МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «МГТУ»)

«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК имени И.И. Месяцева
________________ И.В. Артеменко
(подпись)
«29» мая 2020 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 26.02.06 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2020

Рассмотрено и одобрено на заседании Методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Разработано на основе ФГОС СПО по специальности 26.02.06 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014 г. № 444

Председатель МКо (МО/ ЦК)

Е.А. Чекашова

Протокол от «29» мая 2020 г.

Автор (составитель): Гарифуллина Е.А., преподаватель высшей категории, «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Эксперт (рецензент) Чернюк Л.А., преподаватель высшей категории «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата, подпись

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Содержание

Раздел 1. Комплексные числа 11
Тема 1.1. Комплексные числа 11
Практическая работа № 1. Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. 11
Практическая работа №2. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах 15
Раздел 2. Математический анализ 19
Тема 2.1. Дифференциальное исчисление 19
Практическая работа №3. Вычисление пределов функций. 19
Практическая работа № 4. Дифференцирование функций. Нахождение частных производных. 24
Тема 2.2. Интегральное исчисление 28
Практическая работа №5. Методы нахождения неопределённого интеграла. 28
Практическая работа № 6. Вычисление определенного интеграла. 36
Тема 2.3. Дифференциальные уравнения. 44
Практическая работа № 7. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка. 44
Практическая работа № 8. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка. 49
Тема 2.4. Ряды. 53
Практическая работа № 9. Исследование числовых рядов на сходимость. 53
Практическая работа № 10. Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена. 57
Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики. 62
Тема 4.1. Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения 62
Практическая работа № 11. Элементы комбинаторики. 62
Практическая работа №12. Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей. 66
Тема 4.2. Элементы математической статистики. 72
Практическая работа №13. Определение числовых характеристик случайных величин. 72
Раздел 5. Основные численные методы. 79
Тема 5.1. Численное интегрирование 79
Практическая работа №14. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности 79
Тема 5.2. Численное дифференцирование. 83
Практическая работа №15. Численное дифференцирование функций с использованием интерполяционных формул Ньютона. 83

Введение

1.1 Методические указания по практическим работам обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 26.02.06 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014 г. № 444

1.2 Цели и задачи практической (лабораторной) работы - требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

уметь:

У1 решать простые дифференциальные уравнения;
У2 применять основные численные методы для решения прикладных задач

знать:

З1 - основные понятия и методы математического анализа;
З2 основы теории вероятностей и математической статистики;
З3 основы теории дифференциальных уравнений

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1).

Таблица 1 - Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	У 1,У2, З1, З2, З3

ОК 6.	Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 7.	Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 10.	Владеть письменной и устной коммуникацией на государственном и иностранном (английском) языке.	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.1.	Обеспечивать оптимальный режим работы электрооборудования и средств автоматики с учетом их функционального назначения, технических характеристик и правил эксплуатации	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.2.	Измерять и настраивать электрические цепи и электронные узлы	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.3.	Выполнять работы по регламентному обслуживанию электрооборудования и средств автоматики	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.4.	Выполнять диагностирование, техническое обслуживание и ремонт судового электрооборудования и средств автоматики	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.5.	Осуществлять эксплуатацию судовых технических средств в соответствии с установленными правилами и процедурами, обеспечивающими безопасность операций и отсутствие загрязнения окружающей среды	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.1.	Организовывать мероприятия по обеспечению транспортной безопасности	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.2.	Применять средства по борьбе за живучесть судна	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.3.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при организации учебных пожарных тревог, предупреждения возникновения пожара и при тушении пожара	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.4.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при авариях	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.5.	Оказывать первую медицинскую помощь пострадавшим	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.6.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при оставлении судна, использовать спасательные шлюпки, спасательные плоты и иные спасательные средства	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.7.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна по предупреждению и предотвращению загрязнения водной среды	У 1,У2, З1, З2, З3

2. Тематический план видов практических работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы обучающихся	Аудиторная учебная нагрузка, час	Практическая работа обучающегося, час
1	2	4	5
Раздел 1.	**Комплексные числа**	**6**	**4**
Тема 1.1.	**Комплексные числа**	**6**	**4**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 1. Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.	**2**	**2**
	№ 2. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.	**2**	**2**
Раздел 2	**Математический анализ.**	**24**	**16**
Тема 2.1.	**Дифференциальное исчисление**	**6**	**4**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 3. Вычисление пределов функций.	**2**	**2**
	№ 4. Дифференцирование функций. Нахождение частных производных.	**2**	**2**
Тема 2.2.	**Интегральное исчисление**	**6**	**4**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 5. Методы нахождения неопределённого интеграла.	**2**	**2**
	№ 6. Вычисление определённого интеграла.	**2**	**2**
Тема 2.3.	**Дифференциальные уравнения.**	**6**	**4**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 7. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.	**2**	**2**
	№ 8. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка.	**2**	**2**
Тема 2.4.	**Ряды.**	**6**	**4**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 9. Исследование числовых рядов на сходимость.	**2**	**2**
	№ 10. Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена.	**2**	**2**
Раздел 4.	**Основы теории вероятностей и математической статистики.**	**10**	**4**
Тема 4.1.	**Вероятность случайного события. Теоремы сложения и**	**6**	**4**

	умножения		
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 11. Элементы комбинаторики.	**2**	**2**
	№ 12. Решение задач на нахождение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения.	**2**	**2**
Тема 4.2..	**Элементы математической статистики**	**4**	**2**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 13. Определение числовых характеристик случайных величин.	**2**	**2**
Раздел 5.	**Основные численные методы.**	**8**	**4**
Тема 5.1.	**Численное интегрирование**	**4**	**2**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 14. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешностей.	**2**	**2**
Тема 5.2..	**Численное дифференцирование**	**4**	**2**
	Практическая (лабораторная) работа		
	№ 15. Численное дифференцирование функций с использованием интерполяционных формул Ньютона.	**2**	**2**

Раздел 1. Комплексные числа

Тема 1.1. Комплексные числа

Практическая работа № 1. Представление комплексного числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Цель работы: научиться: представлять комплексное число в различных формах, изображать комплексного числа, применять понятия комплексных чисел для решения уравнений второй степени.

Оснащение: теоретические материалы «Формы записи комплексного числа»; дидактические карточки с заданиями практической работы №1.

Задания для самостоятельного решения.

1. Упростить:

1.1. $\dfrac{5j^5-3j^{31}+4j^{10}-5j^{20}}{4j^2-3j^{27}+2j^{50}}$ 1.2. $\dfrac{5j^{11}+4j^{18}-3j^{32}+2j^{17}}{2j^4+3j^{42}-3j^{61}}$

1.3. $\dfrac{2j^{18}-5j^{32}+3j^{23}-4j^{33}}{3j^{10}-2j^{23}+j^{16}}$ 1.4. $\dfrac{3j^{11}-2j^{33}-2j^{14}+4j^{60}}{2j^4-5j^9+3j^{21}}$

2. Найти действительные числа *x* и *y* из условия равенства двух комплексных чисел:

2.1. $5x-2y+(x+y)j=4+5j$ 2.2. $5xj-2+4y=9j+2x+3y\cdot j$

2.3. $9+2xj+4yj=10j+5x-6y$ 2.4. $2xj+3yj+17=3x+2y+18j$

3. Постройте данные комплексные числа и им сопряженные одной в координатной плоскости. Найдите главное значение аргумента и модуль данного комплексного числа.

3.1 $z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+j$ 3.2 $z=-\sqrt{3}+j$ 3.3 $z=1+j\sqrt{3}$ 3.4 $z=-2-2j$

4. Комплексное сопротивление для цепи, составленной из последовательно соединенных сопротивлений и емкости равно $Z=r-j\cdot x_c$ Ом. Найти модуль, аргумент и записать комплексное сопротивление в показательной и тригонометрической форме.

4.1 $Z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}j$ 4.2 $Z=1-j\cdot\sqrt{3}$ 4.3 $Z=\sqrt{3}-j$ 4.4 $Z=-3+4j$

5. Представьте комплексное число в алгебраической форме, показательной форме.

5.1. $z=5\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+j\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ 5.2. $z=4\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)+j\sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\right)$

5.3. $z=2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-j\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ 5.4. $z=\cos\pi+j\sin\pi$

6. Комплексная величина тока задана в показательной форме. Записать закон изменения синусоидального тока в тригонометрической форме и алгебраической форме

6.1. $z = 4e^{\frac{-\pi}{4}j}$ 6.2. $z = 1{,}8e^{\frac{11\pi}{3}j}$ 6.3. $z = 5e^{\frac{7\pi}{6}j}$ 6.4. $z = 2{,}4e^{24j}$

7. Решить уравнение

7.1. $x^2 + 4x + 20 = 0$ 7.2. $x^2 - 2x + 10 = 0$

7.3. $2x^2 - x + 5 = 0$ 7.4. $x^2 + 6x + 25 = 0$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе.

1. Мнимая единица. **2.** Определение комплексного числа. **3.**Алгебраическая форма записи комплексного числа. **4.** Модуль и аргумент комплексного числа**. 5.** Изображение комплексного числа. **6.** Тригонометрическая форма записи комплексного числа. **7.** Показательная форма записи комплексного числа. **8.** Разложение многочлена на множители. Решение рациональных уравнений n –й степени.

Справочные материалы.

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (a,b) действительных чисел. Число a называется действительной частью комплексного числа z, число b называется мнимой частью комплексного числа z. *Обозначения*: $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.

Комплексным числом (в алгебраической форме) называется выражение вида $z = a + jb, \text{где} \quad a,b - \text{действительные} \quad \text{числа}, j^2 = -1.$

Утверждение: Если показатель степени числа j делится на 4, то значение степени равно 1; если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно j; если при делении показателя степени на 4 получается остаток 2, то значение степени равно -1; наконец при делении на 4 получается остаток 3, то значение степени равно $-j$.

Если $x = 0$, то число $0 + j \cdot b = j \cdot b$ называется чисто мнимым, если $y = 0$, то получается действительное число $a + j \cdot 0 = a$.

Два комплексных числа $a_1 + jb_1$ *и* $a_2 + jb_2$ называются **равными**, если $a_1 = a_2$ *и* $b_1 = b_2$.

Комплексное число $a - jb$ называется комплексно **сопряженным** с числом $a + jb$ и обозначается $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = \overline{a + jb} = a - jb$.

Комплексные числа вида $a + jb$ *и* $-a - jb$ называются **противоположными**.

Представление комплексных чисел на комплексной плоскости. Каждое комплексное число $z = (a, b)$ - точка на комплексной плоскости. Комплексной плоскостью называют координатную плоскость (обозначают C), ось Ox - *действительная ось*, ось Oy - *мнимая ось*. Единица действительной оси есть число 1, единица мнимой оси – мнимая единица j.

Модулем комплексного числа $z = a + jb$ называется число $\sqrt{a^2 + b^2}$. $|z| = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число.

Аргумент φ комплексного числа $z = a + jb$ записывается: $\varphi = \arg z$ *или* $\varphi = \arg(a + jb)$. Для числа z = 0 аргумент не определен.

Представление комплексного числа в виде $z = a + j \cdot b = r(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$, где $r \succ 0$, называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа. Если каждому значению комплексной переменной *z* из некоторой области комплексных значений соответствует определенное значение другой комплексной величины ω, то ω есть функция комплексной переменной *z*. Функции комплексного аргумента обозначают: $\omega = f(x)$ *или* $\omega = \omega(z)$. Комплексные значения функции ω определяется так: $e^{a + j \cdot b} = e^a(\cos b + j \cdot \sin b,)(1)$ *т.е.* $\omega(z) = e^a(\cos b + j \cdot \sin b,)$.

