МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)
«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК имени И.И. Месяцева
_________________ И.В. Артеменко
(подпись)
«29» мая 2020 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 26.02.06 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2020

Рассмотрено и одобрено на заседании

Методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Председатель МК

Е.А. Чекашова

Протокол от « 29» мая 2020 г.

Разработано

на основе ФГОС СПО по специальности 26.02.06 Эксплуатация судового электрооборудования и средств автоматики , утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014 г. № 444

Автор (составитель): Гарифуллина Е.А., преподаватель, «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Эксперт (рецензент) Чернюк Л.А., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВПО «МГТУ»

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата, подпись

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

А. Содержание

Введение

1.1 Методические указания по самостоятельной работе обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 11.02.03 Эксплуатация оборудования радиосвязи и электрорадионавигации судов базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014 г. № 441

1.2 Цели и задачи самостоятельной работы - требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

уметь:

У1 решать простые дифференциальные уравнения;

У2 применять основные численные методы для решения прикладных задач.

знать:

З1 - основные понятия и методы математического анализа;

З2 основы теории вероятностей и математической статистики;

З3 основы теории дифференциальных уравнений.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1).

Таблица 1 - Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 6.	Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 7.	Брать на себя ответственность за работу членов команды	У 1,У2, З1, З2, З3

	(подчиненных), за результат выполнения заданий.	
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	У 1,У2, З1, З2, З3
ОК 10.	Владеть письменной и устной коммуникацией на государственном и иностранном (английском) языке.	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.1.	Обеспечивать оптимальный режим работы электрооборудования и средств автоматики с учетом их функционального назначения, технических характеристик и правил эксплуатации	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.2.	Измерять и настраивать электрические цепи и электронные узлы	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.3.	Выполнять работы по регламентному обслуживанию электрооборудования и средств автоматики	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.4.	Выполнять диагностирование, техническое обслуживание и ремонт судового электрооборудования и средств автоматики	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 1.5.	Осуществлять эксплуатацию судовых технических средств в соответствии с установленными правилами и процедурами, обеспечивающими безопасность операций и отсутствие загрязнения окружающей среды	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.1.	Организовывать мероприятия по обеспечению транспортной безопасности	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.2.	Применять средства по борьбе за живучесть судна	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.3.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при организации учебных пожарных тревог, предупреждения возникновения пожара и при тушении пожара	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.4.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при авариях	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.5.	Оказывать первую медицинскую помощь пострадавшим	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.6.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна при оставлении судна, использовать спасательные шлюпки, спасательные плоты и иные спасательные средства	У 1,У2, З1, З2, З3
ПК 3.7.	Организовывать и обеспечивать действия подчиненных членов экипажа судна по предупреждению и предотвращению загрязнения водной среды	У 1,У2, З1, З2, З3

2. Тематический план видов самостоятельной работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы обучающихся	Самостоятельная работа обучающегося, час
1	2	3
Раздел 1.	**Комплексные числа**	**2**
Тема 1.1.	**Комплексные числа**	
	Самостоятельная работа	
	1. Применение комплексных чисел.	2
Раздел 2.	**Математический анализ.**	**10**
Тема 2.1.	**Дифференциальное исчисление.**	
	Самостоятельная работа	
	Применение производной для исследования функций	2
Тема 2.2.	**Интегральное исчисление.**	
	Самостоятельная работа	
	1.Вычисление объемов тел вращения с помощью определённого интеграла. 2.Применение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.	2
Тема 2.3.	**Дифференциальные уравнения.**	
	Самостоятельная работа	
	1. Дифференциальные уравнения в частных производных. 2. Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.	4
Тема 2.4.	**Ряды**	
	Самостоятельная работа	
	Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике.	2
Раздел 3.	**Основы дискретной математики**	**4**
Тема 3.1.	**Понятие множества, подмножества, отношений.**	
	Самостоятельная работа	
	1. Теория графов 2. Понятие множества и подмножества. Операции над множествами. Понятие отношений. Свойства отношений.	2 2

Раздел 4.	**Основы теории вероятностей и математической статистики.**	**2**
Тема 4.2.	**Элементы математической статистики.**	
	Самостоятельная работа	
	1.Условное и полное математическое ожидание. 2. Выполнение расчета всех числовых характеристик случайной величины на конкретном, самостоятельно выбранном примере.	2
Раздел 5.	**Основные численные методы.**	**4**
Тема 5.2.	**Численное дифференцирование.**	
	Самостоятельная работа	
	1. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	4
	Всего	**22**

Порядок выполнения самостоятельной работы обучающихся

Раздел 1. Комплексные числа

Тема 1.1. Комплексные числа

Применение комплексных чисел.

Цель: Выяснить практическое применение комплексных чисел.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить предложенный материал по теме «Комплексные числа».
2. Разобрать предложенные задачи на применение комплексных чисел.
3. Решить задачи.

Порядок выполнения задания.

1. На основании предложенного краткого конспекта материала и рекомендованной литературы, изучите теоретические вопросы по данной теме по предложенному плану.
2. Составьте краткий конспект данного материала.
3. Ответьте на вопросы контроля
4. Решите предложенное задание по изученному материалу.

Дано: $u = 340\sin(\omega \cdot t - 62^0)$*в*, $r = 1{,}6$*ом*, $x_L = 1{,}2$*ом*, сопротивление соединены последовательно. Найти ток в цепи.

5. Сделайте общий вывод по изученному материалу.

Вопросы для изучения:

1. Применение комплексных чисел в физике.

1.1. Гармонический сигнал.

1.2. Переменный ток.

1.3. Разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты.

1.4. Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную компоненты

1.5. Задача о равномерном движении точки по окружности**.**

Теоретический материал.

1. Комплексные числа в физике

Решение многих задач физики и техники приводит к квадратным уравнениям с отрицательным дискриминантом. Эти уравнения не имеют решения в области действительных чисел. Но решение многих таких задач имеет вполне определенный физический смысл. Значение величин, получающихся в результате решения указанных уравнений, назвали комплексными числами. Комплексные числа широко использовал Н. Е.

Жуковский (1847 – 1921) при разработке теории крыла, автором которой он является. Комплексные числа нашли применение во многих вопросах науки и техники.

1.1 Гармонический сигнал

Гармонический сигнал — это гармонические колебания с течением времени распространяющиеся в пространстве, которые несут в себе информацию или какие-то данные и описываются уравнением: $y = A\cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$, где A — амплитуда сигнала; $\varphi = \omega \cdot t + \varphi_0$ - фаза гармонического сигнала; t - время; ω - циклическая частота сигнала.

Тем не менее, часто используют комплексную запись сигнала: $y = A\exp\left[j \cdot (\omega \cdot t + \varphi_0)\right]$.

Достоинство комплексного метода: при его применении в анализе цепей переменного тока можно применять все известные методы анализа постоянного тока.

1.2. Переменный ток.

