МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра ЦТМ и Э**

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ
СВЕДЕНИЯ О СЕРТИФИКАТЕ ЭП
Сертификат: 36 22 ee ce 8d fd 1e 1d a3 ab
Владелец: Князева Мария Александровна

# Методические указания к выполнению работы по темам «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных. Теория вероятностей и математическая статистика» для обучающихся заочной формы обучения направлений подготовки естественно-технологического института

Мурманск
2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие предназначено для обучающихся заочной формы обучения. В пособии содержатся методические рекомендации к изучению теоретического материала и выполнению контрольной работы по темам "Дифференциальное и интегральное исчисления функции нескольких переменных. Теория вероятностей, математическая статистика", варианты этой работы и список рекомендуемой литературы.

В результате изучения этой темы обучающиеся должны:

• знать определения основных понятий теории дифференциального исчисления функций нескольких переменных (ФНП): частные производные, полный дифференциал и др.;

• уметь находить частные производные первого и высших порядков;

• знать основные понятия теории скалярного поля и уметь определять его основные характеристики: линии уровня, градиент, производную по направлению;

• знать основные понятия теории интегрального исчисления функций нескольких переменных и уметь решать задачи с применением двойных интегралов;

• знать основные положения теории вероятностей; основные положения математической статистики;

• уметь применять методы теории вероятностей, математической статистики для решения практических задач.

Данные методические рекомендации включают краткий справочный материал для выполнения контрольной работы, который нужно рассматривать как дополнение к имеющимся учебникам. Также в пособии содержится подробное решение примерного варианта контрольной работы.

## ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ.

Перед выполнением работы необходимо ознакомится сначала со справочным материалом, затем более глубоко изучить теоретический материал. Вариант контрольной работы определяется по последней цифре зачетной книжки обучающегося.

**Задача 1.** Дана функция $z = f(x, y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и полный дифференциал $dz$;

2) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

| Номер варианта | Функция | Номер варианта | Функция |
|---|---|---|---|
| 1 | $z = \ln(\sqrt{x} + 2y^3)$ | 2 | $z = (y^2 - x)\arcsin(2x)$ |
| 3 | $z = \mathrm{tg}(x - 5y^2)$ | 4 | $z = e^{-x^2}(y + 4x)^2$ |
| 5 | $z = e^{x+3y} + \cos(xy)$ | 6 | $z = \ln^3(2y - x)$ |
| 7 | $z = x\cos(3x + 2y)$ | 8 | $z = \sqrt{3y - \sin x}$ |
| 9 | $z = x^y + \sin(x - y)$ | 10 | $z = 4xy^5 - e^{x^2-3y}$ |

**Задача 2.** Поверхность $\sigma$ задана уравнением $z = f(x, y)$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sigma$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если $x_0$, $y_0$ – заданные числа.

| Номер варианта | Уравнение поверхности | Значения $x_0$, $y_0$ |
|---|---|---|
| 1 | $z = 3y - x^2y + x$ | $x_0 = 1$, $y_0 = 5$ |
| 2 | $z = \frac{x^2}{y} + 3x - y^2$ | $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ |
| 3 | $z = \sqrt{xy} + x^3 - 5$ | $x_0 = 1$, $y_0 = 4$ |
| 4 | $z = y^3x - y + x^2$ | $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ |
| 5 | $z = \cos y + 2x^2 - xy$ | $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ |
| 6 | $z = xy + y^3 + 2x$ | $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ |

| | | |
|---|---|---|
| 7 | $z = \ln(2x) - xy^3 + y$ | $x_0 = \frac{1}{2},\ y_0 = 2$ |
| 8 | $z = e^y + x^2y - x^4 + 1$ | $x_0 = -1,\ y_0 = 0$ |
| 9 | $z = y\sin x + 3y^2$ | $x_0 = \frac{\pi}{2},\ y_0 = -1$ |
| 10 | $z = 2y - \frac{y}{x^2} + x^5$ | $x_0 = 1,\ y_0 = 3$ |

**Задача 3.** Дано скалярное поле $U = U(x, y)$, точка $M_0(x_0, y_0)$ и вектор $\vec{s}$.

1) найти градиент поля в точке $M_0$ и производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ функции $U(x, y)$ в точке $M_0$ по направлению вектора $\vec{s}$;

2) найти уравнения линий уровня поля U, построить в системе координат $xOy$ 4-5 линий уровня, в том числе линию, проходящую через точку $M_0$; изобразить вектор $\overrightarrow{grad\,U}(M_0)$ на этом чертеже.