Функция $\omega = e^{a + jb} = e^a(\cos b + j \sin b)$ называется **уравнением Эйлера.**

$z = re^{j\varphi}$ **- показательная форма комплексного числа.**

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

Сформулируйте определение понятия комплексного числа. Перечислите формы записи комплексного числа.

Сформулируйте определение понятия геометрическая интерпретация комплексного числа. Изобразите комплексное число. Сформулируйте определение модуля комплексного числа, аргумент, главное значение аргумента.

Сформулируйте определение понятия тригонометрическая форма комплексного числа. Запишите тригонометрическую форму комплексного числа $z = 1 + j$.

Воспроизведите алгоритм для перехода из алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую форму.

Сформулируйте определение понятия показательная форма комплексного числа.

Найдите ошибку в рассуждении обучающегося: «Очевидно, что $j^{21} = \left(j^4\right)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$. С другой стороны: $j^{21} = \left(j^4\right)^5 \cdot j = 1 \cdot j = j$. Следовательно $j = 1$.»

Определите: какое число изображает точка B, симметричная точке A, изображающей комплексное число относительно: а) действительной оси; б)мнимой оси; в) начала координат? $z = a + jb$

Объясните, какие знаки имеют a и b, если аргумент φ комплексного числа $z = a + bj$ удовлетворяет условиям: а) $\varphi = 0$ б) $0 \prec \varphi \prec \frac{\pi}{2}$ в) $-\frac{\pi}{2} \prec \varphi \prec 0$ г) $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Приведите пример комплексных чисел, которым соответствуют два перпендикулярных вектора.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа №2. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.

Цель работы: закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах записи.

Оснащение: теоретические материалы «Действия с комплексными числами в различной форме»; дидактические карточки с заданиями практической работы №2.

Задание для самостоятельной работы:

1. С предложенными числами выполнить действия а) $z_1 - z_2$; б) $z_1 + \bar{z}_2$; в) $\frac{z_1}{z_2}$ в алгебраической форме.

1.1. $z_1 = -3 + 5j \quad z_2 = 2 - j$ 1.2. $z_1 = -6 + 4j \quad z_2 = 4 + 3j$

1.3. $z_1 = -10 + 8j \quad z_2 = 4 - 2j$ 1.4. $z_1 = 2 + 3j \quad z_2 = 1 - 2j$

2. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) $\frac{Z_1}{Z_2}$; в) Z_2^2

2.1. $z_1 = -\sqrt{3} - j \quad z_2 = 2 - 2j$ 2.2. $z_1 = 6j \quad z_2 = -2 + 2\sqrt{3}j$

2.3. $z_1 = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}j \quad z_2 = -1 + j$ 2.4. $z_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad z_2 = 8 - 8\sqrt{3}j$

3. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) $\frac{Z_1}{Z_2}$; в) z^3

3.1. $z_1 = -6 - 6\sqrt{3}j \quad z_2 = -1 - j$ 3.2. $z_1 = -4 - 4j \quad z_2 = -4 + 4\sqrt{3}j$

3.3. $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j \quad z_2 = -5j$ 3.4. $z_1 = 2 - 2j \quad z_2 = -\sqrt{3} + j$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. Подготовьтесь для защиты работы, используя вопросы для самоконтроля.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Алгебраическая форма записи комплексного числа. **2.** Модуль и аргумент комплексного числа. **3.** Действия над комплексными числами в алгебраической форме**. 4.**Тригонометрическая форма записи комплексного числа. **5.**Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. **6.**Показательная форма записи комплексного числа. **7.**Действия над комплексными числами в показательной форме.

Справочные материалы.

Суммой двух комплексных чисел $a_1 + jb_1$ и $a_2 + jb_2$ называется комплексное число $(a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$. (1)

Разностью двух комплексных чисел $a_1 + jb_1$ и $a_2 + jb_2$ называется комплексное число $(a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2)$. (2) $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$

Произведением двух комплексных чисел $a_1 + jb_1$ и $a_2 + jb_2$ называется комплексное число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$. (3)

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + jb_2) = a_1 a_2 + ja_1 b_2 + jb_1 a_2 + j^2 b_1 b_2$$

Делением двух комплексных чисел $a_1 + jb_1$ и $a_2 + jb_2$ осуществляется по правилу:

$$\frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + j \cdot \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \ (4)$$

При умножении двух комплексных чисел, заданных **в тригонометрической форме**, их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$$

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются.

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + j\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$$

Возведение комплексного числа в n-ю степень совершается по формуле Муавра:

$$[r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi), n \in \mathrm{Z}$$

Извлечение корня *n*-й степени из комплексного числа: Корнем n-й степени ($n \in \mathrm{N}$) из числа z называется такое число w, что $w^n = z$.

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + j\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \textit{где } \sqrt[n]{r} \textit{ арифметический корень,}$$

$$k = 0,1,2,3,\ldots n-1.$$

Умножение, деление, возведение в целую положительную степень и извлечение корня целой положительной степени для комплексных чисел, заданных в **показательной форме,** выполняются по следующим формулам:

$$1)\, r_1 e^{j\varphi_1}\cdot r_2 e^{j\varphi_2} = r_1\cdot r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad 2)\, \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} \qquad 3)\, \left(re^{j\varphi}\right)^n = r^n e^{jn\varphi}$$

$$4)\, \sqrt[n]{re^{j\varphi}} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}j}, \quad k = 0,1,2,\ldots n-1$$

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

Записать действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Записать действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

Записать действия над комплексными числами в показательной форме. Записать формулу Муавра.

Приведите примеры комплексных чисел и действий над ними, результат которых есть действительное число.

Как умножить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме? в показательной форме?

Сколько значений имеет корень n – й степени из комплексного числа?

Произведите действия в тригонометрической форме $6(\cos 230^0 + j \cdot \sin 230^0) \cdot \left(\cos 70^0 + j \cdot \sin 70^0\right) \cdot 2$

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1. Дифференциальное исчисление

Практическая работа №3. Вычисление пределов функций.

Цель работы: закрепить навыки нахождения пределов функции в точке и на бесконечности;

Оснащение: материалы с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 3

Задания для самостоятельного решения:

1. Напишите первые пять членов последовательностей, n-ый член которых выражается формулой:

1.1. $\frac{n^2}{n+1}$; 1.2. $\frac{3n-1}{n+1}$; 1.3. $\frac{(-1)^n}{n^2+4}$; 1.4. $1-(-1)^n$.

2. По заданным первым членам последовательности подберите одну из формул для n-го члена:

1.1. $\frac{1}{2},\frac{2}{2^2},\frac{3}{2^3},\frac{4}{2^4},\dots$ 1.2. 1,-2,3,-4,… 1.3. $\left(\frac{1}{3}\right)^2,\left(\frac{2}{5}\right)^2,\left(\frac{3}{7}\right)^2,\dots$ 1.4. $\frac{-1}{1},\frac{1}{2},\frac{-1}{3},\frac{1}{4}$

3. Найти пределы числовых последовательностей.

3.1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{5+n-n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$

3.2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+4}{7-5n+n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} tg 3x$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ 5) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$

3.3. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^2+2n+5n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+5x}{2}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ 5) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

3.4. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^4+n^3+n^2}{n+n^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} tg 5x$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

4. Найти асимптоты графика функции.

4.1. 1) $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$; 2) $y=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

4.2. 1) $y=\dfrac{-1x^2+3}{x-2}$; 2) $y=-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

4.3. 1) $y=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$; 2) $y=2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

4.4. 1) $y=\dfrac{-2x^2+6}{x-2}$; 2) $y=-2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Предел последовательности. Свойства пределов последовательности. **2.** Раскрытие неопределенностей. **3.** Первый и второй замечательные пределы. **4.** Асимптоты функции.

Справочный материал.

Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Правила для вычисления пределов

1. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{k}{x^m}\right)=0$

2. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b,\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=c,$ то

а) предел суммы равен сумме пределов: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)+g(x)\right)=b+c$

б) предел произведения равен произведению пределов $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=b\cdot c$

в) предел частного равен частному от деления пределов ($c\neq 0$,$g(x)\neq 0$) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot b$

3. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности. $\lim\limits_{x\to\infty} C=C$.

Бесконечно большие и бесконечно малые величины.

Утверждение:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,$ *то функция называется бесконечно большой при* $x\to a$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ *то функция называется бесконечно малой при* $x\to a$

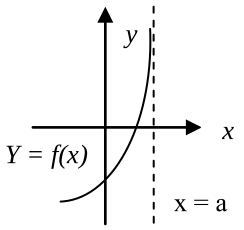
1. Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Сумма бесконечно большой функции и конечной функции есть бесконечно большая функция, а частное таких функций бесконечно малая.
3. Если *f(x)* бесконечно малая, то ей обратная функция - бесконечно большая.

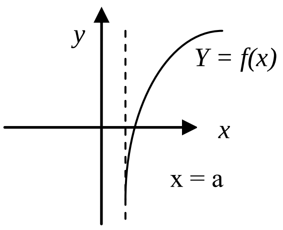
Есть особые случаи, когда предел суммы, произведения или частного нельзя найти, зная только пределы слагаемых, сомножителей или делимого и делителя. Такие случаи называются неопределенностями.

Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ пользуются алгебраическими методами разложения числителя и знаменателя (или одного из них) на сомножители, затем производят сокращение, иногда проще раскрывать неопределенность вида $\frac{0}{0}$ делением числителя на знаменатель или наоборот, как делением многочлена на многочлен.

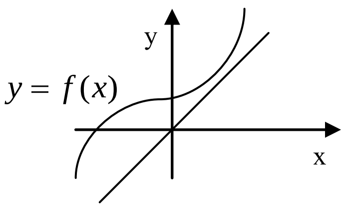
Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель делят на x в максимальной степени, все члены, содержащие x в меньшей степени, будут стремиться к нулю.

Вертикальные асимптоты – прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ в точке a, если хотя бы один из разносторонних пределов равен бесконечности. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$





Если функция задана дробно-рациональным выражением, то вертикальная асимптота появляется в тех точках, когда знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю.



Наклонная асимптота – прямая $y = k \cdot x + b$ наклонная асимптота функции $y = f(x)$, если эта функция представлена в виде $f(x) = k \cdot x + b + \alpha(x), при \lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$

Необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты:

Для существования наклонной асимптоты $y = k \cdot x + b$ к графику функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно существование конечных пределов: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right]$

Горизонтальные асимптоты. График функции имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, если существует и конечен, хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, то говорят, что функция не имеет горизонтальную асимптоту.

Схема отыскания асимптот:

1) Для отыскания вертикальных асимптот выписывают все точки разрыва функции и конечные числа на границе области определения. Если таких точек нет, то нет и вертикальных асимптот.

Если такая точка $x = a$ имеется, то вычисляют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Если, хотя бы один из пределов существует и бесконечен, то $x = a$ - вертикальная асимптота. Если оба предела не существуют или конечны, то $x = a$ не является вертикальной асимптотой.

2) Для отыскания наклонных асимптот вычисляют $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x \right]$. Если оба предела существуют и конечны, то $y = k \cdot x + b$ - наклонная асимптота.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию предел функции. Перечислить правила нахождения пределов функции. Сформулировать первый и второй замечательные пределы.

Дать определение понятиям: непрерывная функция в точке, на промежутке. Дать определение понятию точка разрыва. Изобразить виды точек разрыва. Перечислить свойства непрерывных функций.

Дать определение понятию предел функции на бесконечности. Дать определение понятиям: бесконечно малая, бесконечно большая величина. Перечислить свойства для бесконечно малой и бесконечно большой величин.

Перечислить виды неопределенностей. Указать способы избавления от неопределенностей.

Дать определение понятию асимптота. Классифицировать виды асимптот. Объяснить способы нахождения различных асимптот.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.