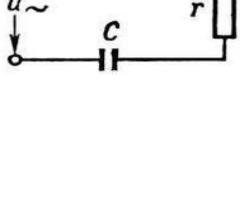
В конце прошлого столетия стали широко применять генераторы переменного тока. Для расчета цепей переменного тока оказались непригодными старые методы, разработанные для цепей постоянного тока и основанные на законе Ома. В 1893 г. американский электротехник Ч. П. Штейнмец предложил эффективный метод расчета цепей переменного тока. Этот метод целиком основан на применении комплексных чисел.

Переменный ток - в широком смысле электрический ток**,** изменяющийся во времени. Мгновенное значение силы i переменного тока меняется во времени по синусоидальному закону: $i = I_m \sin(\omega t + \alpha)$, где I_m — амплитуда тока, $\omega = 2\pi f$ — его угловая частота, α — начальная фаза. Синусоидальный (гармонический) ток создаётся синусоидальным напряжением той же частоты: $u = U_m \sin(\omega t + \beta)$, где U_m — амплитуда напряжения, β — начальная фаза

Закон Ома формулируется так: Сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению, приложенному к участку, и обратно пропорциональна характеристике участка, которую называют электрическим сопротивлением этого участка.

Под законом Ома в комплексной форме понимают:Í = Ú / Z

$$\begin{cases} \dot{I} = Ie^{j\varphi_i} \\ \dot{U} = Ue^{j\varphi_u} \end{cases} \Rightarrow \underline{z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = ze^{\pm j\varphi} = z\cos\varphi \pm jz\sin\varphi = r \pm jx.$$



Сопротивление в цепи переменного тока характеризуется не только величиной активного сопротивления r (то, что подразумевается под сопротивлением, когда говорится о цепях постоянного тока), но и индуктивностью L и электрической емкостью C.

Индуктивность - физическая величина, характеризующая магнитные свойства электрической цепи.

Электрическая ёмкость — характеристика проводника, мера его способности накапливать электрический заряд.

Комплексное сопротивление участка цепи представляет собой комплексное число, вещественная часть которого соответствует величине активного сопротивления, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению.

Активное сопротивление — сопротивление электрической цепи или её участка, обусловленное необратимыми превращениями электрической энергии в другие виды энергии (в тепловую энергию). Реактивное сопротивление - это сопротивление обусловленное передачей энергии электрическому или магнитному полю (и обратно), с учётом поверхностного эффекта (эффект затухания электромагнитных волн по мере их проникновения в глубь проводящей среды). В результате этого эффекта, например, переменный ток высокой частоты, при протекании по проводнику распределяется не равномерно по сечению, а преимущественно в поверхностном слое.

Z = R + iX, где Z — импеданс, R — величина активного сопротивления, X — величина реактивного сопротивления, i — мнимая единица.

Импедансом $\hat{z}(j\omega)$ называется отношение комплексной амплитуды напряжения гармонического сигнала, прикладываемого к двухполюснику, к комплексной амплитуде тока, протекающего через двухполюсник. При этом импеданс не должен зависеть от времени.

$$\hat{z}(j\omega) = \frac{\hat{u}(j\omega,t)}{\hat{i}(j\omega,t)} = \frac{U(\omega)e^{j(\omega t+\phi_u(\omega))}}{I(\omega)e^{j(\omega t+\phi_i(\omega))}} = \frac{U(\omega)e^{j\phi_u(\omega)}}{I(\omega)e^{j\phi_i(\omega)}} = \frac{\hat{U}(j\omega)}{\hat{I}(j\omega)}$$

Здесь:

- j — мнимая единица;
- ω — циклическая частота;
- U(ω), I(ω) — амплитуды напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;
- $\varphi_u(\omega)$, $\varphi_i(\omega)$ — фазы напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;
- $\hat{U}(j\omega)$, $\hat{I}(j\omega)$ — Комплексные амплитуды напряжения и тока гармонического сигнала на частоте ω;

Исторически сложилось, что обозначение импеданса, комплексных амплитуд и других комплекснозначных функций частоты записывают как $f(j\omega)$, а не $f(\omega)$. Такое обозначение показывает, что мы имеем дело с комплексными представлениями гармонических функций вида $e^{j\omega t}$. Кроме того, над символом, обозначающим комплексный сигнал или комплексный импеданс, обычно ставят «домик» или точку: $\hat{U}(j\omega)$чтобы отличать от соответствующих действительных величин.

Если рассматривать комплексный импеданс как комплексное число в алгебраической форме, то действительная часть соответствует активному сопротивлению, а мнимая — реактивному. Рассмотрение действительной части полезно при расчёте мощности, выделяемой в двухполюснике, поскольку мощность выделяется только на активном сопротивлении.

Если рассматривать импеданс как комплексное число в тригонометрической форме, то модуль соответствует отношению амплитуд напряжения и тока (сдвиг фаз не учитывается), а аргумент — сдвигу фазы между током и напряжением, то есть, на сколько ток отстаёт от напряжения.

Фаза колебаний — аргумент периодической функции $cos(\omega t+\varphi_0), sin(\omega t+\varphi_0)$ или $e^{i(\omega t+\varphi_0)}$, описывающей гармонический колебательный процесс (ω — угловая частота, t— время, φ_0— начальная фаза колебаний, то есть фаза колебаний в начальный момент времени t = 0). Фаза обычно выражается в угловых единицах (радианах, градусах) или в циклах (долях периода): 1 цикл = 2π радиан = 360°. Сдвиг фаз — разность начальных фаз переменных величин, изменяющихся по синусоидальному закону с одинаковой частотой. Сдвиг фаз измеряется в градусах, радианах или долях периода. В электротехнике большое практическое значение имеет сдвиг фаз между напряжением и током, определяющий коэффициент мощности в цепях переменного тока.

Комплексные числа также используются в описании процессов плоского течения жидкости, обтекания профилей жидкостью, волновые движения жидкости.

Комплексные числа широко используются в различных областях физики, в особенности в описании волновых и электромагнитных процессов. С помощью комплексных чисел можно рассчитать параметры для сетей не только постоянного, но и переменного тока.

Применение комплексных функций действительного аргумента позволяет компактно изложить ряд вопросов из области кинематики и динамики.

Пусть точка Z перемещается по плоскости. Выбрав прямоугольную систему координат xOy, можем считать, что движение происходит по комплексной плоскости, а точка Z имеет комплексную координату $z = x + iy$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. В каждый момент времени t точка Z будет иметь определенную скорость $\upsilon(t)$, причем ее компоненты равны $x(t)$ и $y(t)$. Следовательно, в каждый момент времени t скорость точки Z характеризуется комплексным числом $x(t)+iy(t)$, которое можно записать так: $z(t)$. Аналогично ускорение w точки Z в каждый момент времени t задается комплексным числом $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Числа $z(t)$ и $z(t)$ будем называть комплексной скоростью и комплексным ускорением точки Z.

