых частях уравнений и три вспомогательных определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычислим эти определители, используя формулу (5):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-3)\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 5 - 2\cdot(-3)\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 1 = -9 + 20 + 6 - 8 = 9.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\cdot(-3)\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 7\cdot 5 - 2(-3)\cdot 0 - 8\cdot 0\cdot 5 - 4\cdot 7\cdot 1 = -24 + 70 - 28 = 18;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 7\cdot 1 + 8\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 0 - 2\cdot 7\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 0 - 8\cdot 2\cdot 1 = 21 - 14 - 16 = -9;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 2 & -3 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 3(-3)\cdot 0 + 4\cdot 7\cdot 1 + 8\cdot 2\cdot 5 - 8(-3)\cdot 1 - 3\cdot 7\cdot 5 - 4\cdot 2\cdot 0 = 28 + 80 + 24 - 105 = 27.$$

Найдем решение системы по формулам Крамера (10):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{9} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-9}{9} = -1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{27}{9} = 3.$$

3) Решим систему при помощи обратной матрицы.

а) Определитель $\det A = \Delta = 9 \neq 0$, следовательно, обратная матрица существует.

б) Чтобы найти союзную матрицу A^* к матрице A, необходимо вычислить по формулам (6) алгебраические дополнения всех ее элементов:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-3-0=-3;\ A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(2-0)=-2;\ A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}=10+3=13;$$

$$A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-(4-10)=6;\ A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3-2=1;\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-(15-4)=-11;$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 2\\ -3 & 0\end{vmatrix}=0+6=6;\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(0-4)=4;\ A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-9-8=-17.$$

Здесь определители 2-го порядка вычислены по формуле (4).

Тогда союзная матрица (см. формулу (11)): $A^*=\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ -2 & 1 & 4\\ 13 & -11 & -17\end{pmatrix}$.

в) Найдем обратную матрицу по формуле (12):

$$A^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ -2 & 1 & 4\\ 13 & -11 & -17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{13}{9} & -\frac{11}{9} & -\frac{17}{9}\end{pmatrix}.$$

г) Получим решение системы при помощи обратной матрицы по формуле (3) (правило «строка на столбец»):

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3 & 6 & 6\\ -2 & 1 & 4\\ 13 & -11 & -17\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-24+42+0\\ -16+7+0\\ 104-77+0\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}18\\ -9\\ 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad x_1=2;\quad x_2=-1;\quad x_3=3.$$

Решение, полученное матричным способом, совпадает с тем, которое получено по формулам Крамера, что подтверждает правильность этого решения.

Ответы:

1) система в матричном виде: $AX = B$, где $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 0\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8\\ 7\\ 0\end{pmatrix}$;

2) решение системы, полученное с помощью формул Крамера:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3;$$

3) решение системы, полученное при помощи обратной матрицы:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 3.$$

<u>Решение задачи 3а</u>.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2n-3n^3}{2n^2-3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^2}-3\right)}{n^2\left(2-\frac{3}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^2}-3\right)}{2-\frac{3}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{бб}{огр} = \lim_{n\to\infty} бб = \infty$$

.

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ при $n \to \infty$ использовано правило 1: в числителе и знаменателе вынесены за скобки старшие степени *n*. При вычислении предела учтено, что при $n \to \infty$ $\frac{1}{n^2} \to 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty} const = const$, использованы теоремы о конечных пределах и теорема о бесконечно больших функциях:

$$\frac{бб}{огр} = бб \cdot огр = бб \text{, если } огр \neq бм .$$

С точки зрения определения бесконечного предела последовательности $u_n = \frac{1+2n-3n^3}{2n^2-3}$, $n \in N$ полученный результат $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ означает, что для достаточно больших значений номера n члены последовательности u_n становятся сколь угодно большими по модулю.

<u>Решение задачи 3б</u>.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})}{(x^2+x-6)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{1+x})^2-(\sqrt{5-x})^2}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} = \lim_{x\to 2} \frac{1+x-5+x}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} = 2\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+3)(\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x})} =$$

$$= 2\frac{1}{5(\sqrt{3}+\sqrt{3})} = \frac{2}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{5\sqrt{3}}.$$

Здесь для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель (x –2). Для его выделения в знаменателе использовано разложение многочлена на множители, а в числителе – домножение числителя и знаменателя на выражение $\sqrt{1+x}+\sqrt{5-x}$, сопряженное числителю $\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}$. При вычислении предела использованы теоремы о конечных пределах.