2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.

3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.

4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа № 4. Дифференцирование функций. Нахождение частных производных.

Цель работы: закрепить навыки нахождения производной функции; умение дифференцировать сложную функцию.

Оснащение: таблицы с формулами дифференцирования; теоретические сведения по теме «Производная»; дидактические карточки с заданиями практической работы № 4.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти производную функции при данном значении аргумента

1.1. $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}, \quad x=\sqrt{3}$

1.2 $f(x)=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}, \quad x=0$

1.3 $f(x)=\ln\frac{x+1}{x}, \quad x=3$

1.4. $f(x)=\frac{e^{-3x}-e^{3x}}{3}, \quad x=0$

2. Составить уравнение касательной к кривым в указанных точках

2.1 $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3, \quad x = 2$

2.2 $y = \dfrac{2x+3}{2x-1}, \quad x = 0$

2.3. $y = \sqrt{5x-9}, \quad x = 0$

2.4. $y = \ln(1+x), \quad x = 0$

3. Найти наибольшее значение функции на заданном отрезке

3.1. $y = (1-\cos x)\cdot \sin x, \quad \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

3.2. $y = \ln\cos 7x + \sqrt{\dfrac{x}{\pi}}, \quad \left[\dfrac{\pi}{4}; \pi\right]$

3.3. $y = \sqrt{\cos 4x}, \quad \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

3.4 $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}, \quad \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$

4. Исследовать функцию на выпуклость и точки перегиба.

4.1 $y = e^{2x} - 4e^x + 2$

4.2 $y = x^2 \cdot \ln x$

4.3 $y = (x-1)^4 \cdot (3x+7)$

4.4 $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$

5. Найти дифференциалы функций.

5.1 $y = e^{\sin(2x-4)}$

5.2 $y = (1+\cos x)\cdot \sin x$

5.3 $y = \dfrac{e^x}{e^x - 2}$

5.4 $y = e^{x^2 - 4x + 1}$

6. Найти частные производные функции первого порядка.

6.1 $z = \dfrac{2x-3y}{2x+3y}$

6.2 $z = \dfrac{x-3y}{2x+4y}$

6.3 $z = e^{-\frac{2x+y}{5y-x}}$.

..6.4 $z = \dfrac{x^2 - y}{2x + y^2}$.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Производная функции (определение). **2.** Механический смысл производной. **3.** Общее правило нахождения производной. **4.** Правила дифференцирования суммы, произведения, частного двух функций. **5.** Таблица производных основных элементарных функций. **6.** Сложная функция (определение). **7.** Правило дифференцирования сложной функции. **8.** Примечания к правилу дифференцирования функций. **9.** Признаки возрастания и убывания функции. **10.** Экстремум функции. Точки экстремума. **11.**Геометрический и физический смысл производной. **12.**

Исследование функции с использованием производной. **13.** Понятие дифференциала функции. **14.** Понятие частной производной.

Справочные материалы.

Производной функции *f* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx , при условии, что $\Delta x \to 0$,т.е. $y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Правила дифференцирования

I. $C' = 0,\quad C - \textit{постоянная}.$ **IV.** $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, Ñ – ïîñòîÿííàÿ . **II.** $(u \pm v)' = u' \pm v'$ **V.** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ **III.** $(uv)' = u'v + uv'$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции *f*(*x*). Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$

Пусть: $z = f(y)$ - дифференцируема в точке y_0 , $y = \varphi(x)$ - дифференцируема в точке x_0 , $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда **сложная функция** $z = f(\varphi(x))$ - дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула: $z'_x = z'_y \cdot y'_x = f'(y) \cdot \varphi'(x)$ $\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Касательной к кривой в точке называется прямая, которая является предельным положением секущей.

Уравнение касательной может быть записано в виде: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Если закон движения материальной точки задан уравнением $S = f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определенный момент времени нужно найти производную $S' = f'(t)$ и подставить в неё соответствующее значение t. Механическое истолкование производной: $V = \frac{ds}{dt} = S'(t).$

Ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

Теорема (достаточные условия): Если функция *f*(*x*) дифференцируема на интервале (*a*; *b*) и $f'(x) \succ 0 \quad (f'(x) \prec 0)$, то эта функция возрастает (убывает) на данном интервале.

Возрастающие или убывающие функции называются **монотонными**

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются <u>критическими.</u>

Теорема (необходимые условия): Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) в данном интервале $(a;b)$, то производная этой функции неотрицательна $f'(x) \geq 0$. (не положительна $f'(x) \leq 0$) в этом интервале.

Дифференциал функции - это произведение производной $f'(x_0)$ и приращения аргумента Δx: $df = f'(x_0)\Delta x$ *или* $\boxed{dy = y' \cdot dx} \rightarrow y' = \dfrac{dy}{dx}$ **Формула для вычисления приближенных значений** $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x$ **Дифференциал второго порядка** - дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 f = f'(x)dx^2$.

Частной производной функции $z = f(x,y)$ по переменной х называется производная этой функции при постоянном значении переменной у; она обозначается $\dfrac{dz}{dx}$, z'_x

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию производная. Записать правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций.

Дать определение понятию дифференциал функции. Объяснить понятия: производные и дифференциалы высших порядков.

Сформулировать понятие физический смысл производной. Записать и изобразить в чем заключается физический смысл производной.

Дать определение понятию геометрический смысл производной. Объяснить в чем заключается отличие значения производной от положения касательной к графику функции. Записать уравнение касательной.

Изложить приложение производной на примере исследования функции. Рассказать о понятиях монотонность, экстремум (точки экстремума), выпуклость, точки перегиба.

Найдите производную сложной функции $\left(\sin^2\left(3x^2 - 4x\right)\right)'$.

Запишите уравнение нормали.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Тема 2.2. Интегральное исчисление

Практическая работа №5. Методы нахождения неопределённого интеграла.

Цель работы: научиться находить неопределенный интеграл различными методами;

Оснащение: карточки с формулами интегрирования; теоретический материал по теме «Неопределенный интеграл. Методы решения»; дидактические карточки с заданиями практического занятия № 5.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.

1.1. $\int\left(9x^6-2x^3+5x-1\right)dx$ .. .

1.2. $\int\left(4x^4+3x^2-2x+5\right)dx$

1.3. $\int\left(6-x-2x^2+5x^4\right)dx$

1.4. $\int\left(8x^4-3x^2+7x-3\right)dx$

2. Найти неопределенный интеграл методом подстановки.

2.1. $\int\sqrt[3]{(4-x)^2}\,dx$

2.2. $\int(5+2x)^7\,dx$

2.3. $\int(8x-1)^9\,dx$

2.4.. $\int\sqrt[4]{(3x-2)^3}\,dx$

3. Найти неопределенный интеграл от произведений синуса и косинуса.

3.1. $\int\cos^5 x\cdot\sin x\,dx$

3.2. $\int\sin^3 x\cos x dx$

3.3. $\int\sin^5 x\cos x dx$

3.4. $\int\cos^7 x\cdot\sin x dx$

4. Найти неопределенный интеграл рациональной дроби.

4.1. $\int\frac{dx}{(2x-1)(2x+3)x}$.

4.2. $\int\frac{x-1}{x(x+4)(x+3)}dx$.

4.3. $\int\frac{x}{(x-1)(x-4)(x+7)}dx$.

4.4. $\int\frac{x-1}{x(x+8)(x-7)}dx$.

5. Найти функцию по её дифференциалу.

5.1.Найти функцию по её дифференциалу $dy=\left(\cos 2x-6\sin^2 x\cdot\cos x\right)dx$, если функция принимает значение 2 при $x=\frac{\pi}{2}$.

5.2. Найти функцию по её дифференциалу $dy=\left(\cos 2x-6\cos^2 x\cdot\sin x\right)dx$, если функция принимает значение 2 при $x=\pi$.

5.3. Найти функцию по её дифференциалу $dy=\left(\sin 2x-6\sin^2 x\cdot\cos x\right)dx$, если функция принимает значение 0,5 при $x=\frac{\pi}{6}$.

5.4. Найти функцию по её дифференциалу $dy=\left(\sin 2x-6\cos^2 x\cdot\sin x\right)dx$, если функция принимает значение 1 при $x=\frac{\pi}{2}$.

6. Решите задачу, используя неопределённый интеграл

6.1.Найдите уравнение кривой, проходящей через точку А (0; 1), если угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен $5x$.

6.2. Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a = 4t^2$, где a – ускорение, м/с^2; t – время, в с. Найдите зависимость скорости движения от времени, если в начальный момент времени (t = 0) скорость точки была равной 1 м/с

6.3. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку А(1; 2), если угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен x^3.

6.4. Скорость прямолинейно движущейся точки изменяется по закону $v = t^3 + 1$, где v – скорость, м/с, t – время в с. Найдите закон движения точки, если в момент времени t = 2 с точка находилась в начале координат.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Неопределенный интеграл (определение). **2.**Свойства неопределенного интеграла. **3.**Приёмы непосредственного интегрирования. **4.**Метод подстановки при вычислении неопределенного интеграла. **5.**Метод интегрирования по частям. **6.**Интегрирование тригонометрических функций. **7.**Интегрирование рациональных дробей. **8.** Геометрическое и физическое приложение неопределенного интеграла.

Справочный материал. Первообразной данной функции *f* называют такую функцию *F*, производная которой (на всей области определения) равна *f*, то есть *F′* = *f*.

Совокупность всех первообразных для функции *f*(x) на интервале X называется неопределенным интегралом от функции *f*(x) и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, *f*(x) – подинтегральная функция, *f*(x)*dx* – подинтегральное выражение. Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *F*(x) – некоторая первообразная для *f*(x), С – произвольная постоянная.

Непосредственное интегрирование Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную функции, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Правило: 1). Определить вид табличного интеграла, к которому можно привести данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно). 2). Определить, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записать эту замену. 3). Найти дифференциалы обеих частей записи и выразить дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной. 4). Произвести замену под интегралом. 5). Найти полученный интеграл. 6). В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: $(uv)' = u'v + v'u$

где u и v некоторые функции от x. В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Замечание 1: 1) Для применения формулы $\int udv = uv - \int vdu$ требуется выполнить одно дифференцирование для определения dv и одно интегрирование для определения v. Надо помнить, что в состав dv должен обязательно входить дифференциал независимой переменной.

2) Выбор u и dv не может быть произвольным. Он определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит формула $\int udv = uv - \int vdu$, был проще заданного.

Замечание 2: 1) В интегралах вида $\int P(x)\cdot e^{x}dx, \int P(x)\cdot \sin axdx, \quad \int P(x)\cdot \cos axdx$,

где *P(x)*- многочлен относительно x, *a* - некоторое число, полагают $u = P(x)$

2) В интегралах вида

$$\int P(x)\cdot \ln axdx, \int P(x)\cdot \arcsin axdx, \quad \int P(x)\cdot \arccos axdx, \int P(x)\cdot arctgaxdx, \quad \int P(x)\cdot arcctgaxdx$$

полагают $P(x)dx = dv,\ u$ - остальные сомножители

В интегралах вида $\int e^{ax}\cdot \sin bxdx, \int e^{ax}\cdot \cos bxdx, \quad \sqrt{ax^2+b}$ где *а,в* - числа полагают

$u = e^{ax}\ или \quad u = \sin bx(\cos bx)$

При интегрировании данных функций иногда приходится интегрировать дважды.

Вычисления интеграла сводится к решению алгебраического уравнения первой степени.

Интегралы от произведений синусов и косинусов.