Широкое применение нашли комплексные числа в картографии, электротехнике, гидродинамике, теории фильтрации почв, теоретической физике. Уже в нашем столетии комплексные числа и комплексные функции (функции, у которых и значениями аргумента, и значениями функции являются комплексные числа) успешно применялись русскими и советскими математиками и механиками Н. Е. Жуковским (1847 — 1921), С. А. Чаплыгиным (1869— 1942), М. В. Келдышем (1911 — 1978) и другими в аэродинамике. Советские математики Г. В. Колосов (1867—1936) и Н. И. Мусхелишвили (1891 — 1976) впервые стали применять комплексные функции в теории упругости (то есть по существу к расчетам различных конструкций на прочность). С применением комплексных переменных в теоретической физике связаны исследования советских ученых Н. Н. Боголюбова (род. 1909) и В. С. Владимирова (род. 1923).

В 20-х годах нашего столетия стала разрабатываться квантовая механика. Для нее оказался особенно полезным аппарат комплексных чисел. Вот что пишет об этом известный современный физик Е. Вагнер в своем очерке «Непостижимая эффективность математики в естественных науках»: «Для неподготовленного ума понятие комплексного числа далеко не естественно, не просто и никак не следует из физических наблюдений. Тем не менее, использование комплексных чисел становится почти неизбежным при формулировке законов квантовой механики. Кроме того, не только комплексным числам, но и так называемым аналитическим функциям суждено сыграть решающую роль в формулировке квантовой теории».

Для навигаторов представляет значительный интерес способ построения географической карты, при котором сохраняются углы между линиями. Такой способ называется конформной (то есть сохраняющей форму) проекцией. Оказывается, что с помощью функций комплексного переменного возможно указать бесконечно много конформных проекций.

Значительное применение нашли комплексные числа при изучении движения естественных и искусственных небесных тел. Приведем пример. Одна из важных задач, возникшая при подготовке запусков первых искусственных спутников Земли, состояла в следующем: как будет двигаться спутник под влиянием тяготения к «сплюснутому сфероиду» (такую форму имеет земной шар, который несколько сплюснут у полюсов, его полярный диаметр примерно на 42 километра меньше экваториального диаметра). Одним из самых эффективных способов решения этой задачи оказался способ, основанный на применении комплексных чисел. Он был предложен советскими учеными Е. П. Аксеновым, Е. А. Гребенщиковым и В. Г. Деминым.

1. 3. Разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты

Пусть точка P (рис. 51) движется в плоскости по какому-либо закону, A — начало отсчета. Требуется найти компоненты скорости: радиальную υ_r (проекцию вектора скорости на ось AP) и трансверсальную (или поперечную) υ_n (проекцию вектора скорости на ось, образующую с осью AP угол $+\pi/2$ радиан).

Решение. Пусть AN — действительная ось *Ax*, <NAP = φ. В каждый момент t точка *P* имеет комплексную координату $z = re^{i\varphi}$ (*г* и φ — функции от t). Скорость точки *P* характеризуется комплексным числом $\frac{dz}{dt}$ *(ż)*. Дифференцируя по обычным правилам произведение $re^{i\varphi}$, получим:

$z=re^{i\varphi}+r\varphi\, i\, e^{i\varphi}$. Отсюда ясно, что $\upsilon_r = r$, $\upsilon_n = r\varphi$.

1.4. Разложение ускорения на тангенциальную и нормальную компоненты Пусть точка P движется по некоторой кривой Г так, что скорость точки задается в каждый момент t комплексным числом $\upsilon=\upsilon(t)$ (рис. 52). Понятно, что скорость будет в течение всего движения направлена по касательной т к кривой, чего нельзя сказать об ускорении. Требуется найти проекции ускорения на касательную (w_ι) и на нормаль (w_H) к кривой.

Эта задача аналогична предыдущей. Запишем вектор скорости в комплексной форме: $z= \upsilon e^{i\Psi}$, где υ — абсолютная величина скорости точки *P*, а Ψ— угол между осью Ox и касательной (Ψ) к кривой Г. Дифференцируя по переменному t, получим: $w = \dot{z} = \upsilon\, e^{i\Psi} + \upsilon\Psi i e^{i\Psi}$.

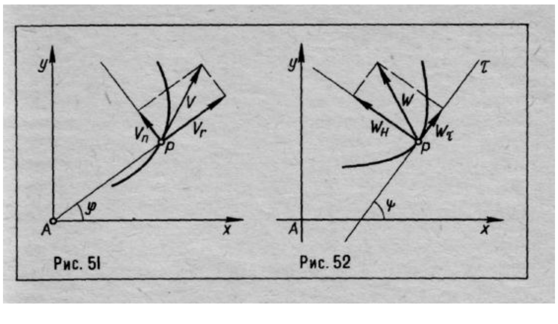
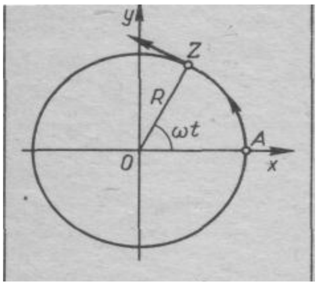


Рис. 51 Рис. 52

Отсюда ясно, что проекция w_ι вектора ускорения w на касательную ось т равна υ, а проекция w_h того же вектора w на ось, получающуюся из оси т поворотом на $+\frac{\pi}{2}$ радиан, равна $v\Psi$: $W_r = \upsilon$, $W_H = \upsilon\psi$.

1.5. Задача о равномерном движении точки по окружности.



Пусть точка Z движется по некой окружности $|z|=R$ в положительном направлении с постоянной скоростью (по абсолютной величине) линейной скоростью υ. Какое ускорение имеет эта точка? (рис. 2)

Решение. Пусть точка Z в момент $t=0$ находиться в точке A.

Угловая скорость точки Z равна ω.

Тогда $\upsilon = R\omega$. Точка Z имеет комплексную координату $z = Re^{i\omega t}$, комплексную скорость $\check{z}=R\omega i e^{ti\omega}$ комплексное ускорение $\dot{z} = R\omega^2 e^{i\omega t} = \frac{v^2}{R^2} e^{it\omega} = \frac{v^2}{R}(-e^{i\omega t})$. Отсюда видно, что $|\check{z}|=\frac{v^2}{R}$, а направление ускорения характеризуется ортом (вектором единичной длины), имеющим комплексную координату. А это значит, что точка Z движется с ускорением, которое в каждый момент времени t направлено к центру окружности (см. приложение).

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Поясните, как изображается и записывается гармонический сигнал при помощи комплексных чисел.
2. Поясните на примерах, как применяются комплексные числа для переменного тока.
3. Расскажите, как разложение скорости точки на радиальную и трансверсальную компоненты использует комплексные числа.
4. Поясните, как в задаче о равномерном движении точки по окружности используются комплексные числа**.**

Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.