| Номер варианта | Скалярное поле | Точка $M_0$ $(x_0, y_0)$ | Вектор $\vec{s}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $U = x^2 + 3y^2$ | $M_0(1, 1)$ | $\vec{s} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ |
| 2 | $U = x^2 - 2y^2$ | $M_0(2, 1)$ | $\vec{s} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ |
| 3 | $U = -3y - x^2$ | $M_0(-1, -1)$ | $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j}$ |
| 4 | $U = y^2 - 4x$ | $M_0(-2, 1)$ | $\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$ |
| 5 | $U = 2x^2 - y^2$ | $M_0(1, 1)$ | $\vec{s} = -\vec{i} - 3\vec{j}$ |
| 6 | $U = 2x^2 + y^2$ | $M_0(1, 2)$ | $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ |
| 7 | $U = x^3 - y$ | $M_0(1, -2)$ | $\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j}$ |
| 8 | $U = 2x + y^2$ | $M_0(-2, 1)$ | $\vec{s} = \vec{i} + \vec{j}$ |
| 9 | $U = (x + 1)^2 + y^2$ | $M_0(0, 2)$ | $\vec{s} = \vec{i} - 2\vec{j}$ |
| 10 | $U = 3x^2 - y^2$ | $M_0(1, -1)$ | $\vec{s} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ |

**Задача 4.** Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси $Ox$ тонкой однородной пластинки, имеющей форму области $D$, ограниченной заданными линиями. Построить чертеж области $D$.

| Номер варианта | Границы области $D$ | Номер Варианта | Границы области $D$ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $x + y = 3,\ x = 2y^2,\ y = 0$ | 2 | $x + y = 1,\ x^2 = y - 1,\ x = 1$ |
| 3 | $y = x + 1,\ 1 - x = y^2,\ y = 0$ | 4 | $y = x^2,\ 2y = x^2,\ x = 2$ |
| 5 | $xy = 2,\ y = 2x,\ x = 2$ | 6 | $x + y = 0,\ x^2 = y,\ y = 1$ |
| 7 | $x + y = 2,\ y = x^3,\ x = 0$ | 8 | $xy = 1,\ x = y,\ y = 2$ |
| 9 | $y = x + 2,\ y = x^2$ | 10 | $x = y,\ 2x + y^2 = 0,\ y = 2$ |

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x, y) \equiv 1$.

**Задача 5**.

Вариант 1. При увеличении напряжения может произойти разрыв электрической цепи из-за выхода из строя одного из трех элементов, Вероятности выхода из строя элементов 0,3, 0,4 и 0,5 соответственно. Какова вероятность того, что не будет разрыва сети?

Вариант 2. Радист 3 раза вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2, второй – 0,3, третий – 0,4. События, состоящие в том, что данный вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста хотя бы один раз.

Вариант 3. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ по двум дисциплинам.

Вариант 4. Вероятности своевременного выполнения студентом контрольных работ по каждой из трех дисциплин равны соответственно 0,6, 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения студентом контрольных работ хотя бы по двум дисциплинам.

Вариант 5. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,85 и в третье – 0,7. Найти вероятность, того, что хотя бы одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 6. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение – 0,9 и в третье – 0,8. Найти вероятность, того, что только два отделения получат газеты вовремя.

Вариант 7. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе отделение – 0,95 и в третье – 0,85. Найти вероятность, того, что только одно отделение получит газеты вовремя.

Вариант 8. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что только два орудия попадут в цель.

Вариант 9. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что только одно орудие попадет в цель.

Вариант 10. По цели стреляют из трех орудий. Вероятность попадания для первого орудия равна 0,6, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что хотя бы одно орудие попадет в цель.

**Задача 6.**

В каждом варианте для заданной случайной величины $\xi$ составить закон распределения, построить многоугольник распределения вероятностей, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Вариант 1. Вероятность отказа каждого прибора при проведении испытания равна 0,4, для испытания было отобрано 4 прибора, случайная величина $\xi$ – число приборов, отказавших при проведении испытаний.

Вариант 2. Вероятность совершить покупку для каждого покупателя магазина равна 0,3, в магазин пришли 4 покупателя, случайная величина $\xi$ – число покупателей, совершивших покупку.

Вариант 3. По многолетним статистическим данным известно, что вероятность рождения мальчика равна 0,515, случайная величина $\xi$ – число мальчиков в семье из 4 детей.

Вариант 4. Вероятность того, что корреспондент примет вызов радиста, равна 0,4, случайная величина $\xi$ – число вызовов, принятых корреспондентом, если радистом было передано 4 вызова.

Вариант 5. В рекламных целях торговая фирма вкладывает в единицу товара денежный приз размером 1 тыс. руб., случайная величина $\xi$ – размер выигрыша при четырех сделанных покупках, если вероятность выигрыша в каждой покупке равна 0,1.