а) **Интегрирование произведений синусов и косинусов кратных** дуг. При нахождении интегралов вида $\int \sin mx \cdot \cos nx \cdot dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx \cdot dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx \cdot dx$ с помощью школьных тригонометрических формул $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$,

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$, $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ задача сводится к интегрированию линейной комбинации тех же функций (с другими аргументами).

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ где хотя бы одно из чисел m и n -- нечётное положительное. Такие интегралы вычисляются заменой $s = \sin x$, если нечётна степень косинуса, или $c = \cos x$, если нечётна степень синуса.

$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} d(\sin x) = \int s^m \left(1-s^2\right)^{\frac{n-1}{2}} ds.$ После раскрытия скобок этот интеграл легко вычисляется. Аналогично нужно поступать и в случае нечётной степени m, используя равенство $\sin x dx = -d(\cos x)$.

в) Аналогично решаются интегралы вида

$\int \sin^m x dx g(\cos x) dx$, $\int \cos^n x g(\sin x) dx,$ *где* m, n - нечетные положительные числа.

г) $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ *где* m, n - четные неотрицательные. Такие интегралы упрощаются при помощи тригонометрических *формул понижения степени*:

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$; $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. После применения этих формул (быть может, неоднократного) и раскрытия скобок получаются интегралы, в которых степень синуса или косинуса нечётна. Они либо сразу сводятся к табличным линейной заменой, либо их можно вычислить тем способом п.б).

Интегрирование рациональных дробей.

Интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы - в случаях простейших дробей 1 типа;

2) через рациональные функции - в случае простейших дробей 2 типа

3) через логарифмы и арктангенсы - в случае простейших дробей 3 типа

4) через рациональные функции и арктангенсы - в случае простейших дробей 4 типа.

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C$.

2. $\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\int (x-a)^{-n}d(x-a) = A\cdot\frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\,\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$

4. $I_m = \int \frac{Ex+F}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m}$ 1). Выделяем в числителе дифференциал знаменателя:

$$I_m = \frac{E}{2}\int \frac{d(x^2+p_2x-q_2)}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m}+\left(F-\frac{Ep_2}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)} = \frac{E}{2}\frac{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^{1-m}}{1-m}+$$
$$+\left(F-\frac{Ep_2}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m}$$

Метод неопределенных коэффициентов

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители $Q(x) = (x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1}\ldots\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}$, можно представить в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2}+\ldots.+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}},$$ $A_1, A_2,..B_1, B_2...M_1, N_1...$ - некоторые действительные коэффициенты.

Последовательность нахождения неопределенного интеграла методом неопределенных коэффициентов.

1. Если рациональная дробь является неправильной, то надо разделить «уголком» числитель на знаменатель, в результате чего получим многочлен и правильную дробь.
2. Знаменатель полученной дроби разложить на произведение линейных и квадратичных множителей.
3. Правильную дробь разложить на сумму простейших дробей.
4. Найти постоянные коэффициенты.
5. Найти интеграл от каждого слагаемого в отдельности и просуммировать результат.

Пример: $\frac{x^2-3}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$, $\quad \frac{x^3+2}{x^2\left(x^3+2\right)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^3+2}$

Интегрирование рациональной дроби приводится к интегрированию простейших дробей.

Геометрическое и физическое приложение неопределенного интеграла

Нахождение первообразной по начальным условиям. При интегрировании функции получается совокупность её первообразных. Для того чтобы из этой совокупности выделить конкретную первообразную задают дополнительные условия, начальные условия.

При решении таких задач используют следующий алгоритм:

1) Находят неопределенный интеграл от заданной функции

2) Вычисляют величину С, подставляя начальные условия в полученную совокупность первообразных для заданной функции.

3) Находят искомую первообразную, заменяя в совокупности первообразных постоянную интегрирования её вычисленным значением.

Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку. Под наклоном кривой мы понимаем тангенс угла наклона касательной к этой кривой в конкретной точке. Наклон или угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x по геометрическому смыслу производной равен значению производной в этой точке, т.е. $k = y' = f'(x_0)$.

Рассмотрим обратную задачу: зная наклон кривой в любой её точке как функцию абсциссы этой точки, т.е. зная что $k = y' = f'(x_0)$, найти уравнение самой кривой.

Так как $k = y' = f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x), т.е. \quad dy = f(x)dx \Rightarrow y = \int f(x)dx$. Вычислив этот неопределенный интеграл, мы можем получить уравнение $y = F(x) + C$, которое содержит произвольную постоянную. Этому уравнению на плоскости соответствует семейство кривых, получаемых из любой параллельным переносом вдоль оси ОУ. Данные графики называются интегральными кривыми.

Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения. По физическому смыслу производной мы знаем, что $V = S'(t), \quad a = V'(t) = S''(t)$, т.е. скорость - это первая производная пути, ускорение - это первая производная скорости или вторая производная пути. Закон движения тела по заданной скорости можно найти интегрированием, а по заданному ускорению - двукратным интегрированием.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию первообразная. Сформулировать основное свойство первообразных функций.

Проверьте, является ли функция $F(x) = 3\ln|x| + C$ первообразной для функции $f(x) = \frac{3}{x}$.

Дать определение понятию неопределённый интеграл. Рассказать в чем заключается его геометрический смысл.

Записать свойства неопределённого интеграла. Проиллюстрировать таблицу интегралов элементарных функций.

Найдите ошибку в вычислении интеграла: $\int x^{-4}dx = \frac{x^{-5}}{-5} + C$.

Показать на примере в чем заключается интегрирование неопределённого интеграла методом подстановки. $\int (6x-1)^5 dx$

Показать на примере в чем заключается интегрирование неопределённого интеграла по частям. Указать, какие из следующих интегралов целесообразно интегрировать по частям: $a)\int x \cdot arctgxdx \quad b)\int \frac{dx}{x\ln x}$.

В семействе кривых $y = \int xdx$ найдите кривую, проходящую через точку (2;3).

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа № 6. Вычисление определенного интеграла.

Цель работы: закрепить навыки непосредственного интегрирования; применения метода подстановки при нахождении определенного интеграла; вычисления определенного интеграла по частям.

Оснащение: карточка с формулами интегрирования; карточки с методами интегрирования, дидактические карточки с заданиями практической работы № 6.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить определенный интеграл методом непосредственного интегрирования:

1.1. а) $\int_0^2 \left(3 - x + 4x^2\right) dx$; б) $\int_0^1 \left(2e^x - \sqrt{x}\right) dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \sin x\right) dx$

1.2. а) $\int_{-2}^{-1} \left(4 + x - 2x^2\right) dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \sin x\right) dx$ в) $\int_1^e \left(\frac{2}{x} - e^x\right) dx$

1.3. а) $\int_0^1 \left(2 - x - 3x^3\right)dx$;   б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3\cos x - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx$

1.4. а) $\int_1^2 \left(6x - 7x^2 + 1\right)dx$;   б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки.

2.1. а) $\int_0^2 \frac{4xdx}{\left(x^2 - 1\right)^3}$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3 - \cos x}$ .....2.2 $\int_1^5 \sqrt{\left(2x - 1\right)^3}dx$ б) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} 3e^{x^3}x^2dx$

2.3.а) $\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x + 3\right)^2}}$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$ 2.4 $\int_{-1}^2 \left(x^2 - 1\right)^3 xdx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x + 1}\cos xdx$

3. Вычислить определенный интеграл по частям.

3.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos xdx$ 3.2. $\int_0^1 arctgxdx$ 3.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin xdx$ 3.4. $\int_0^1 x \cdot e^{-x}dx$

4. Решить задачу на физический смысл определенного интеграла.

4.1 Скорость движения тела задана уравнением $V = \left(2t + \frac{8}{t^2}\right)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за вторую секунду.

4.2 Скорость движения точки $V = 12t - 3t^2$. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

4.3 Скорость движения точки $V = 9t^2 - 8t$. Найти путь, пройденный точкой за четвертую секунду.

4.4 Скорость движения точки изменяется по закону $V\ (t) = 3t^2 + 2t + 1$. Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

5. Решить задачу на физический смысл определенного интеграла.

5.1 Тело движется прямолинейно со скоростью $V = (2t + a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ с тело прошло путь 40 м.

5.2 Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $V = (39{,}2 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

5.3. Два тела начинают движение одновременно из одной и той же точки: одно со скоростью $V = 3t^2$ (м/мин), другое со скоростью $V = 2t$ (м/мин). На каком расстоянии друг от друга они будут через 10 минут, если они движутся по прямой линии в одном направлении.

5.4. Тело движется прямолинейно со скоростью V = (3t - a) м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ с тело прошло путь 30 м.

6. Решить задачу на физический смысл определенного интеграла.

6.1 Пружина растягивается на 0,02м под действием силы 60 Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12м?

6.2. Под действием силы 80 Н пружина растягивается на 0,02м. Первоначальная длина пружины равна 0,15м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,2м?

6.3. Пружина растягивается на 0,02м под действием силы 60 Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12м?

6.4. Под действием силы 90 Н пружина растягивается на 0,01м. Первоначальная длина пружины равна 0,13м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,3м?

7. Решить задачу на физический смысл определенного интеграла.

7.1. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку, имеющую форму полукруга с диаметром 4м (полукруг соприкасается с поверхностью воды по диаметру).

7.2. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку прямоугольной формы с основанием 2м и высотой 4м (основание прямоугольника находится на поверхности воды).

7.3. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку треугольной формы с основанием 2м и высотой 3м (вершина треугольника находится на поверхности воды, а основание параллельно ей).

7.4. Вычислить силу давления воды на вертикальную площадку прямоугольной формы с основанием 4м и высотой 2м (основание прямоугольника находится на поверхности воды).

8. Найти объем тела.

8.1. Найти объем тела, образованного вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{2} + 1, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

8.2. Найти объем тела, образованного вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3 - 2, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

8.3. Найти объем тела, образованного вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{x^2}{3} - 1, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

8.4. Найти объем тела, образованного вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3 + 1, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0.$$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: **1.**Определенный интеграл (определение). **2.**Свойства определенного интеграла. **3.**Правило вычисления определенного интеграла. **4.**Приёмы непосредственного интегрирования. **5.**Метод подстановки при вычислении неопределенного интеграла. **6.**Метод интегрирования по частям. **7.**Формула Ньютона-Лейбница. **8.** Вычисление пути, пройденного телом при неравномерном движении с помощью определенного интеграла. **9.** Вычисление площадей плоских фигур. **10.** Вычисление работы силы. **11.** Вычисление объема тела. **12.** Вычисление работы, производимой при поднятии груза. **13.** Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Способы вычисления определенных интегралов:

I. Формула Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(x)\ \Big|_b^a = F(b) - F(a)$

II. Замена переменной в определенном интеграле $x = \varphi(t)$ **осуществляется по следующей формуле** $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$,где α и β определяются в силу замены из условий $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. При замене переменной в определенном интеграле возвращаться к старой переменной после замены не надо.

III. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$ Рекомендации по выбору u и dv остаются точно такими же, как и для формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Свойства определенного интеграла

1) При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла: $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \quad k - \textit{постоянный} \quad \textit{множитель}$. (свойство линейности)

3) Если *а, в, с* принадлежат интервалу на котором функция *f*(*x*) непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (свойство аддитивности определенного интеграла)

4) $\int_a^b dx = b - a$.

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6) Переменную интегрирования можно обозначить любой буквой, не нарушая справедливости формул, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots.$

7) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

8) Если f(x) – четная непрерывная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Если f(x) – нечетная непрерывная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

9)Если f(x) на отрезке [a, b] a < b, то

10)Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то:

Вычисление площадей плоских фигур. Фигура, ограниченная прямыми $y = 0, \quad x = a, \quad x = b \quad (a \prec b)$ и графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ при $x \in [a;b]$, называется криволинейной трапецией.

Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения. По физическому смыслу производной мы знаем, что $V = S'(t), \quad a = V'(t) = S''(t)$, т.е. скорость - это первая производная пути, ускорение - это первая производная скорости или вторая производная пути.

Вычисление работы силы. Работу *A*, произведенную переменной силой *f* (*x*)при перемещении по оси Ох материальной точки от *x* = *a* до *x* = *в*, находим по формуле $A = \int_a^b f(x)dx$. При решении задач на вычисление работы силы, связанных с растяжением -

сжатием пружины, основываются на соотношении $F = kx$, F - сила, x - абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F, k - коэффициент пропорциональности.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Для пластинки постоянной ширины сила давления жидкости вычисляется по формуле: $P = 9{,}81\rho\int_a^b xydx$, ρ - плотность жидкости.

Вычисление объёмов тел вращения.

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Оx, может быть выражена как функция от x, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Оx плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле: $V = \int_a^b S(x)dx$.

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Оx, то объем тела вращения вычисляется: $V_x = \pi\int_a^b y^2dx$

Координаты центра масс. Пусть материальная однородная пластина В имеет форму криволинейной трапеции $x \in [a;b]$, $y \in [0; f(x)]$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Площадь этой криволинейной трапеции равна S. Координаты центра масс $(x_0; y_0)$ пластины В находятся по формулам: $x_0 = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$ $\quad y_0 = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию определённый интеграл. Рассказать в чем заключается его геометрический смысл. Проиллюстрировать геометрический смысл определенного интеграла.

Перечислите основные свойства определенного интеграла.

Расскажите: что в записи $\int_a^b f(x)dx$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)dx$. Может ли быть $a = b$?

Показать на примере в чем заключается интегрирование определённого интеграла подстановкой. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$

Показать на примере в чем заключается интегрирование определённого интеграла по частям.

$\int_0^1 \arcsin x dx$

Привести примеры применения определенного интеграла для вычисления физических величин. Составить формулы для нахождения работы силы.

Привести примеры применения определенного интеграла для вычисления геометрических величин. Составить формулы для нахождения объема тел вращения.

Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого 20м, а радиус основания 20м.

Сформулируйте, в чем заключается геометрический смысл интеграла?

Запишите формулу для нахождения площади плоской фигуры, если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.

2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.

3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.

4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Вопросы для самоконтроля:

1. Привести примеры применения определенного интеграла для вычисления физических величин. Составить формулы для нахождения работы силы.

Привести примеры применения определенного интеграла для вычисления геометрических величин. Составить формулы для нахождения объема тел вращения.

2. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого 20м, а радиус основания 20м.
3. Сформулируйте, в чем заключается геометрический смысл интеграла?
4. Запишите формулу для нахождения площади плоской фигуры, если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.

Практическая работа № 7. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка

Цель работы: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Оснащение: плакаты с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 7.

Задания для самостоятельного решения:

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1.1. 1) $4xydx-(x^2+1)dy=0;$ при x =1 и y = 4 2) $y^2dx-e^xdy=0;$ при x = 0 и y = 1

3) $(1-y)dx+(1+x)dy=0;$ при $y(1)$=3 4) $y\sin xdx+\cos xdy=0;$ при $x=\dfrac{\pi}{3}$ $y=\dfrac{1}{2}$

5) Изолированный проводник вследствие несовершенства изоляции теряет сообщенный ему заряд со скоростью, пропорциональной наличному заряду в данный момент времени. Найдите зависимость количества заряда проводника от времени, если в начальный момент времени (t = 0) проводнику сообщен заряд 2000К, а за первые 2 минуты потеряно 150Кл. Через сколько минут заряд проводника уменьшится вдвое?

1.2.1) $\frac{dy}{x-1}-\frac{dx}{y-2}=0;$ при x = 0 и y = 4 2) $\frac{dy}{dx}-2x-3=0$; y(3)=0

3) $\sqrt{x}dy-\sqrt{y}dx=0;$ при y = 0 и x = 0 4) $y'=(2y+1)ctgx;$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

5) Материальная точка замедляет своё движение под действием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости $v(t)$. Найти зависимость скорости от времени, если $v(0)$ = 0,5м/с, а $v(1)$ = 0,25 м/с. Какова будет скорость точки через 3с после начала замедления движения?

1.3.1) $\frac{dy}{x^2}-\frac{dx}{y^2}=0;$ при x = 0 и y =2 2) $(1+y)dx-(1-x)dy=0;$ y(-2) = 3

3) $y\cdot tgx\cdot dx+dy=0;$ при $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=4$ 4) $x^2\cdot dy-(2x\cdot y+3y)=0;$ при $y(4)=1$

5) Вращающийся в жидкости диск замедляет своё движение под действием силы трения, пропорциональной угловой скорости ω. Известно, что в начале замедления $\omega=12$ рад/с, а через 40с $\omega=8$ рад/с. Найдите зависимость угловой скорости от времени. С какой угловой скоростью будет вращаться диск в момент $t=120$ с?

1.4.1) $(x^2+1)dy-xydx=0;$ при $x=\sqrt{3}$ и y = 2 2) $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y(0)=2$

3) $2y\cdot dx-(1+x)dy=0;$ при y(1) = 4 4) $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy,$ при $y(0)=2$

5) Катер в момент выключения двигателя шел со скоростью 20м/с. Через 25с скорость катера уменьшилась до 5 м/с. Определите, через сколько секунд после выключения двигателя скорость окажется равной 1, 25м /с, если движение катера замедляется под действием силы трения пропорциональной скорости движения.

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

2.1. $\frac{dy}{dx}-2y-3=0$ 2.2. $\frac{dy}{dx}=y+1$

2.3. . $\frac{dy}{dx}+xy=x$ 2.4. $\frac{dy}{dx}-yctgx=\sin x$

3. Найти общее решение однородного уравнения первого порядка.

3.1. $(xy-x^2)\cdot y'=y^2$ 3.2. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$

3.3. $xy' = y \cdot \ln \frac{x}{y}$ 3.4. $y - xy' = x + y \cdot y'$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: **1.** Что называется дифференциальным уравнениям? **2.** Как определяется порядок дифференциального уравнения? **3.** Что называется общим решением дифференциального уравнения? **4.** Что называется частным решением дифференциального уравнения? **5.** Задача Коши; начальные условия задачи Коши. **6.** Геометрический смысл решения задачи Коши. **7.** Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. **8.**Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, его решение. **9.** Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Справочный материал.

Дифференциальным называется **уравнение,** содержащее независимую переменную *x*, искомую функцию *y* этой переменной и её производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение.

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция $У = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от *n* произвольных постоянных и удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях этих постоянных.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Дифференциальным уравнением **первого порядка** называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) первого порядка.

Если уравнение представлено в виде $y' = f(x, y)$ или $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$,то такое **уравнение** называют **разрешённым относительно производной**.

Виды дифференциальных уравнений.

1. Уравнение вида *f(x)dx + g(y)dy =0*, где *f(x), g(y)* - данные функции, называется уравнением с **разделенными переменными.** *f(x)dx= - g(y)dy* - другая запись.

Решение уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

2. Уравнение вида *f(x) F(y) dx + g(x) G(y) dy = 0* , где *f(x), F(y), g(x), G(y)* - заданные функции, называется уравнением с **разделяющимися переменными.**

3. Уравнение вида $\frac{dy}{dx}+f(x)y+\varphi(x)=0,\ f(x),\quad \varphi(x)$ - функции от x, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y=uv,\quad u,v$ - новые функции от *x.*

Дифференциальное уравнение **первого порядка *y'= f(x, y)* называется однородным**, если его можно представить в виде *P(x, y)dx+Q(x, y)dy=0*, где *P(x, y)* и *Q(x, y)* – однородные функции одного измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой *y = zx*, тогда *dy = z·dx+x·dz* или $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$, где $\mathrm{z}=\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$ – новая неизвестная функция.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию дифференциальное уравнение. Изобразить графически его решение. Дать определение понятию порядок дифференциального уравнения. Перечислить в чем отличия его общего и частного решения. Перечислить классификацию дифференциальных уравнений.

Перечислить классификацию дифференциальных уравнений. Дать определение понятию дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Показать на примере в чем заключается решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

2. Дать определение понятию линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Показать на примере в чем заключается решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx}=y+1$

3. Дать определение понятию однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Показать на примере в чем заключается решение однородного дифференциального уравнения первого порядка $\left(x^2+2xy\right)dx+xydy=0$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.

Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.

2. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.

3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html

4. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.

5. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm

6. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа № 8. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Цель работы: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Оснащение: плакаты с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями работы № 8.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить неполные дифференциальные уравнения второго порядка:

1.1 $\frac{d^2s}{dt^2} = 18t + 2$, если $s(0) = 4$, $s'(0) = 5$

1.2 $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 12$

1.3 $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 20$

1.4 $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 2$, если $y(-1) = -8$, $y'(-1) = 3$

2. Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

2. 1 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

2.2. 1) $y'' + 2y' + 10y = 0$ 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

2. 3 1) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ 2) $y'' + 12y' + 36y = 0$

2. 4 1) $y'' + 8y' + 15y = 0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

3. Найти частные решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

3.1 $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

3.2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$, если $y(0) = \frac{9}{5}$, $y'(0) = 0$

3.3 $y'' - 6y' + 13y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

3.4 $y'' - 4y' + 13y = 0$, если $y(\frac{\pi}{3}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{3}) = -6$

4. Решить дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно частных производных. Найти общий интеграл уравнения.

4.1 $\sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4.2 $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4.3 $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$

4.4 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Дифференциальные уравнения второго порядка. **2.**Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x\right)$ и метод их решения. **3.** Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$ и их решение. **4.** Характеристическое уравнение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. **5.** Вид общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения. **6.** Начальные условия в дифференциальных уравнениях второго порядка.

Справочный материал.

Обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида *F(x, y, y', y'') = 0*, где *F* – известная функция трех переменных, *x* – независимая переменная, *y* – неизвестная функция, *y'*, *y''*– ее производные.

Если уравнение представлено в виде *y''* = *f(x, y, y')*, то такое уравнение называют **разрешённым относительно производной.**

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка. Простейшим видом неполного дифференциального уравнения второго порядка является уравнение вида $\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$ или $\frac{dy'}{dx}=f\left(x\right)$. Решается двукратным интегрированием: $\frac{dy'}{dx}=f(x)$, $dy'=f(x)dx, \quad y'=\int f(x)dx$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y''+py'+qy=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0,$ где p и q – постоянные коэффициенты, называется **линейным однородным уравнения второго порядка** с постоянными коэффициентами.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения. Доказано, что частными линейно независимыми решениями данного уравнения являются функции вида $y = e^{kx}$, поэтому их отыскание сводится к нахождению корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Для его составления в уравнение $y'' + py' + qy = 0$ вместо y'', y', и y нужно подставить соответственно k^2, k, и *1*. При решении характеристического уравнения возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и притом различные числа ($k_1 \neq k_2$); **2)** k_1 и k_2 – действительные равные числа ($k_1 = k_2$); **3)** k_1 и k_2 – комплексные числа.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$.

общий интеграл имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

II. Корни характеристического уравнения действительны и равны: $k_1 = k_2$.

частные решения имеют вид $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, общее решение – $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

III. Корни характеристического уравнения комплексные.

Так как комплексные корни входят попарно сопряжёнными, то обозначим: $k_1 = a + bi,\quad k_2 = a - bi$, где $a = -\dfrac{p}{2},\quad b = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Частные решения можно записать в форме $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$, общее решение – $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Простейшие уравнения в частных производных.