Дополнительная литература:

1. Большая Советская Энциклопедия
2. Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии, М. Физматгиз, 1963
3. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел, М. Просвещение, 1975

4. Алешков Ю.З., Смышляев П.П. Теория функций комплексного переменного и ее приложения, изд-во ЛГУ, 1986
5. Роджерс Э. Физика для любознательных, М., 1971
6. Балк, М.В. Реальные применения мнимых чисел / М.В. Балк, Г.Д. Балк, А.А. Полухин.- Киев: Радянськая школа, 1988.
7. Морозова, В.Д. Теория функций комплексного переменного / В.Д. Морозова.- М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
8. Привалов, И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов.- М.: Гос. из-во техн.-теор. лит., 1954.
9. Туманов, С.И. Элементарная алгебра. Пособие для самообразования / С.И. Туманов.- М.: Просвещение, 1970.
10. Цыркин, М.Я. Краткий курс теории функций комплексного переменного / М.Я. Цыркин.- М.: Просвещение, 1964.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1. Дифференциальное исчисление

Применение производной для исследования функций

Цель: Проверить на практике умение находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить теоретический материал по теме «Исследование функций с помощью производной и построение графиков».
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. Составить краткий конспект данного материала.
2. Исследовать и построить график функции $y = \ln\frac{1}{x}$

Вопросы для изучения:

1. Изучить общую схему исследования функции с помощью производной. Рассмотреть предложенную задачу по исследованию и построению графика функции.
2. Решить задачи на данную тему.

Теоретический материал.

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y = 0$, ось ОУ имеет уравнение $x = 0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0 \qquad (1)$$

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) \qquad (2)$$

Если $k = 0$, то прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \ \textit{или} \ \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty .$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить производную функции $f'(x)$;
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует;

4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;

5. Если в рассматриваемом интервале

$f'(x)\ 0$, то на этом интервале функция убывает;

$f'(x)\ 0$, то на этом интервале функция возрастает.

6. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1.Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;

2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x) = 0$ или не существует;

3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;

4. Если в рассматриваемом интервале

$f''(x)\quad 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

$f''(x)\quad 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$и построить ее график.

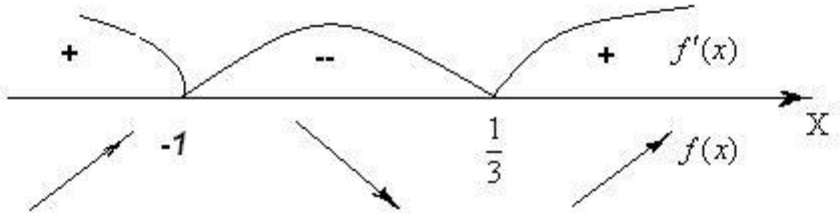
Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1 \quad и \quad x = 1$.

   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x = 0$, то $y = -1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную:

$y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим:

$x_1 = -1$ *и* $x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



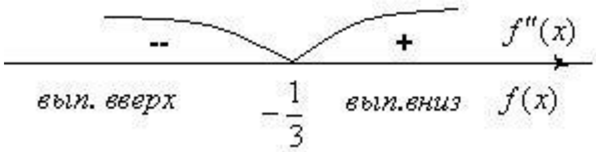
Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)$ *и* $(\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\ 0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

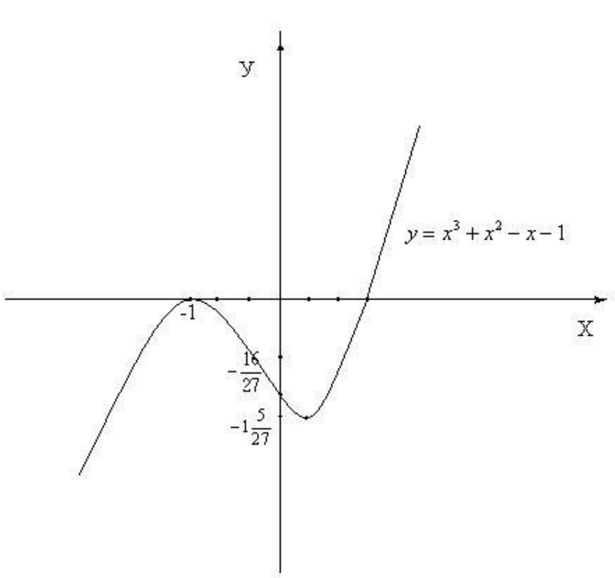
$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ и выпуклым вниз на $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$

ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f\left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $\left(\frac{-1}{3};\frac{-16}{27}\right)$

7. Построим график



Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Перечислите порядок действий при исследовании функции с помощью производной.
2. Выполните предложенное задание.

Рекомендуемая литература.

Основная:

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.1.Изд.2, испр.- М.: ЛЕНАНД, 2015. – 368 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 416 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2010
2. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть I, М. «Наука», 1978
3. Яковлев Г.Н. Алгебра и начала анализа, часть П, М «Наука», 1978. Шипачёв В.С. Начала высшей математики: Учебное пособие для вузов. – М.: Дрофа, 2004.
4. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов на базе средней школы: Учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.-576
5. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
6. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.

Тема 2.2. Интегральное исчисление.

Вычисление объемов тел вращения с помощью определённого интеграла

Цель: познакомиться с формулами нахождения объемов тел вращения относительно оси ОХ; научиться применять определенный интеграл для решения задач.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу: Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла. [1] гл. с.68

2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решите предложенные задачи:

1) Из всех цилиндров, вписанных в шар радиусом R, найдите тот у которого объем наибольший.

2) Из бумажного круга радиуса R вырезан сектор и из оставшейся части круга склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольший? Найдите радиус основания и высоту воронки.

3) Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения Ox. $y=-1+x^2, y=0$.

4) Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения Ox. $y^2=9x, y=3x$.

Вопросы для изучения:

1. Объемы фигур вращения. Общие формулы.
2. Исследования на экстремум в задачах на объемы фигур вращения.
3. Вычисление объемов фигур вращения с помощью определенного интеграла.
4. Разобрать предложенные задачи.

Вычисление объёмов тел вращения.

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Оx, может быть выражена как функция от x, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Оx плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле: $V=\int_a^b S(x)dx$.