Вариант 6. В контрольной работе 4 задачи, вероятность правильного решения учеником каждой задачи 0,7, случайная величина $\xi$ – число правильно решенных задач.

Вариант 7. Торговый агент имеет четырех потенциальных покупателей, вероятность того, что потенциальный покупатель сделает заказ, равна 0,4, случайная величина $\xi$ – число покупателей, сделавших заказ.

Вариант 8. Студент должен сдать в сессию 4 экзамена, вероятность успешной сдачи каждого экзамена 0,7, случайная величина $\xi$ – число экзаменов, которые сдал студент в сессию.

Вариант 9. Телевизионный канал рекламирует новый вид детского питания. Вероятность того, что телезритель увидит эту рекламу, оценивается в 0,2. В случайном порядке выбраны четыре телезрителя, случайная величина $\xi$ – число лиц, видевших рекламу.

Вариант 10. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75, контроль расхода электроэнергии производится в течение четырех суток, случайная величина $\xi$ – число дней, в которые расход электроэнергии был выше установленной нормы.

**Задача 7.**

Вариант 1. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется меньше 95.

Вариант 2. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах. Вес заряда - нормально распределенная случайная величина с параметрами $a$ = 2,3 г и $\sigma$=150 мг. Найти вероятность повреждения ружья при выстреле, если максимально допустимый вес заряда пороха равен 2,5 г.

Вариант 3. Размер детали подчинен нормальному закону с параметрами $a$= 30 см и $\sigma$= 5 см. Детали считаются годными, если их размер находится в пределах от 20 до 40 см. Если размер детали больше 40 см, то она подлежит переделке. Найти вероятность того, что случайно отобранная деталь подлежит переделке.

Вариант 4. Значения теста IQ (коэффициента интеллекта) Стэнфорда – Бине распределены приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 100$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 16$. Найти вероятность того, что коэффициент интеллекта у случайно отобранного для тестирования человека окажется в пределах от 80 до 120.

Вариант 5. Средняя длина взрослой рыбы оценивается в 65 см. со стандартным отклонением в 5 см. Считая распределение длины рыбы нормальным, найдите вероятность того, что длина конкретной рыбы будет больше 70 см.

Вариант 6. Спортсмен бросает копье. Дальность полета копья – нормально распределенная случайная величина со средним значением 70 м и средним квадратическим отклонением $\sigma$=5 м. Найти вероятность того, что дальность полета копья будет от 65 до 72 м.

<u>Вариант 7.</u> На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma$=150 кг. Определить вероятность того, что вес случайно отобранной туши будет между 800 и 1300 кг.

<u>Вариант 8.</u> Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет не выше 15,3 ден. ед.

<u>Вариант 9.</u> Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найти вероятность того, что цена акции будет в интервале от 14,9 до 15,3 ден. ед.

<u>Вариант 10.</u> На рынок поступила крупная партия говядины. Предполагается, что вес туш – случайная величина, подчиняющаяся нормальному закону распределения с математическим ожиданием $a = 950$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma$=150 кг. Найти вероятность того, что вес случайно отобранной туши окажется больше 1250 кг.

**Задача 8.**

Из генеральной совокупности, распределенной по нормальному закону, сделана выборка. Найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсия, выборочное среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с заданной надежностью $\gamma$.

<u>Вариант 1.</u>

| $x_i$ | 54-58 | 58-62 | 62-66 | 66-70 | 70-74 | 74-78 | 78-82 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 12 | 16 | 22 | 24 | 12 | 10 | 4 |

$\gamma = 0{,}93$.

Вариант 2

| $x_i$ | 154-158 | 158-162 | 162-166 | 166-170 | 170-174 | 174-178 | 178-182 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 10 | 14 | 26 | 28 | 12 | 8 | 2 |

$\gamma = 0,94$.

Вариант 3.

| $x_i$ | 0-200 | 200-300 | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 5 | 9 | 14 | 8 | 3 |

$\gamma = 0,97$.

Вариант 4.

| $x_i$ | 33,2 | 38,2 | 43,2 | 48,2 | 53,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 2 | 18 | 3 | 1 |

$\gamma = 0,92$.

Вариант 5.

| $x_i$ | 15,4 | 18,4 | 21,4 | 24,4 | 27,4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 4 | 11 | 5 | 3 |

$\gamma = 0,96$.

Вариант 6.

| $x_i$ | 15 | 20 | 16 | 17 | 19 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 3 | 9 | 2 | 7 | 6 | 8 |

$\gamma = 0,91$.

Вариант 7.

| $x_i$ | 4 - 9 | 9 – 14 | 14 - 19 | 19 - 24 | 24 - 29 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 9 | 13 | 6 | 7 |

$\gamma = 0,98$.