С точки зрения определения предела функции $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6}$ при $x\to 2$ полученный результат $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$ означает, что для значений аргумента x, достаточно близких к точке $x = 2$, значения функции будут становиться сколь угодно близкими к числу $\dfrac{1}{5\sqrt{3}}$.

<u>Решение задачи 3в</u>.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{e^{x^2}-e^x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to -0}\frac{2\sin^2(2x)}{e^x(e^{x^2-x}-1)} = \left\{\begin{array}{l}\text{используем замены эквивалентных } \textit{бм}: \\ \sin z \sim z \text{ при } z\to 0 \Rightarrow \sin^2(2x)\sim (2x)^2 = 4x^2 \text{ при } x\to 0 \\ e^z-1\sim z \text{ при } z\to 0 \Rightarrow e^{x^2-x}-1\sim (x^2-x) \text{ при } x\to 0\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^x(x^2-x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{e^x(x-1)x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x(x-1)} = \frac{0}{1(0-1)} = 0.$$

Для раскрытия неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ использовано правило 2: в числителе и знаменателе выделен критический множитель (x – 0) = x. Для его выделения использован принцип замены эквивалентных бесконечно малых.

С точки зрения определения конечного предела функции

$y = f(x) = \dfrac{1-\cos 4x}{e^{x^2} - e^x}$ при $x \to 0$ полученный результат $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ означает, что для значений аргумента x, достаточно близких к точке $x = 0$, значения функции будут становиться сколь угодно сколь угодно близкими к числу 0.

Ответы: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2n-3n^3}{2n^2-3} = \infty, \quad n \in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{5-x}}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{e^{x^2} - e^x} = 0$.

<u>Решение задачи 4а</u>.

Функция $y(x)$ задана в явном виде и является отношением двух функций: $y = \dfrac{x \cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x}{1+\sin 4x} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$. Будем искать ее производную по формуле (27):

$$y'_x = \frac{(x\cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)'\cdot(1+\sin 4x) - (x\cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)\cdot(1+\sin 4x)'}{(1+\sin 4x)^2}.$$

Найдем производные ее числителя и знаменателя:

$$(x\cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)' = x'\cdot e^{-2x} + x\cdot\left(e^{-2x}\right)' + 3\cdot(\mathrm{tg}x)' = 1\cdot e^{-2x} + x\cdot e^{-2x}\cdot(-2) + 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x} =$$

$$= (1-2x)\cdot e^{-2x} + \frac{3}{\cos^2 x}$$

(здесь использованы формулы (25), (26), (28) и «правило цепочки»);

$$(1+\sin 4x)' = 1' + (\sin 4x)' = 0 + \cos 4x \cdot 4 = 4\cos 4x$$

(здесь использованы формулы (24), (25) и «правило цепочки»).

Теперь получаем: $y'_x = \dfrac{\left((1-2x)\cdot e^{-2x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot(1+\sin 4x) - (x\cdot e^{-2x} + 3\mathrm{tg}x)\cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$.

Преобразование результата не производим, поскольку оно не дает существенного упрощения выражения для y'_x.

<u>Решение задачи 4б</u>.

Равенство $2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0$ есть уравнение вида $F(x, y) = 0$, которое неявно задает функцию $y(x)$. Для нахождения y'_x продифференцируем обе части тождества $F(x, y(x)) \equiv 0$ по аргументу x и из полученного равенства найдем y'_x как решение линейного уравнения:

$$2x^5y^2(x) - x\ln(y(x)) + 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad (2x^5y^2(x) - x\ln(y(x)) + 4x)'_x = (0)'_x \quad \Rightarrow$$

$$2\cdot 5x^4 \cdot y^2(x) + 2x^5 \cdot 2y(x)\cdot y'_x - \ln(y(x)) - \frac{x}{y(x)}\cdot y'_x + 4 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$10x^4y^2 + 4x^5y\,y'_x - \ln y - \frac{xy'_x}{y} + 4 = 0 \quad \Rightarrow 10x^4y^3 + 4x^5y^2\,y'_x - y\ln y - xy'_x + 4y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y'_x(4x^5y^2 - x) = y\ln y - 10x^4y^3 - 4y \quad \Rightarrow \quad y'_x = \frac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}.$$

Производная неявно заданной функции y'_x зависит от аргумента x и функции y, поэтому в ответе нужно отразить их взаимосвязь:

$$y'_x = \frac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}, \text{ где } 2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0.$$

<u>Решение задачи 4в</u>.