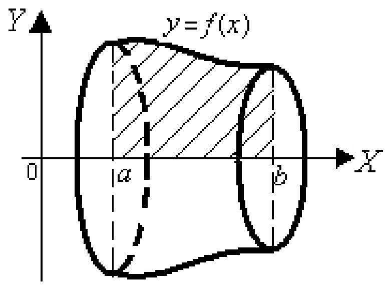
Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, $y = 0$, вращается вокруг оси Оx, то объем тела вращения вычисляется: $V_x=\pi\int_a^b y^2dx$

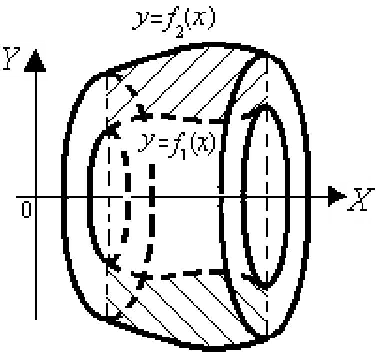
Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и непрерывной кривой $y = f(x)$, где $f(x)\geq 0$ для $x\in[a;b]$, вращается вокруг оси OX. Объем полученного при этом тела вращения (рис. 1) вычисляется по формуле: $V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Если криволинейная трапеция ограничена линиями $x = a$, $x = b$,

$y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a; b]$, то объем полученного при ее вращении вокруг OX тела (рис. 2) можно вычислить по формуле:

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi\int_a^b f_2{}^2(x)dx - \pi\int_a^b f_1{}^2(x)dx = \pi\int_a^b (f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx.$$





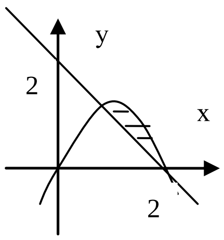
Пример: Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ и прямой $y = 2x$ и $x \in [0;2]$.

Решение: $V = \pi\int_0^2 (2x - x^2)dx = \pi\left(x^2 - \dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \dfrac{4}{3}\pi$.

Ответ: $1\dfrac{1}{3}\pi$ (куб.ед.)

Пример: Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения

Ox. $y = 2x - x^2, y = -x + 2$.



$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

$$V = \pi\int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx =$$

$$= \pi\int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)dx =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4\right) = \frac{\pi}{30}.$$

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите формулы для нахождения объемов тел вращения относительно оси ОХ.
2. Запишите формулы для нахождения объема тел вращения относительно оси ОУ.

Рекомендуемая литература.

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.2. Изд.стереотип, М.: ЛЕНАНД, 2015. – 416 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
3. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009

Применение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.

Цель: познакомиться с формулами нахождения различных физических величин с помощью определенного интеграла; научиться применять определенный интеграл для решения задач.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Разобрать предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать и записать в тетрадь предложенные задания.

Вопросы для изучения:

1. Работа переменной силы.
2. Координаты центра масс.
3. Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

1. Работа переменной силы

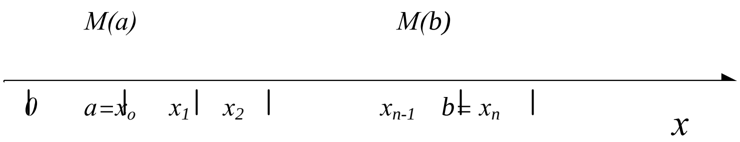
Рассмотрим материальную точку, движущуюся под действием силы P по прямой. Если действующая сила постоянна и направлена вдоль прямой, а перемещении равно S, то работа A этой силы равна произведению Ps.

Выведем формулу для подсчета работы, совершаемой переменной силой.

Пусть точка движется по оси $0x$ под действием силы, проекция которой на ось $0x$ есть функция f от x. При этом будем полагать, что f есть непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(b)$.

Покажем, что в этом случае работа A подсчитывается по формуле $A = \int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Это отрезки $[a;x_1]$; $[x_1;x_2]$;…; $[x_{n-1};b]$



Работа силы на всем отрезке $[a;b]$ равна сумме работ этой силы на полученных отрезках. Так как f есть непрерывная функция от x, при достаточно малом отрезке $[a;x_1]$ работа силы на этом отрезке приблизительно равна $f(a)\ [x_1-a]$. Мы пренебрегли тем, что f на отрезке меняется. Аналогично работа силы на втором отрезке $[x_1;\ x_2]$ приближенно равна $f(x_1)(\ x_1-x_2)$ и т.д.; работа силы на отрезке приближенно равна. Следовательно, работа силы на n-м отрезке приближенна равна $f(x_{n-1})(\ b-x_{n-1})$. Следовательно, работа силы на всем отрезке $[a;b]$ приближенно равна:

$$A \approx A_n = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}))$$

и точность приближенного равенства тем выше, чем короче отрезки, на которые разбит отрезок $[a;b]$. Это равенство переходит в точное, если считать, что $n \to \infty$.

$$A_n = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) \to A$$

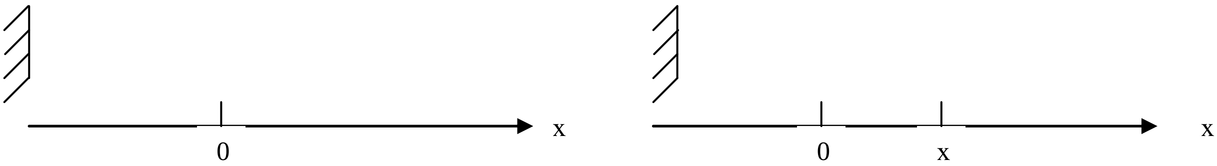
Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \int_a^b f(x)dx$, то формула выведена.

Работу A, произведенную переменной силой $f\ (x)$при перемещении по оси Ох материальной точки от $x = a$ до $x = в$, находим по формуле $A = \int_a^b f(x)dx$. При решении задач на вычисление работы силы, связанных с растяжением - сжатием пружины, основываются на соотношении $F = kx$, F - сила, x - абсолютное удлинение пружины, вызванное силой F, k - коэффициент пропорциональности.

Пример: Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна *3Н*. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

Решение.

По закону Гука сила F , растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $F = kx$, где k – постоянный коэффициент пропорциональности, точка 0 соответствует свободному положению пружины.



Из условия задачи следует, что $3 = k \cdot 0,05 \Rightarrow k=60$ и $F=60x$.

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,075 Дж.$$

2. Центр масс.

При нахождении центра масс пользуются следующими правилами:

1) Координата x' центра масс системы материальных точек A_1, A_2. …, A_n с массами m_1, m_2, …, m_n, расположенных на прямой в точках с координатами x_1, x_2, …, x_n, находится по формуле:

$$x' = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_1 + ... + m_1}$$

2) При вычислении координаты центра масс можно любую часть фигуры заменить на материальную точку, поместив ее в центр масс этой части, и приписать ей массу, равную массе рассматриваемой части фигуры.

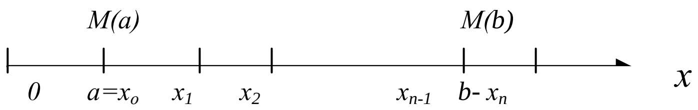
Пусть материальная однородная пластина В имеет форму криволинейной трапеции $x \in [a;b]$, $y \in [0; f(x)]$, функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Площадь этой криволинейной трапеции равна S. Координаты центра масс $(x_0; y_0)$ пластины В находятся по формулам: $x_0 = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx \quad y_0 = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx$.