Дифференциальное уравнение в частных производных – это равенство, содержащее несколько независимых переменных, искомую функцию и ее частные производные по этим переменным. В общем виде это уравнение может быть записано так: $F(x_1, x_2, ...x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...) = 0$, где $x_1, x_2, ..., x_n$- независимые переменные; $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ - неизвестная искомая функция. (1)

Дифференциальное уравнение (1) будет **линейным**, если функция *F* линейна относительно искомой функции $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение $X\dfrac{\partial z}{\partial x} + Y\dfrac{\partial z}{\partial y} = Z,$ (2) где X, Y, Z - функции *x,y,z*. Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{X} = \dfrac{dy}{Y} = \dfrac{dz}{Z}.$ Пусть решение этой системы определяется равенствами $\omega_1(x, y, z) = C_1,\quad \omega_2(x, y, z) = C_2$.Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид $\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)] = 0$, где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$- произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Показать на примере в чем заключается решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения.
4. Дать определение понятию простейшего дифференциального уравнения в частных производных. Показать на примере в чем заключается решение простейшего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$
5. Из предложенных дифференциальных уравнений выберите дифференциальное уравнение в частных производных: $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$, $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$, $\cos xx\frac{\partial z}{\partial x} + \cos y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009

2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 2.4. Ряды.

Практическая работа № 9. Исследование числовых рядов на сходимость.

Цель работы: закрепить понятия сходимости и расходимости ряда, признаки Даламбера, Коши и Лейбница.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 9.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить сумму членов ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2-3n+2}$ 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n+1)}$

2.Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$ 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}$ 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Коши.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$ 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{10}\cdot 10}$ 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}$

5. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{3n-1}$ 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)}{2n+1}$ 5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие числового ряда. Общий член. Частичная сумма. **2.** Понятия: сходящийся ряд, расходящийся. **3.** Геометрический ряд. **4**. Гармонический ряд. **5.** Необходимый и достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Признак Даламбера. **6.** Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. **7.** Абсолютная и условная сходимость. **8.** Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Справочный материал.

Числовым рядом (или просто рядом) называется выражения вида,
$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots(1),\textit{где}\quad u_1,u_2,\ldots u_n - \textit{действительные или комплексные числа},$
называемые членами ряда, u_n- общим членом.

Сумма первых *n*- членов ряда (1) называется ***n*- й частичной суммой ряда** и обозначается через S_n, *т.е.* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Если существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1), то этот предел называют суммой ряда (1) и говорят, **ряд сходится**. Записывают: $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

Если предел не существует или $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, то ряд (1) называют **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0.$

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Первый признак сходимости: Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(1)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n\,(2)$. Если для всех n выполняется неравенство $u_n\le v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Предельный признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда (1) и (2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (0\prec A\prec\infty)$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно. Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, называется <u>эталонным</u>

Замечание 3: Если *l=0 или l*=∞ - выбираем другой эталонный ряд.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+...+u_n+...(1),$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Радикальный признак Коши. Пусть дан ряд (1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$. Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

Признак сходимости знакочередующегося (знакопеременного) ряда.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n, где \quad u_n\succ 0 \quad для \quad n\in N \qquad (3)$$

Достаточный признак Лейбница: Знакочередующийся ряд (3) сходится, если: 1.Последовательность абсолютных величин ряда монотонно убывает т.е.$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ 2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. При этом сумма S ряда (3) удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов, расходится.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию числовой ряд. Дать определение понятию сходимость и расходимость числовых рядов. Сформулировать необходимый и достаточный признаки сходимости и расходимости знакоположительного ряда.
2. Дать определение понятию знакоположительного ряда. Сформулировать предельный признак сравнения ряда.
3. Сформулировать признак сходимости ряда по Даламбера. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по Даламберу.
4. Сформулировать радикальный признак сходимости ряда Коши. Описать алгоритм исследования ряда по признаку Коши.
5. Дать определение понятию знакопеременный ряд. Сформулировать признак сходимости ряда Лейбница. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по признаку Лейбница.
6. Дать определение понятию степенной ряд. Описать метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена и Тейлора.
7. Найдите формулу общего члена ряда: $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа № 10. Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена.

Цель работы: закрепить понятия сходимости и расходимости ряда степенного ря-да, разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 10.

Задания для самостоятельного решения:

1. Разложить в ряд Тейлора:

1.1 а) функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. б) функцию $f(x)=\ln x$ по степеням $(x-1)$

1.2 а) функцию $\cos x$ по степеням $x+\frac{\pi}{3}$. б) функцию $f(x)=\sqrt{x}$ по степеням $(x-4)$

1.3 а) функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{6}$. б) функцию $f(x)=x^4+x^2$ по степеням $(x-1)$

1.4 а) функцию $\cos x$ по степеням $x-\frac{\pi}{2}$. б) функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ по степеням $(x+1)$.

2. Разложить в ряд Маклорена:

2.1 функцию $\sin 3x$ 2.2 функцию e^{3x}. 2.3 функцию e^{-2x}. 2.4 функцию $\cos\frac{x}{2}$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие степенного ряда. **2.** Область и радиус сходимости степенного ряда. **3.** Определение функционального ряда. Точка и радиус сходимости. **4.** Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.

Содержание и порядок выполнения работы

Разложение функций в степенные ряды. Степенным рядом называется ряд, состоящий из степенных функций аргумента x: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ называются коэффициентами ряда, $x \in R$, член $a_n x^n$ - общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений *x*, при которых данный ряд сходится. Число *R* называется **радиусом сходимости** ряда (1), если при $|x| \prec R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| \succ R$ ряд расходится. Радиус сходимости *R* можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R, \qquad (2)$$

$$(a_n \neq 0, n = 1,2,3,..)$$

Промежуток $-R \prec x \prec R$ называется промежутком (интервалом) сходимости. Если предел равен нулю (*R* = 0), то ряд (1) сходится в единственной точке $x = 0$.

Ряд, членами которого являются функции от x, называется **функциональным**: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + \ldots + u_n(x_n) + \ldots$.

Придавая x определенное значение, можно получить числовой ряд, который может быть как сходящимся, так и расходящийся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** ряда, если ряд расходится – **точкой расходимости**.

Разложение функций в степенные ряды. Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$. (3)

Если $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!} \cdot x + \dfrac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$, (4) которой называется **рядом Маклорена**.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходного рядов.

Для разложения функции $f(x)$ в ряд Маклорена необходимо: 1) вычислить значения функции и её последовательных производных в точке $x = 0$,т.е. , $f(0) f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$; 2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (4); 3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (2).

Для разложения функции в ряд Тейлора необходимо: 1)вычислить значения функции и её последовательных производных в точке *x = a,* т.е. , $f(a) f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$; 2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (3). 3) найти промежуток сходимости по формуле (2).

Примечание. Справедливы следующие разложения в ряд Маклорена:

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$ экспоненциальный ряд

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n} +}{(2n+1)!} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...(-\infty < x < +\infty)$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ...(-1 < x < +1)$ логарифмический ряд

5) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...(-1 \le x \le +1)$

6) $(1+x)^n = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{a(a-1)...(a-(n-1))}{n!}x^n ..(-1 < x < +1)$ - биномиальный ряд

7) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n + ...(-1 < x < +1)$

Пример 1: Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{2x}$ по степеням $x - 1$.

Решение: 1 способ. Вычислим значения данной функции и её производной при $x = 1$. Имеем:

$f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$,..., $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$;

$f(1) = e^2$, $f'(1) = 2e^2$, $f''(1) = 4e^2$, $f'''(1) = 8e^2$,..., $f^{(n)} = 2^n \cdot e^2$. Подставим эти значения в формулу (3), получим разложение функции $f(x) = e^{2x}$ в ряд Тейлора по степеням $x - 1$:

$e^{2x} = e^2\left[1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{2^n}{n!}(x-1)^n + ...\right]$. Промежуток сходимости ряда найдем по формуле (2): $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}$; $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n \cdot (n+1)\cdot n!}{n! \cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}$.

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = \infty$, т.е. промежуток сходимости – вся числовая прямая.

2 способ. Если в разложении $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...(-\infty < x < +\infty)$ заменить x на $2x$, то получим ряд Маклорена для функции e^{2x}: $e^{2x} = 1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + ... + \frac{2^n}{n!}x^n + ...$ (5)

Функцию e^{2x} представим в виде $e^{2(x-1)} \cdot e^2$ и подставим это выражение в формулу (5), заменив x на $x - 1$; имеем $e^{2x} = e^{2(x-1)} \cdot e^2 = e^2\left[1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{4}{2!}(x-1)^2 + ... + \frac{2^n}{n!}(x-1)^n + ...\right]$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию степенной ряд. Описать метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена и Тейлора.

8. Найдите формулу общего члена ряда: $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Раздел 4. Основы теории вероятностей и математической статистики.

Тема 4.1. Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения

Практическая работа № 11. Элементы комбинаторики.

Цель работы: разобрать основные понятия комбинаторики.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с практической работой № 11.

Задания для самостоятельного решения:

1. Составить различные комбинации чисел из данных цифр.

1.1. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 4,7,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.2. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 5,8,9. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.3. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 2,3,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.4. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 3,6,7. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

2. Записать формулу.

2.1. Написать формулу числа перестановок из 5 элементов. Сосчитать их количество.

2.2. Написать формулу числа перестановок из 4 элементов. Сосчитать их количество.

2.3. Написать формулу числа перестановок из 9 элементов. Сосчитать их количество.

2.4. Написать формулу числа перестановок из 7элементов. Сосчитать их количество.

3. Решить задачу, используя понятие перестановок.

3.1. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 7-ми уроков?

3.2. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 5-ти уроков?

3.3. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 6-ти уроков?

3.4. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 8-ми уроков?

4. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

4.1. В классе 18 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.2. В классе 17 юношей и 15 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек г) всех учащихся?

4.3. В классе 10 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.4. В классе 13 юношей и 17 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

5. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

5.1. В классе 25 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.2. В классе 28 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.3. В классе 36 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.4. В классе 27 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

6. Вычислить, используя формулы размещения и сочетания.

6.1. Вычислить: а) A_8^2; б) C_6^2. 6.2. Вычислить: а) A_{10}^2; б) C_8^2.

6.3. Вычислить: а) A_6^2; б) C_{10}^2. 6.4. Вычислить: а) A_8^4; б) C_{12}^3.

7. Решить уравнение.

7.1. $A_{n-2}^{3} = 4A_{n-3}^{2}$ 7.2. $20A_{n-2}^{3} = A_{n}^{5}$

7.3. $A_{n}^{4} = 15A_{n-2}^{3}$ 7.4. $A_{n}^{4} = 5A_{n-2}^{3}$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие соединения. **2.** Понятие размещения, формула размещения. **3.** Понятие перестановки, формула перестановки. **4.** Понятие сочетания, формула сочетания.

Справочный материал:

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются соединениями. Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания. Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики, занимающийся их решениями – комбинаторика.

Комбинации из *n* элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называется **перестановками.** Обозначение: P_n , *n* - число элементов, входящих в перестановку. Формула: $P_n = n!$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n$.

Комбинация из *m* элементов по *n* элементам, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называется **размещениями.** Обозначение: A_m^n - *m*- число всех имеющихся элементов, *n*- число элементов в каждой комбинации.

Формула: $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Сочетаниями называется все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга, по крайней мере, хотя бы одним элементом. $(m \in \mathrm{N}, n \in \mathrm{N}, \quad n \le m)$ Обозначение: C_m^n. Формула: $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$

Основное свойство числа сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$ (позволяет упростить нахождение числа сочетаний из *m* элементов по *n* , когда *n* превосходит $\frac{1}{2}m$).