Функция $y(x)$ задана параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y = \sqrt{1-4t^2} + 1. \end{cases}$ Для нахождения

y'_x

используем формулу (29):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\sqrt{1-4t^2}+1\right)'_t}{\left(\arcsin 2t - 3\right)'_t} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{1-4t^2}}\cdot(-8t)}{\dfrac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2} = \frac{-4t\cdot\sqrt{1-4t^2}}{2\sqrt{1-4t^2}} = -2t \quad \Rightarrow \quad y'_x = -2t$$

(при дифференцировании использованы формулы (24), (25) и «правило цепочки»).

Производная параметрически заданной функции также является функцией, заданной параметрически, поэтому записываем результат в параметрической форме: $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$

Ответы:

а) $y'_x = \dfrac{\left((1-2x)\cdot e^{-2x} + \dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\cdot(1+\sin 4x) - (x\cdot e^{-2x} + 3tgx)\cdot 4\cos 4x}{(1+\sin 4x)^2}$;

б) $y'_x = \dfrac{y\ln y - 10x^4y^3 - 4y}{4x^5y^2 - x}$, где $2x^5y^2 - x\ln y + 4x = 0$;

в) $\begin{cases} x = \arcsin 2t - 3, \\ y'_x = -2t. \end{cases}$

<u>Решение задачи 5</u>.

Найдем ординату точки касания: $y_0 = f(x_0) = 0 + \ln\cos 0 + 2 = \ln 1 + 2 = 2$.

Для вычисления угловых коэффициентов касательной и нормали найдем производную y'_x:

$$y = 3x + \ln\cos x + 2 \quad \Rightarrow \quad y' = 3 + \frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)' + 0 = 3 + \frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x) = 3 - \mathrm{tg}x.$$

Вычислим угловой коэффициент касательной: $k_{кас.} = y'(x_0) = 3 - \mathrm{tg}0 = 3.$

Тогда угловой коэффициент нормали: $k_{норм.} = -\dfrac{1}{y'(x_0)} = -\dfrac{1}{3}$.

Запишем уравнение касательной в точке $M(0;\,2)$ по формуле (30) и приведем его к виду общего уравнения прямой:

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = 3(x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - y + 2 = 0.$$

Запишем уравнение нормали по формуле (31) и аналогично упростим его:

$$y - y_0 = \frac{-1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -\frac{1}{3}\cdot(x - 0) \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{3}x + 2 \;\Leftrightarrow\; x + 3y - 6 = 0.$$

Для построения графика функции $y = f(x)$ в окрестности точки $(x_0;\, y_0)$ вычислим значения функции $y = 3x + \ln\cos x + 2$ в точках, близких к $x_0 = 0$:

$y(-1) = -3 + \ln\cos(-1) + 2 \approx -1 + \ln 0{,}54 \approx -1 - 0{,}6 = -1{,}6$,

$y(1) = 3 + \ln\cos(1) + 2 \approx 5 + \ln 0{,}54 \approx 5 - 0{,}6 = 4{,}4$.

На рис. 29 построены участок графика функции $y = 3x + \ln\cos x + 2$, касательная $3x - y + 2 = 0$ и нормаль $x + 3y - 6 = 0$ в окрестности точки $M(0;\,2)$.

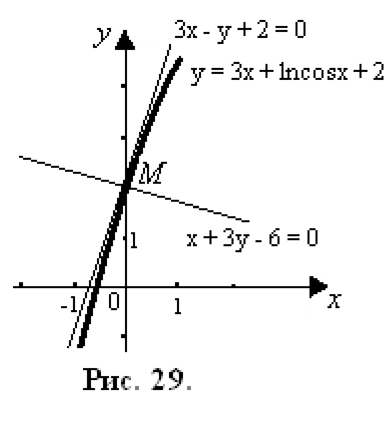

Рис. 29.

Ответы: $3x - y + 2 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$. Графики на рис. 29.

Решение задачи 6.

Проведем полное исследование функции $y = x^2 \cdot e^{1-x}$.

1) ООФ: $x \in (-\infty; +\infty)$, ОЗФ: $y \in [0; +\infty)$, т.к. $e^{1-x} > 0,\ x^2 \geq 0$.

2) Функция не является четной или нечетной, т.к. $f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, эта функция общего вида. Функция непериодическая.

3) Функция непрерывна на всей ООФ. Точек разрыва нет.

4) Промежутки монотонности и экстремумы найдем при помощи 1-й производной:

$$y' = \left(x^2 \cdot e^{1-x}\right)' = 2x \cdot e^{1-x} + x^2 \cdot e^{1-x}(-1) = (2x - x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 1-й производной: $y' = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$; y'_x не существует – таких точек нет.