Пример: Пусть вдоль стержня – отрезка *[a;b]*.оси *0x* – распределена масса плотностью $\rho(x)$, где $\rho(x)$ непрерывная функция. Покажем, что:

а) суммарная масса стержня $M = \int_a^b \rho(x)dx$

б) координата центра масс $x' = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)dx$

Разобьем отрезок *[a;b]* на *n* равных частей точками $a=x_o< x_1< x_2<\ldots <x_n= b$



На каждом из n этих отрезков плотность можно считать при больших n постоянной и примерно равной $\rho(x_{k-1})$ на *k-м* отрезке (в силу непрерывности$\rho(x)$).
Тогда масса *k-го* отрезка примерно равна

$m_k = \frac{b-a}{n}\rho(x_{k-1})$, а масса всего стержня равна $\frac{b-a}{n}(\rho(x_o)+ \rho(x_1)+\ldots+ \rho(x_{n+1}))$

Считая каждый из n маленьких отрезков материальной точкой массы m_k, помещенной в точке x_{k-1}, получим по формуле, что координата центра масс приближенно находится так:

$$x'_n = \frac{\frac{b-a}{n}(x_o\rho(x_o) + x_1\rho(x_1) + \ldots + x_{n-1}\rho(x_{n-1}))}{\frac{b-a}{n}(\rho(x_o) + \rho(x_1) + \ldots + \rho(x_{n-1}))}$$

При $n\to\infty$. Числитель стремится к $\int_a^b x\rho(x)dx$, а знаменатель (выражающий массу всего стержня) к интегралу $\int_a^b \rho(x)dx$.

Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку.

Для пластинки постоянной ширины сила давления жидкости вычисляется по формуле: $P = 9{,}81\rho\int_a^b xydx,\quad \rho$ - плотность жидкости.

№2. Сила в 1 Н растягивает пружину на 3 см. Какую работу она при этом производит?

Решение. Если F–сила, A – работа S– перемещение, то F = A'(S).

По закону Гука сила пропорциональна растяжению или сжатию пружины, т. е. F = kx, где k – коэффициент пропорциональности, x – величина растяжения или сжатия.

Используя данные задачи, найдите коэффициент k. Подставим данные в задаче величины в уравнение, выражающее закон Гука. Получим: $k = \frac{1}{0{,}03}$.

Следовательно, сила, растягивающая нашу пружину, выразится следующим образом: $F = \frac{1}{0{,}03}x$.

Так как сила начинает действовать на пружину в состоянии покоя, то работа $A = \int_0^{0{,}03} \frac{1}{0{,}03} x\,dx = (\frac{1}{0{,}03} \cdot \frac{x^2}{2})|_0^{0{,}03} = 0{,}015$ Дж

Ответ: 0,015 Дж

№3. Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м х 0,7 м.

Решение.

Выберем систему координат так, чтобы оси Oy и Ox соответственно содержали верхнее основание и боковую сторону вертикальной стенки аквариума. Для нахождения силы давления воды на стенку воспользуемся формулой

P= $g \int_a^b \rho x f(x)\,dx$

Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому f(x)=0.7x, x϶ [0;0.4] Так как пределы интегрирования a=0 и b=0,4, то получим:

$$P=g\int_0^{0,4} 1000*0{,}7*x dx = 700\ \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4} = 56g \approx 549H$$

Ответ: 549 Н

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите формулу для нахождения силы натяжения пружины.
2. Запишите формулу для нахождения силы давления пластины.

Рекомендуемая литература.

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.2. Изд.стереотип, М.: ЛЕНАНД, 2015. – 416 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
3. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009

Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.
Дифференциальные уравнения в частных производных.
Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.

Цель: познакомиться с дифференциальными уравнениями в частных производных, научиться решать простейшие дифференциальные уравнения в частных производных применительно разделов науки.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. [1] гл. 10 с. 198. , [3] стр.351.
2. Частные производные функции нескольких переменных. [1] гл. 10 с. 205. [3] стр.353.
3. Полный дифференциал. [1] гл. 10 с. 209 [3] стр.355.
4. Частные производные высших порядков. [1] гл. 10 с. 219, 222, [3] стр.357.
5. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка. [1] гл. 12 с. 376 [4] стр.186 - 194.
6. Применение дифференциальных уравнений в науке и технике.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение частных производных.
2. Поясните, что такое частный дифференциал функции? Полный дифференциал?

Рекомендуемая литература.

1. Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом или как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа Т.2. Изд.стереотип, М.: ЛЕНАНД, 2015. – 416 с.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
3. Е.В. Филимонова. Математика. Р.-на-Д. «Феникс».2008 г.
4. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Каплан И.А. Пустынников В.И. Практикум по высшей математики в двух томах, Т.1.: учебное пособие/И.А. Каплан, В.И. Пустынников: под общей ред. проф. В.И. Пустынникова. 6 изд., испр. и доп.. – М. Эксмо. 2006. – 576с.

Тема 2.4. Ряды.

Разложение в ряды Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике

Цель: научиться раскладывать тригонометрический ряд в ряд Фурье на различных интервалах, раскладывать в ряд Фурье функции, часто используемые в электротехнике.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить задачи на данную тему

Вопросы для изучения:

1. Прочитайте [1] Глава 28 §1Тригонометрический ряд Фурье: понятие гармоника, понятие тригонометрического ряда Фурье, Теорема Дирихле.
2. Составьте краткий конспект данного материала.
3. Прочитайте [1] Глава 28 §2 Ряд Фурье для нечетной функции.
4. Составьте краткий конспект данного материала.
5. Прочитайте [1] Глава 28 §3 Ряд Фурье для четной функции.
6. Составьте краткий конспект данного материала.
7. Прочитайте [1] Глава 28 §4 Разложение в Ряд Фурье функции, заданной в промежутке $0 \le x \le 2\pi$.
8. Составьте краткий конспект данного материала.
9. Прочитайте [1] Глава 28 §5 Разложение в Ряд Фурье функции, заданной в произвольном промежутке
10. Составьте краткий конспект данного материала.
11. Прочитайте [1] Глава 28 §6 Разложение в Ряд Фурье некоторых функций, часто встречающихся в электротехнике.
12. Решите предложенные задачи.

1. Разложить в ряд Фурье на $(0;2\pi)$ функцию: $f(x)=\dfrac{\pi - x}{2}$;

2. Разложить в ряд Фурье периодическую $(T = 2\pi)$ функцию $f(x)$, определенную на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ равенствами $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье на $(-\pi, \pi)$ $f(x) = x\cos x$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Запишите формулы для разложения в ряд Фурье функции на промежутке $0 \le x \le 2\pi$.
2. Расскажите в чем отличие разложения в ряд Фурье функции четной от нечетной?
3. Проанализируйте, как отличается тригонометрический ряд, в зависимости от промежутка разложения.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2014г.
2. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное Фобразование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
3. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010 г.

Дополнительная литература

1. Е.В. Филимонова. Математика для средних специальных учебных заведений. Р.-на-Дону. «Феникс». 2008 г.
2. В.С. Михеев, О.В. Стяжкина, О.М. Шведова, Г.П. Юрлова. Ростов-на-Дону, «Феникс»,2009г.
3. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
4. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.

Тема 3.1. Понятие множества, подмножества, отношений. Теория графов.