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию комбинаторика. Запишите формулы для нахождения перестановки, размещения, сочетания. Установите различия основных понятий комбинаторики : перестановка, размещение, сочетание.
2. Объясните, в чем состоит комбинаторное правило умножения, используемое для подсчета числа возможных вариантов.
3. Проверьте равенство: $C_n^6 = \frac{A_6^{n-6}}{P_{n-6}}$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа №12. Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

Цель работы: научиться применять теоремы сложения и умножения для нахождения полной вероятности наступившего события.

Оснащение: плакат «Полная вероятность»; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 12.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить задачу на классическое определение вероятности случайного события.

1.1. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть ровно 1 проигрышный билет.

1.2. В коробке 8 белых и 7 черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара. Найдите вероятность того, что имеется 3 белых шара.

1.3. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

1.4. На полке стоит 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

2. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей несовместных событий.

2.1. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным или красным.

2.2. Из колоды в 36 карт случайным образом одновременно вытаскивают 2 карты. Найдите вероятность того, что одна из них пиковой, а другая трефовой масти.

2.3. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выиграют какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке вы, верно, угадали 4 или 5 чисел?

2.4. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть хотя бы один выигрышный билет.

3. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей совместных событий.

3.1. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

3.2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 5, либо 6, либо тому и другому одновременно.

3.3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 7, либо тому и другому одновременно.

3.4. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 7, либо 8, либо тому и другому одновременно.

4. Решить задачу, применив теорему умножения вероятностей независимых событий.

4.1. Электрическая схема состоит из пяти последовательно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,5; 0,8; 0,1; 0,2. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

4.2. Электрическая схема состоит из трех параллельно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,7; 0,85. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

4.3. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого – 0,16. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?

4.4. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом мешке - 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

5. Решить задачу, применив формулу полной вероятности.

5.1. С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей, со второго – 30% , а с третьего – 30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

5.2. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех – 0,5 и для остальных – 0,3. Какова вероятность поражения цели?

5.3. На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 80% деталей первого сорта, второй – 90% . Взятая наудачу с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

5.4. В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 – со второго и 20 – с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8 . Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Определение вероятности наступления события. **2.**Теорема сложения вероятностей. **3.**Условная вероятность. **4.**Независимость событий. Теорема умножения событий. **5.**Формула полной вероятности.

Справочный материал.

Испытание - всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий. Результат действия или наблюдения - **случайное событие**. **Искомое событие** (или искомый исход) - определенное событие из всех возможных. **Равновозможные события** - все события, которые имеют равные возможности произойти. Обозначения событий - A, B, C. События называются **несовместными**, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте вместе. В противном случае - **события совместные. Достоверные события** - события, происходящие в данном испытании обязательно. Обозначение - U .

Событие называется **невозможным**, если оно в данном опыте не может произойти. Обозначение - V. **Полной системой событий** A_1, A_2, …, A_N называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании. Если полная система состоит из двух несовместимых событий, то такие события называются **противоположными** и обозначаются А и $\overline{A}$.

1. Относительная частота. A - случайное событие, N- число одинаковых испытаний,М - число испытаний, в котором событие A произошло. $\frac{M}{N}$ - частота наступления события A в данной последовательности испытаний.

2.Вероятность события. Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом Р(A).

Вероятность события A равна отношению числа m исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$

Свойства: 1) Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы. 2) Вероятность достоверного события равна единице, так как $\frac{n}{n}=1$

3)Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $\frac{0}{n}=0$.

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. А+ В или А $\cup B$ $\bigcup_{\kappa=1}^{n} A_{\kappa}$ - сумма n- событий.

Т- 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий) Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Следствие 1: Если *A, B, …M* - образуют полную систему, то сумма вероятностей будет равна 1.

Следствие 2: $P(A)+P(\overline{A})=1$, $\overline{A}$ - противоположное событие событию A.

Опр. 2 Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет, $A\cap B$, AB, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ - произведение n -событий.

Событие A называется **независимым** от события B, если наступление события B не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события A.

Т- 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий) Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Т-3 (теорема сложения вероятностей совместных событий): Если A и B - совместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

A* и *B - случайные события одного и того же испытания. **Условной вероятностью** события A или вероятностью события A при условии, что наступит событие B, называется

число $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$. $P\left(\dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$ - Условная вероятность.

Т- 4 (теорема умножения вероятностей зависимых событий) Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило: $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Формула полной вероятности.

$H_1, H_2, \ldots H_n$ - гипотезы. $P(A) = P\left(\dfrac{A}{H_1}\right) \cdot P(H_1) + P\left(\dfrac{A}{H_2}\right) \cdot P(H_2) \cdot \ldots \cdot P\left(\dfrac{A}{H_N}\right) \cdot P(H_N)$

Вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию случайное событие, совместное и несовместное событие, испытание, равновозможное событие, противоположные события. Проиллюстрируйте все определения на примерах.
2. Сформулируйте операции над событиями: сумма, произведение, разность событий. Проиллюстрируйте все определения с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Дать определение понятию вероятность события. Дать классическое определение вероятности. Перечислить свойства вероятности. Дать определение частота наступления события (использовать примеры).
4. Сформулировать теоремы сложения вероятностей и их следствия.
5. Дать определение зависимого и независимого событий. Дать определение условной вероятности. Сформулировать теоремы умножения вероятностей: вероятность

появления двух независимых событий, вероятность появления двух зависимых событий.

6. Дать определение полной группы событий. Объяснить формулу полной вероятности. Воспроизвести формулу Байеса.
7. Пусть событие С состоит в наступлении одного из двух несовместных событий А и В. Как найти в этом случае вероятность события С?

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm

7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Тема 4.2. Элементы математической статистики.

Практическая работа №13. Определение числовых характеристик случайных величин.

Цель работы: закрепить навыки нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины

Оснащение: теоретические таблицы по теме с примерами, дидактические карточки с заданиями практической работы № 13.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить задачу, используя схему Бернулли.

1.1. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение всего времени.

1.2. Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно. Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов хотя бы три выйдут их него неповрежденными.

1.3. Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0,1. Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

1.4. Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания 0,2. Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

2. По таблице распределения случайной величины X, найдите математическое ожидание данной величины.

2.1

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,07	0,1	0,13	0,18	0,04	0,14	0,19	0,12	0,03

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

2.2.

P	0,02	0,03	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,03	0,02

2.3

X	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2.4.

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

3.1.

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

3.2.

X	-1	1	2	3
P	0,48	0,01	0,09	0,42

3.3.

X	-1	1	2	3
P	0,19	0,51	0,25	0,05

3.4

X	-3	3	5	7
P	0,09	0,51	0, 1	0, 3

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной в первой задаче.

5. Решить задачу.

5.1. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

5.2. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,25.

5.3. В лотерее имеется 100 билетов, из них выигрышных: 5 по 500 руб., 20 по 50 руб., 30 по 10 руб., 45 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

5.4. У охотника 6 патронов. Он стреляет по волку, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,3.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Формула Бернулли. **2.** Случайная величина. Закон распределения случайной величины. **3.** Биноминальное распределение случайной величины. **4.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Справочный материал: Схема Бернулли: Рассматривают независимые повторения одного того же испытания с двумя возможными исходами, которые условно называются «успех» и «неудача». Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что при n таких повторениях произойдет ровно k «успехов».

Теорема Бернулли: Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,

где p - вероятность «успеха», $q = 1 - p$ - вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. **Обозначения:** Случайные величины X; Y; Z…, их значения - строчными соответствующими буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные величины.

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: x_1, x_2,…. Значение x_k принимается с некоторой вероятностью $p_k = P(X = x_k) > 0$. При этом $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Соответствие, которое каждому значению x_k дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность p_k, называется **законом распределения** случайной величины X.

значения x i	1	2	…	n

Закон распределения обычно

вероятность p i	1	2		n

задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

События X = x $_i$ (I = 1, 2, 3, …,*n*) являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую **многоугольником или полигоном** распределения вероятностей.

Биноминальное распределение. Пусть производится определенное число *n* независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие *p*.

Случайная величина X представляет собой число наступлений событий A в *n* опытах.

Закон ее распределения имеет вид:

значения x i	0	1	2	…	n
вероятность p i	P(An,0)	P(An,1)	P(An,2)	…	P(An,n)

где $P(A_{n,n})$ вычисляется по формуле Бернулли. **Закон распределения**, который характеризуется такой таблицей, называется **биноминальным.**

Числа в вероятности отражают размер отклонения случайной величины - эти числа называются **числовыми характеристиками случайной величины.**

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Свойства математического ожидания. 1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ 2. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой этой величине: $M(C) = C$ 3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$. 4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$. 5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины: $M(X \pm C) = M(X) \pm C$. 6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю: $M[X - M(X)] = 0$.

Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят, что математическое ожидание существует, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ сходится, при расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $\mathrm{D(X) = M(X\text{-}M(X))^2}$.

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в виде:

$$D(X) = \sum [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Свойства дисперсии. 1.Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$. 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат: $D(C \cdot X) = C^2 D(X)$, $D(X + C) = D(X)$. 3. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. 4. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины X – числа наступления события A в *n* независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью *p*. Случайная величина X принимает целочисленные значения *m*= 0, 1, …, *n* с вероятностями $P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам $E(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$, где q =1- p.

Функция распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле: $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию независимых испытаний относительно события. Охарактеризовать схему Бернулли. Записать теорему Бернулли.
2. Дать определение понятию случайная величина и перечислить её числовые характеристики. Дать определение понятиям дискретные и непрерывные случайные величины.
3. Дать определение понятию распределение случайной величины. Сформулировать закон распределения дискретной случайной величины. Сравнить закон распределения дискретной случайной величины с биноминальным законом распределения.
4. Дать определение понятию математическое ожидание случайной величины. Перечислить свойства математического ожидания.
5. Дать определение понятиям: дисперсия дискретной случайной величины, отклонение случайной величины от её математического ожидания. Записать формулы для нахождения дисперсии дискретной случайной величины. Объяснить свойства дисперсии.
6. Дать определение понятию среднее квадратичное отклонение. Записать формулу для нахождения среднего квадратичного отклонения. Рассказать в чем заключается закон больших чисел.
7. Имеется 4 лампочки, каждая из них с вероятностью 0,1имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон, и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. В противном случае испытания прекращаются. Найдите математическое ожидание числа испробованных лампочек.
8. Устройство состоит из 4 элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найдите математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет ровно один элемент, если всего произведено 100 независимых опытов.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Раздел 5. Основные численные методы.

Тема 5.1. Численное интегрирование

Практическая работа №14. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.

Цель работы: закрепить навыки нахождения приближенного значения определенного интеграла различными способами.

Оснащение: дидактические карточки с заданиями практической работы №14, теоретические таблицы по теме с примерами.

Задания для самостоятельного решения:

1.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_1^2 \frac{1}{2+x}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на 8 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

2.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

3.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

4.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^2 \sqrt{x+5}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Определенный интеграл. **2.** Таблица интегралов. **3.** Способы вычисления приближенного значения интеграла: способ прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол).**4.** Оценка погрешности.

Справочный материал: метод прямоугольников.