Проверим выполнение достаточных условий монотонности и экстремума по знаку 1-й производной. На рис. 33 видно, что функция возрастает на интервале $x \in (0; 2)$, убывает на интервалах $x \in (-\infty; 0)$ и $x \in (2; +\infty)$.

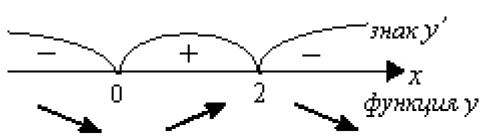

Рис. 33.

В точке $x = 0$ минимум функции, $y_{\min} = y(0) = 0^2 \cdot e^1 = 0$, в точке $x = 2$ максимум, $y_{\max} = y(2) = 2^2 \cdot e^{1-2} = \dfrac{4}{e} \approx 1{,}5$.

5) Выпуклость, вогнутость графика и точки перегиба исследуем при помощи 2-й производной:

$$y'' = \left((2x - x^2) \cdot e^{1-x}\right)' = (2 - 2x) \cdot e^{1-x} + (2x - x^2) \cdot e^{1-x}(-1) = (2 - 2x - 2x + x^2) \cdot e^{1-x} \Rightarrow$$

$$y'' = (2 - 4x + x^2) \cdot e^{1-x}.$$

Критические точки по 2-й производной: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, т.е. $x_1 \approx 0{,}6$, $x_2 \approx 3{,}4$.

Проверим выполнение достаточных условий выпуклости, вогнутости графика функции по знаку 2-й производной. На рис. 34 видно, что график функции выпуклый на интервале $x \in (2-\sqrt{2};\, 2+\sqrt{2})$, и вогнутый на интервалах $x \in \left(-\infty;\, 2-\sqrt{2}\right)$ и $x \in (2+\sqrt{2};\, +\infty)$.

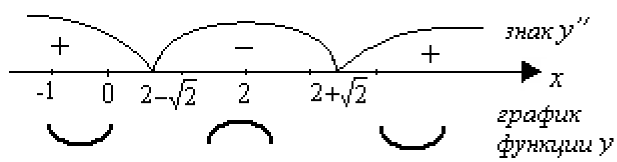

Рис. 34.

В точках с абсциссами $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ имеются перегибы графика; вычисляем ординаты точек перегиба: $y_1 = (2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-1-\sqrt{2}} \approx 1{,}0$, $y_2 = (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \approx 0{,}5$.

6) Найдем наклонные асимптоты графика $y = kx + b$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ (отдельно) по формулам (33), (34).

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \left(бб \cdot бб\right) = -\infty$$

(здесь при $x \to -\infty$ обе функции под знаком предела являются бесконечно большими). Следовательно, при $x \to -\infty$ наклонных асимптот нет.

При $x \to +\infty$ получаем:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} x \cdot e^{1-x} = \left(бб \cdot бм\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = \left(\frac{огр}{бб}\right) = 0;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 \cdot e^{1-x} - 0) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x-1}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} =$$

$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left\{\begin{matrix}\text{правило} \\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = \left(\frac{огр}{бб}\right) = 0$. Следовательно, при $x \to +\infty$ график имеет горизонтальную асимптоту, ее уравнение: $y = 0$.

7) Точка пересечения с осями координат – единственная: (0; 0), т.к.

$$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

8) Построение графика начинаем с построения асимптоты $y = 0$ (она совпадает с осью абсцисс), затем отмечаем точки графика, в которых функция имеет экстремумы: точку минимума (0; 0), максимума $\left(2; \frac{4}{e}\right)$, и точки перегиба ($x_1$; y_1) и (x_2; y_2), где $x_1 \approx 3{,}4$, $y_1 \approx 1{,}0$, $x_2 \approx 0{,}6$, $y_2 \approx 0{,}5$. После этого выполняем построение графика функции $y = x^2 \cdot e^{1-x}$ сначала на промежутках $x \in \left(-\infty; 2-\sqrt{2}\right)$ и $x \in (2+\sqrt{2}; +\infty)$, затем на промежутке $x \in (2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2})$.

На графике (рис. 35) видно сближение кривой с асимптотой $y = 0$ при $x \to +\infty$ и перегибы кривой.