Цель: познакомиться с понятиями теории графов.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить основные понятия теории графов, свойства и виды графов.
2. Решить предложенные задачи.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить задачу:

В обеденный перерыв члены строительной бригады разговорились о том, кто, сколько газет читает. Выяснилось, что каждый выписывает и читает две и только две газеты, каждую газету читает пять человек, и любая комбинация читается одним человеком. Сколько различных газет выписывают члены бригады? Сколько человек в бригаде?

Вопросы для изучения:

1. Определение графа. Его элементы. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
2. Виды графов: орграф, неограф, мультиграф, псевдограф. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
3. Способы задания графов [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
4. Связность. [1] Глава 1 §1 п. 1.2. стр.25
5. Маршруты, пути, цепи и циклы [1] Глава 1 §1 п. 1.2.2. стр.34.
6. Планарность [1] Глава 1 §1 п. 1.2.4. стр.44.
7. Деревья и лес [1] Глава 1 §1 п. 1.2.3. стр.41.
8. Обзор задач теории графов:
    - Задача о кратчайшей цепи;
    - Задача о максимальном потоке;
    - Задача об упаковках и покрытиях;
    - Раскраска графа;

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Перечислите способы задания графа.
2. Перечислите основные элементы графа.
3. Изобразите связный граф. Назовите элементы.
4. Дайте определение понятиям: маршруты, пути, цепи и циклы, деревья.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
2. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная литература

1. Д. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
2. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.
3. Е.П. Липатов. Теория графов и её применение. – М., Знание, 1986, 32с.
4. В.П. Сигорский. Математический аппарат инженера. – К., «Техника», 1975, 768с.
5. О.Оре «Графы и их применение», М. Мир, 1965.

Понятие множества и подмножества. Операции над множествами. Понятие отношений. Свойства отношений.

Цель: познакомиться с понятиями: множество, подмножество, элементы множетва, операции над множествами, понятием и свойствами отношений.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Придумать конкретные задачи, иллюстрирующие операции над множествами.

Порядок выполнения задания.

1. На основании материала и литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плана.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Составить и решить задачи.

Вопросы для изучения:

1.1 Первичные понятия.

«Множество, элемент, принадлежит»- первичные понятия теории множеств.

Обозначение: множество: А, В, … (латин.); элементы множества: а, в,… (малые лат.).

$\in -принадлежит;$

1.2 Равенство множеств. Пустое множество.

О.1: Два множества считаются равными в том и только в том случае, когда они состоят из одних и тех же элементов.

О.2.: Всякое множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым.

Обозначение: $\varnothing$.

1.3. Способы задания множеств.

Множество, которое содержит конечное (бесконечное) число элементов, называется конечным (бесконечным). $\varnothing$ - конечное множество.

О.1. Будем считать множество заданным, если для любого предмета (элемента) есть принципиальная возможность установить, является он элементом этого множества или нет.

Задание множества перечислением. $M_1 = \{1; 2; 3; 4\}$ - множество М, состоящее из чисел 1, 2, 3 и 4.

Не все множества можно так задать.

Задание множеств указанием характеристического свойства.

Пусть некоторое множество U задано и P - некоторое свойство, которым какие-то элементы U обладают, какие-то не обладают. Таким образом, задано множество М всех тех и только тех элементов из U, которые обладают свойством P. Свойство P называется <u>*характеристическим* </u>для множества м, а такой способ - *при помощи (или указанием) характеристического свойства.*

$M = \{x | x \in U \; и \quad P(x) \; \} или \quad M = \{x \in U | P(x) \; \}$- множество всех *x* из U таких, что *P(x)*/

Словесный способ задания множеств. - перечисление, или словесное описание характеристического свойства.

1.4. Отношение включения множеств.

О.1. Говорят, что множество *A* включается во множество *B* (содержится во множестве *B*): $A \subseteq B$, если все элементы множества *A* являются элементами и множества *B*.

Если же $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то говорят, что множество *A* строго включается в *B*: $A \subset B$.

Если $A \subseteq B$, то говорят также , что *A* - <u>подмножество</u> множества *B*, а если $A \subset B$, то говорят, что

A <u>собственное</u> подмножество множества *B*.

Т.1. Пустое множество является подмножеством любого множества и собственным подмножеством любого непустого множества.

1.5. Свойства отношения включения.

1. Рефлексивность. Для любого множества *A*: $A \subseteq A$.

2. Транзитивность. Для любых множеств *A, B, C*: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

3. Антисимметричность. Для любых множеств *A, B*: если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, то $A \equiv B$.

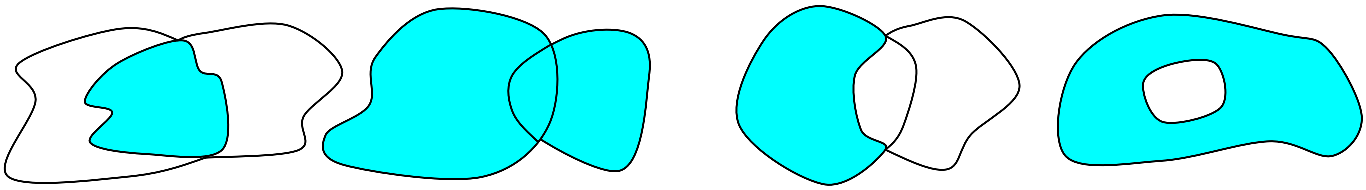
На антисимметричном свойстве отношения включения основано доказательство равенства множеств.

1.6. Операции над множествами.

О.1. Пусть A, B, C - некоторые множества, причем $A \subseteq C$. При помощи характеристического свойства определим еще четыре множества:

$$A \cap B = \{x | x \in A \, и \quad x \in B \},$$
$$A \cup B = \{x | x \in A \, или \quad x \in B \},$$
$$A \setminus B = \{x | x \in A \, и \quad x \notin B \},$$
$$\overline{A_C} = C \setminus A.$$

Это соответственно операции **пересечение, объединение, разности (вычитания) и дополнение.**

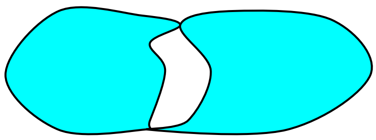


$A \cap B$ $\qquad$ $A \cup B$ $\qquad$ $A \setminus B$ $\qquad$ $\overline{A_C}$

Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется **диаграммой Эйлера – Вэйна**.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B.

Обозначается: A Δ B. $\qquad$ A Δ B = (A \ B) ∪ (B \ A)



A $\qquad$ B

1.7. Свойства операций над множествами.

Т.1. Пусть A, B, C - произвольные подмножества некоторого фиксированного множества U, которое назовем универсальным.