Как и при рассмотрении интегральной суммы, разобьем отрезок [*а; в*] на *n* равных частей и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат. Заменим дугу АВ кривой *у* = *f(x)* ступенчатой линией. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$$S_{заштр.} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \Delta x \cdot (f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1}))$$

Учитывая, что отрезок разделен на n рвных частей, получим:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow S_1 = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) - по\ недостатку, (рис.1)$$

. Если прямоугольники провести выше дуги, то площадь будет находится по формуле:

$$S_2 = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + ... + f(x_n)) - по\ избытку\ (рис.2),$$

$$т.е. S_1 \prec \int_a^b f(x)dx \prec S_2 - формула\ прямоугольников$$

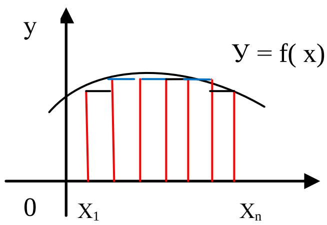


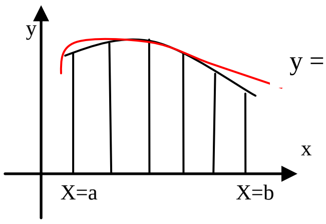
Рис.1

Предельная абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$$R_n \le \frac{\Delta x}{2} \cdot (b-a) \cdot M_1, \text{ где } M_1 = \max_{[a;b]} |f'(x)|.$$

Метод трапеций. Этот метод приближенного интегрирования обычно дает более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Дугу АВ кривой *у* = *f(x)* заменяют ломаной линией, вписанной в эту дугу. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x .... В\ итоге\ \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... y_{n-1} \right) + R_n$$



Погрешность Δ от применения формулы трапеций оценивается по формуле: $R_n \le \dfrac{(\Delta x)^2}{12}\cdot(b-a)\cdot M_2$

где M_2 – максимальное значение модуля второй производной функции $y = f(x)$ на отрезке [а;в], т.е. $M_2 = \max\limits_{x\in[a;b]}|f''(x)|$.

Метод парабол. Прежде чем формулировать этот метод, запишем две леммы.

Лемма 1.1. *Через любые три точки M_1 (x_1; y_1), M_2 (x_2; y_2), M_3 (x_3; y_3) с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида* $y = Ax^2+Bx+C$ (1)

Лемма 1.2. *Площадь s криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=Ax^2+Bx+C$, проходящей через точки M_1 (-h; y_1), M_2 (0, y_2), M_3 (h, y_3) выражается формулой* $s = \dfrac{h}{3}(y_1+4y_2+y_3)$ (2)

Сущность заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси OY.

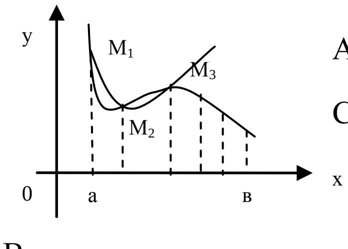
$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{3n}(y_0+y_n+2(y_2+y_4+...+y_{n-2})+4(y_1+y_3+...+y_{n-1}))$ Если отрезок интегрирования делится на четное число равных частей, мы запишем формулу Симпсона иначе:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+y_5+...+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+y_6+...+y_{2n-2})\right]$$

или, если $\sum_1 = y_0+y_{2n}$; $\sum_2 = y_1+y_3+y_5+...+y_{2n-1}$, $\sum_3 = y_2+y_4+...+y_{2n-2}$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum\nolimits_1 + 4\cdot\sum\nolimits_2 + 2\cdot\sum\nolimits_3\right) + R_n$$

В формуле параболы значение функции f(x) в нечетных точках разбиения x_1, x_3, ..., x_{2n-1} имеет коэффициент 4, в четных точках x_2, x_4, ..., x_{2n-2} - коэффициент 2 и в двух граничных точках x_0=a, x_1, x_{2n} =b - коэффициент 1.



Абсолютное значение остаточного члена общей формулы Симпсона равно: $R_n \le \dfrac{\Delta x^4}{180}\cdot(b-a)\cdot M_3$, где $M_3 = \max\limits_{[a;b]}|f^{(4)}(x)|$

В ряде случаев отыскание четвертой производной подынтегральной функции оказывается затруднительно. В этом случае для оценки погрешности вычисления интеграла по формуле

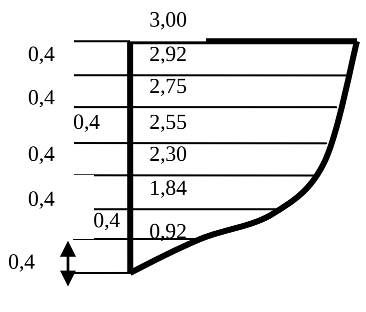
Симпсона при выбранном шаге разбиения, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, если $n = 4k$, применяют специальный прием, называемый методом удвоения шага вычислений. Вычисляется приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона, в которой принять $\Delta x = \frac{b-a}{4k}$.. Назовем найденное значение интеграла I_1. Далее шаг Δх удваивается, и вычисление по формуле Симпсона проводится для шага $\Delta x = \frac{b-a}{2k}$, вновь найденное значение интеграла обозначается I_2. Погрешность второго вычисления приблизительно в 16 раз больше погрешности первого, и обе погрешности имеют одинаковый знак. Поэтому погрешность первого вычисления можно приблизительно определить по формуле: $\delta I_1 = \frac{I_1 - I_2}{15}$. Такой способ называют оценкой погрешности формулы Симпсона по методу удвоения шага вычислений.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию численное интегрирование.
2. Запишите формулу прямоугольников для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
3. Запишите формулу трапеций для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
4. Запишите формулу парабол для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?

5.



Вычислить площадь поперечного сечения судна по данным рисунка, используя приближенные методы вычисления определенного интеграла (или формулу прямоугольников или трапеций или парабол)

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 5.2. Численное дифференцирование.

Практическая работа №15. Численное дифференцирование функций с использованием интерполяционных формул Ньютона.

Цель работы: изучить интерполяционные формулы Ньютона; составлять таблицу конечных разностей.

Оснащение: дидактические карточки с заданиями практической работы № 15, теоретические таблицы по теме с примерами.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

1.1.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	9	15	23

1.2.

x	1	2	3	4	5
y	0	5	12	21	12

1.3.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	14	22

1.4.

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	21	33

Задание 2. Известны значения некоторой функции f(x) в отдельных точках. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, вычислите f(2,3):

2.1. f(1) =1,00; f(2) = 0,25; f(3) = 0,11; f(4) = 0,06; f(5) = 0,04; f(6) = 0,03; f(7) = 0,02

2.2. f(1) = 2,00; f(2) = 0,50; f(3) = 0,22; f(4) = 0,125; f(5) = 0,08; f(6) = 0,06; f(7) = 0,04

2.3. f(1)=7,5; f(2) = 2; f(3) = -3,5; f(4) = -6; f(5) = -2.5; f(6) = 10; f(7) = 34,5

2.4. f(1) = -3,9; f(2) = -0,2; f(3) = 6,7; f(4) = 17,4; f(5) = 32,5; f(6) = 52,6; f(7) = 78,3

Задание 3.

3.1. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.2. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0,693	0,788	0,875	0,956	1,030	1,099	1,163

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.3. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	1,2661	1,3262	1,3937	1,4693	1,5534	1,6467	1,75

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.4. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	1,8640	1,9896	2,1277	2,2796	2,4463	2,6291	2,8296

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Понятие интерполяции, интерполирования. **2.** Способы интерполяции. Интерполяционная формула Ньютона.

3.Численное дифференцирование.

Справочный материал: метод прямоугольников.

1. Интерполяция, интерполирование — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному (независимому, табличному, свободному) набору известных значений.

Рассмотрим систему несовпадающих точек $x_i, i=1,2,...,n$ из некоторой области D. Пусть значения функции $f(x)$ известны только в этих точках: $y_i = f(x_i), i=1,2,3,...n$.

Задача интерполяции состоит в поиске такой функции F(x) из заданного класса функций, что $F(x_i)=y_i, i=1,2,3,...n$

Точки x_i называют узлами интерполяции, а их совокупность - интерполяционной сеткой.

Пары $(x_i;y_i)$ называют точками данных или базовыми точками.

Разность между «соседними» значениями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - шагом интерполяционной сетки.

Он может быть как переменным, так и постоянным.

Функцию F(x) - интерполирующей функцией или интерполянтом.

К настоящему времени существует множество различных способов интерполяции. Выбор наиболее подходящего алгоритма зависит от ответов на вопросы: как точен выбираемый метод, каковы затраты на его использование, насколько гладкой является интерполяционная функция, какого количества точек данных она требует и т. п.

2. Способы интерполяции. Интерполяционная формула Ньютона.

Пусть $y_0, y_1, y_2, ...$- значения некоторой функции $y=f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0, x_1, x_2, ...$, т.е. $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k = const$. Введем обозначения: $y_1-y_0=\Delta y_0, y_2-y_1=\Delta y_1, ..., y_n-y_{n-1}=\Delta y_{n-1}$- разности первого порядка данной функции; $\Delta y_1-\Delta y_0=\Delta^2 y_0, \Delta y_2-\Delta y_1=\Delta^2 y_1, ...$- разности второго порядка данной функции; $\ldots\ldots\ldots \Delta^n y_1-\Delta^n y_0=\Delta^{n+1}y_0, \Delta^n y_2-\Delta^n y_1=\Delta^{n+1}y_1, ...$- разности (n+1)-го порядка данной функции. Запишем таблицу разностей:

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Если считать *n* – не только целое и положительное число, а может быть любым (*n* = *t*), то интерполяционная формула Ньютона выглядит так:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0 \quad (1) -$$

интерполяционная ф-ла Ньютона.

Мы получили такую функцию от t, которая при t=0 обращается в y_0, при t=1 обращается в y_1, при t=2 в y_2 и т.д. Так как каждое последующее значение x при постоянном шаге h определяется равенством $x_n = x_0 + nh$, то $n = \frac{x_n - x_0}{h}$. Тогда полагая $x = x_0 + th$, т.е. $t = \frac{x - x_0}{h}$, приведем формулу(1)к виду

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\cdot\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!h^2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{3!h^3}\cdot\Delta^3 y_0 + \ldots \qquad (2)$$

3.Численное дифференцирование. Вычисление производных заданных функций проводится обычно по хорошо известным правилам и формулам дифференцирования. При этом получается аналитическое выражение для производной функции. Подстановка в полученное выражение любого аргумента, принадлежащего области допустимых значений, позволяет вычислить искомое значение производной функции. Если же функции заданы таблично, алгоритмически или очень сложной формулой с использованием специальных функций, то, как правило, прибегают к численному дифференцированию. Целью численного дифференцирования является расчет значения производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в определенной точке x.

Дифференцируя полином (1) по переменной x, получим $f'(x)$, при повторной процедуре - $f''(x)$ и т.д.

$$f'(x) \approx \left[\begin{array}{l} \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\cdot\Delta^4 y_0 + \\ + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{120}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right] / h \quad (3)$$

первый интерполяционный полином Ньютона;

$$f''(x) \approx \left[\Delta^2 y_0 + (t-1)\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11t}{12}\cdot\Delta^4 y_0 + \frac{2t^3-12t^2+21t-10}{12}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] / h^2 \text{ -(4)}$$

второй интерполяционный полином Ньютона;

Если требуется вычислить значение первой или второй, производной в каком – либо узле таблицы, то достаточно положить t=0 и из формул (3) и (4) получим следующие полезные формулы:

$$f'(x) \approx \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \cdot \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \cdot \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \cdot \Delta^5 y_0 + ... \right] / h$$ - (5) и

$$f''(x) \approx \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \cdot \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \cdot \Delta^5 y_0 + ... \right] / h^2$$ - (6).

Погрешность всех формул определяется абсолютной величиной первого из отбрасываемых членов.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулировать необходимость приближенного дифференцирования. Дать определение понятиям: интерполирование, узлы интерполяции, интерполяционная сетка, базовые точки, шаг.
2. Объяснить, как составляется таблица конечных разностей полинома. Записать интерполяционную формулу Ньютона.
3. Объяснить понятие численное дифференцирование. Записать формулы для нахождения производных первого и второго порядка.
4. Зная квадраты чисел 5,6,7,8, найдите квадрат числа 6,25, используя формулы Ньютона, и проверьте результат с помощью калькулятора.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.