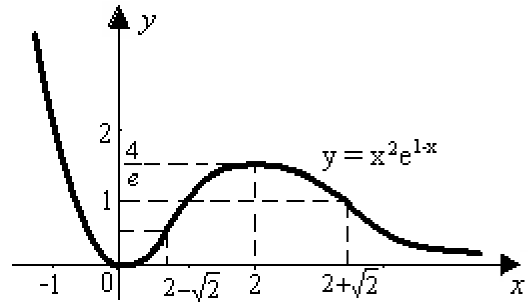

Рис. 35.

Ответ: график на рис. 35.

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Каждый вариант контрольной работы содержит 6 задач по темам «Элементы линейной алгебры. Функции. Дифференциальное исчисление функции одной переменной».

Перед выполнением контрольной работы студенту необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии с методическими указаниями, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта контрольной работы.

Задания для всех вариантов общие; студенту следует выбрать из условия каждой задачи данные, необходимые для ее решения, в соответствии со своим вариантом. Оформление контрольной работы должно соответствовать установленным правилам и требованиям. Необходимые чертежи должны выполняться четко, с соответствующими подписями и комментариями (см. образец выполнения примерного варианта работы).

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Даны многочлен $f(x)$ и матрица A. Требуется найти значение матричного многочлена $f(A)$.

№ варианта	многочлен $f(x)$	Матрица A
1	$f(x)=-x^2+5x+3$	$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
2	$f(x)=-2x^2+4x+7$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

3	$f(x)=3x^2+x+2$	$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$
4	$f(x)=2x-x^2-3$	$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$
5	$f(x)=3x+x^2-2$	$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 5 & -5\end{pmatrix}$
6	$f(x)=2(1-x)^2$	$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$
7	$f(x)=(3-x)^2$	$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 7 & -5\end{pmatrix}$

8	$f(x)=-3(x^2-x+1)$	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -4\\ 1 & 3 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$
9	$f(x)=2x-x^2+1$	$A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$
10	$f(x)=4(x^2-x)-3$	$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Задача 2. Дана система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными.

№ варианта	Система уравнений	№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1, \\ -2x_1+3x_2-3x_3=10, \\ 3x_1+5x_3=-11. \end{cases}$	6	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0, \\ 3x_1-x_3=10, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=10. \end{cases}$
2	$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=9, \\ -x_1+x_2+3x_3=2, \\ -x_2+x_3=3. \end{cases}$	7	$\begin{cases} -x_1+x_3=5, \\ x_1+x_2-2x_3=-9, \\ 2x_1+2x_2+x_3=-3. \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=3, \\ 2x_1-x_2+2x_3=-2, \\ x_2-2x_3=0. \end{cases}$	8	$\begin{cases} -3x_1+x_2=-5, \\ 2x_1-3x_2+x_3=4, \\ -x_1+4x_2-2x_3=-1. \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=2, \\ 4x_1+x_2+x_3=4, \\ x_1+x_3=-1. \end{cases}$	9	$\begin{cases} x_1-3x_2+2x_3=4, \\ x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2+3x_3=-3. \end{cases}$
5	$\begin{cases} 3x_1-4x_2-2x_3=-1, \\ -2x_1+x_2=3, \\ x_1+x_2+3x_3=-9. \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=8, \\ 2x_1+x_3=-1, \\ x_1+2x_2-3x_3=-14. \end{cases}$

Требуется:

1) записать систему в матричном виде;
2) найти решение системы с помощью формул Крамера;
3) решить систему при помощи обратной матрицы.

Задача 3. Вычислить пределы, применяя правила раскрытия неопределенностей, основные теоремы о конечных пределах, теоремы о бесконечно малых и бесконечно больших функциях. Ответы пояснить с точки зрения определения предела.

№ варианта	Пределы
1	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-n^2}{n^2+5n-2}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{3x+1}-5}{x^2-8x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg(\sin\sqrt{x})}{e^{3x}-1}$
2	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+7n^2+n-1}{6n^2+3n}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x^2-8x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-1}{\sin\sqrt{2x}}$
3	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+2}{3n^4-10}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2+5x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{\ln(1+2x)}$.
4	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+4n-1}{n^2-9n}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg(3x-x^2)}{5^{1-x^2}-5}$
5	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-n^2+3n-4}{n^3+12n^2+5n+3}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{2x^2-3x-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 6x)}{\arcsin 3x}$
6	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{12+n+n^2}{7n+25}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2+x}-1}{x^2-3x-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(x\cdot\sin x)}{4^{3x}-4^{x}}$.
7	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-1}{n^2+4n+4}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{2-x^2}-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-5x)}{\cos 3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+2}{8x+5}\right)^{x-4}$.