<u>Справедливы следующие соотношения</u>:

1.*Закон двойного дополнения* : $\overline{\overline{A}} = A$

2.*Идемпотентность операций* $\cup$ *и* $\cap$: $A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$

3.*Коммутатисность операций* $\cap$ *и* $\cup$: $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A.$

4.*Ассоциативность операций* $\cap$ *и* $\cup$: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

5.*Дистрибутивные законы каждой из операций* $\cap$ *и* $\cup$ *относительно другой*:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C, \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

6. *Законы поглощения*: $A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A.$

7. *Законы де – Моргана*: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$

8. $A \cap \overline{A} = \varnothing \qquad A \cup \overline{A} = U.$

9. $A \cap U = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cup U = U, \quad A \cup \varnothing = F, \quad \overline{U} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = U.$

1.8 Количество элементов объединения множеств.

$|A|$ - количество элементов конечного множества А. Число $|A|$ называют также **мощностью** множества А, а множества содержащие одинаковое количество элементов - **равномощными**.

Формула, используемая при нахождении числа элементов объединения двух конечных множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

$|A| + |B|$ - число, получаемое при перечислении всех элементов А, В.

$|A \cap B|$ - элементы множеств А и В, перечисленные дважды.

Т.1. Если A_1, A_2,….A_n - некоторые конечные множества, то

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = (|A_1| + |A_2| + ...|A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + ... + |A_{n-1} \cap F_n|) +$$
$$+ (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) - ...(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Задача 1. Каждый учение класса - либо девочка, либо блондин, либо любит математику. В классе 20 девочек, из них 12 блондинок, и одна блондинка любит математику. Всего в классе 24 ученик - блондина, математику из них любит 12, а всего учеников, которые любят математику, 17 , из них 6 девочек. Сколько учеников в данном классе?

1.9. Алгебры множеств.

ПустьU - некоторое фиксированное множество. B(U) -множество всех подмножеств множества U.

Результат применения операций над множествами к множествам из дает множества, принадлежащие также B(U). В этом случае говорят, что B(U) замкнуто относительно указанных выше операций, то есть B(U) образует алгебру относительно определенных ранее операций. Эта алгебра называется **булевой алгеброй** подмножества множества U.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте определение понятия пустое множество.
2. Перечислите способы задания множества.
3. Покажите на конкретных примерах все операции над множествами.

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
2. Я.С. Бродский, Статистика. Вероятность. Комбинаторика., М. ОНИКС. Мир и образование, 2008, с. 541
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

1. Кремер. Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573с.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
3. Письменный Д.Т. Конспект по теории вероятностей и математической статистики/Д.Т. Письменный. - .2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – (Высшее образование)

Тема 4.2. Элементы математической статистики.
Условное и полное математическое ожидание
Выполнение расчета всех числовых характеристик случайной величины на конкретном, самостоятельно выбранном примере.

Цель: познакомиться с понятиями: условное и полное математическое ожидание; самостоятельно выполнить расчет на данные характеристики случайной величины на любой задаче.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить понятия случайной величины, её характеристик.
2. Составить и решить задачу.

Порядок выполнения задания.

4. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.

5. Составить краткий конспект данного материала.
6. Составить и решить задачу.

Вопросы для изучения:

1. Случайная величина, закон её распределения. [3] Глава 4, §4.1. стр. 303.
2. Математическое ожидание случайной величины. [3] Глава 4, §4.2. стр. 315.
3. Свойства математического ожидания. [3] Глава 4, §4.3. стр. 323.
4. Формула Бернулли. [3] Глава 4, §4.4. стр. 331.
5. Дисперсия случайной величины. [3] Глава 4, §4.5. стр. 344.
6. Независимые случайные величины. [3] Глава 4, §4.6. стр. 355.
7. Числовые характеристики биноминального распределения. [3] Глава 4, §4.7. стр. 366.
8. Неравенство Чебышева. [3] Глава 4, §4.8. стр. 370.
9. Закон больших чисел. [3] Глава 4, §4.9. стр. 377.
10. Нормальное распределение. [3] Глава 4, §4.10. стр. 383.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Как измениться дисперсия случайной величины, если все её значения умножить на одно и то же число?
2. Как изменится среднее квадратичное отклонение случайной величины, если все её значения умножить на одно и то же число?
3. Имеет ли содержательный смысл правило «одной сигмы»?
4. Какие из следующих случайных величин являются дискретными, а какие - непрерывными:

А) число попыток, которые нужно сделать, чтобы запустить двигатель;

Б) число аварий на перекрестке;

В) дальность полета снаряда;

Д) диаметр валика, изготовленного на станке;

Г) число людей, обратившихся в фирму по объявлению о наличии вакансии?

Рекомендуемая литература.

4. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
5. Я.С. Бродский, Статистика. Вероятность. Комбинаторика., М. ОНИКС. Мир и образование, 2008, с. 541

6. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

4. Кремер. Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573с.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
6. Письменный Д.Т. Конспект по теории вероятностей и математической статистики/Д.Т. Письменный. - .2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – (Высшее образование)

Тема 5.2. Численное дифференцирование.

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: познакомиться с формулой Эйлера для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить способ Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Порядок выполнения задания.

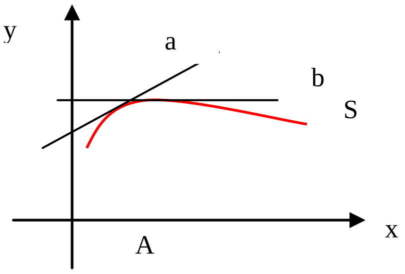
1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Теория

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



1. Основные понятия.

Линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная *y'* является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

В любой точке A(x, y) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки A можно наглядно изобразить поле направлений кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется полем направлений.

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

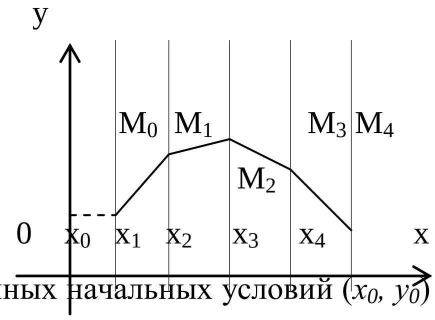
В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Рассмотрим Метод Эйлера.(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0)$.

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

Производя аналогичную операцию для отрезка [x_1, x_2], получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется ломаной Эйлера.

Можно записать общую формулу вычислений: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1})$.

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый уточненный метод Эйлера или формула пересчета.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений *f(x₀, y₀)* и *f(x₁, y₁)*. Тогда уточненное значение: $y_1^{(1)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье: $y_1^{(3)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2} h;$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений *y*.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Пример. Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$.

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции *y* на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{matrix}\right\} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1;$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1; \qquad C = 2;$

Частное решение: $y = 2e^x - x - 1;$ Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i		
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Точное значение
0	0	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1103
2	0,2	1,22	1,243	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7975

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение дифференциального уравнения.
2. Проанализируйте, как отличается точное значение при решении дифференциального уравнения, от значения, получаемого методом Эйлера.

Рекомендуемая литература.

Основная литература

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2017. – 400с.
2. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 416 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

4. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.
5. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010 г.
6. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2009г.
7. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2010г.