8	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-10n+3}{1-2n}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x-4}}{x^2-6x+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x-\sin x}{\operatorname{arctg}\sqrt{5x}}$
9	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+12n-1}{n^2+3}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2-5x-9}{x+\sqrt{5x+6}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 2x}{\arcsin\left(x^3\right)}$
10	а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5+n^3+3n}{2n^4-n^2-n^5}$, $n\in N$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(e^{3x}-1)}{\ln(1+2x^3)}$

Задача 4. Найти производную y'_x:

№ варианта	Функции		
	а)	б)	в)
1	$y=\frac{\operatorname{arctg}5x}{1+\ln 3x}$	$3x^2+4xy-\sin y=0$	$\begin{cases} x=t^2\cdot e^{3t}, \\ y=t\cdot e^{-t}\end{cases}$
2	$y=\frac{\cos 5x}{1+3x^2}$	$e^y+2xy-6x=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{1+3t^2} \\ y=\ln(1+3t^2)\end{cases}$
3	$y=\frac{e^{4x}}{2-x+3x^2}$	$3xy-\cos y+2x^3=0$	$\begin{cases} x=\arcsin 3t, \\ y=\ln(1-9t^2)\end{cases}$
4	$y=\frac{5x^2+4}{\arccos(3x)}$	$\sin y+xy^2-5x^3=0$	$\begin{cases} x=t\cdot\operatorname{ctg}2t, \\ y=2\sqrt{t^5}-3t\end{cases}$
5	$y=\frac{\ln(5x+2)}{1+2x+x^2}$	$4xy-\sqrt{y}-x^5=0$	$\begin{cases} x=\frac{1}{\cos 5t}, \\ y=\operatorname{tg}5t-4\end{cases}$
6	$y=\frac{4^{x+2}}{5x+3x^2}$	$\arcsin x+x^3y^3-3y^4=0$	$\begin{cases} x=\ln t\cdot(t+1), \\ y=\frac{1}{2}t^2+t\end{cases}$

7	$y=\dfrac{\ln 5x}{\cos 4x}$	$xy^2-e^y+3x^2=0$	$\begin{cases} x=\dfrac{1}{(t+1)^2}, \\ y=\dfrac{t-4}{t+1} \end{cases}$
8	$y=\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sqrt{1+3\text{x}}}$	$xy^2-\ln y-7x=0$	$\begin{cases} x=t\cdot\sin 2t, \\ y=t-\cos t \end{cases}$
9	$y=\dfrac{\operatorname{arcctg}7x}{3x^2-2}$	$3e^{2y}-xy+6x^2=0$	$\begin{cases} x=2t-\ln^2 t, \\ y=\dfrac{t^2-1}{t} \end{cases}$
10	$y=\dfrac{e^{4x+3}}{\ln(x)+2}$	$x^5y^3-\operatorname{tg}x-2y=0$	$\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=2+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Задача 5. Дана функция $y=f(x)$ и значение x_0.

№ варианта	Функция	Точка
1	$y=\ln\dfrac{2-x}{x^3}$	$x_0=1$
2	$y=\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$	$x_0=4$
3	$y=e^{3x}(x+1)$	$x_0=0$
4	$y=\ln(2x^2-2x-3)$	$x_0=2$
5	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$	$x_0=1$
6	$y=x-2\operatorname{arctg}x+1$	$x_0=0$
7	$y=\arcsin 3x+3$	$x_0=0$
8	$y=\dfrac{\ln x+1}{x+1}$	$x_0=1$
9	$y=\sqrt[3]{2-x^3}$	$x_0=1$
10	$y=e^{\sin 2x}$	$x_0=0$

Найти уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Построить графики функции, касательной и нормали в окрестности точки $(x_0, f(x_0))$.

Задача 6. Провести полное исследование функции и построить ее график.

№ варианта	Функция
1	$y = e^{4x - x^2 - 5}$
2	$y = \ln(x^2 - 2x)$
3	$y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
4	$y = (3 - x)e^{x-2}$
5	$y = \dfrac{1}{\ln x}$
6	$y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$
7	$y = xe^{-x}$
8	$y = \sqrt{x} \cdot \ln x$
9	$y = \dfrac{e^x}{1 - x}$
10	$y = \ln\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- Москва : Айрис-пресс, 2011. - 602, [1] с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 212.
2. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург : Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003, 2001. - 432 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 781.

Дополнительная литература

1. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Профессия, 2007, 2003 ; Москва. - 200 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 378.
2. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 815 с.: ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 30.