Вариант 8.

| $x_i$ | 12,4 | 16,4 | 20,4 | 24,4 | 28,4 | 32,4 | 36,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 5 | 15 | 40 | 25 | 8 | 4 | 3 |

$\gamma = 0,93$.

Вариант 9.

| $x_i$ | 1,7– 2,8 | 2,8– 3,9 | 3,9-5,0 | 5,0-6,1 | 6,1-7,2 | 7,2-8,3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 8 | 10 | 22 | 10 | 6 | 4 |

$\gamma = 0{,}97$.

Вариант 10.

| $x_i$ | 3 - 7 | 7 – 11 | 11- 15 | 15 - 19 | 19 - 23 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 5 | 11 | 7 | 3 |

$\gamma = 0{,}94$

**Задача 9.**

Имеются две нормально распределенные генеральные совокупности $X$ и $Y$, из которых были сделаны выборки. По полученным выборкам на уровне значимости $\alpha$ проверить гипотезу $H_0:\ \bar{x}_0 = \bar{y}_0$, считая дисперсии неизвестными, но равными.

Вариант 1.

| $x_i$ | 51 | 44 | 47 | 24 | 43 | 34 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 40 | 38 | 37 | 52 | 42 | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 2.

| $x_i$ | 113 | 120 | 113 | 109 | 111 | 102 | 116 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 97 | 104 | 105 | 103 | 122 | 128 | 113 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 > \bar{y}_0$

Вариант 3.

| $x_i$ | 49 | 51 | 46 | 49 | 56 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 57 | 58 | 50 | 51 | 46 | 39 | 67 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 4.

| $x_i$ | 35 | 65 | 50 | 46 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 38 | 33 | 37 | 65 | 78 | 66 | 31 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 5.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 58 | 56 | 53 | 53 | 56 | 52 | 52 |
| $y_i$ | 50 | 54 | 51 | 56 | 53 | 70 | 68 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 6.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 93 | 94 | 93 | 92 | 90 | 65 | 87 |
| $y_i$ | 93 | 92 | 103 | 95 | | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 7.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 35 | 34 | 47 | 46 | | | |
| $y_i$ | 65 | 45 | 34 | 53 | 68 | 70 | 70 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}015$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 8.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 99 | 97 | 95 | 94 | 90 | 91 | 89 |
| $y_i$ | 93 | 96 | 94 | 95 | | | |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

Вариант 9.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 47 | 59 | 61 | 60 | | | |
| $y_i$ | 55 | 55 | 61 | 62 | 67 | 75 | 64 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

Вариант 10.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 16 | 17 | 14 | 8 | 20 | | |
| $y_i$ | 27 | 24 | 18 | 15 | 5 | 7 | 30 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}025$, альтернативная гипотеза $H_1 : \bar{x}_0 < \bar{y}_0$

**Задача 10.**

Была исследована зависимость признака $Y$ от признака $X$. В результате проведения 10 измерений были получены результаты, представленные в таблице.

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции и оценить значимость коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha$; 2) найти уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

Вариант 1.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 9 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 21 | 23 |
| $y_i$ | 69 | 73 | 95 | 87 | 96 | 98 | 105 | 111 | 107 | 129 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$.

Вариант 2.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 6,0 | 6,5 | 6,8 | 7,0 | 7,4 | 8,0 | 8,2 | 8,7 | 9,0 | 10,0 |
| $y_i$ | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 20 | 25 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}02$.

Вариант 3.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 39,0 | 38,7 | 38,9 | 40,1 | 39,4 | 39,4 | 39,5 | 39,1 | 40,4 | 39,5 |
| $y_i$ | 4 | 3 | 4 | 6 | 6 | 5 | 4 | 6 | 7 | 5 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}03$.

Вариант 4.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 85 | 88 | 85 | 106 | 100 | 97 | 105 | 106 | 105 | 103 |
| $y_i$ | 45 | 49 | 50 | 56 | 53 | 55 | 56 | 58 | 60 | 62 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}04$.

Вариант 5.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 28 | 25 | 33 | 49 | 32 | 24 | 32 | 24 | 36 | 32 |
| $y_i$ | 34 | 28 | 38 | 47 | 36 | 27 | 28 | 29 | 31 | 37 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Вариант 6.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3,5 | 4,0 | 3,8 | 4,6 | 3,9 | 3,0 | 3,5 | 3,9 | 4,5 | 4,1 |
| $y_i$ | 4,2 | 3,9 | 3,8 | 4,5 | 4,2 | 3,4 | 3,8 | 3,9 | 4,6 | 3,0 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}06$.

Вариант 7.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 7 | 10 | 10 | 12 |
| $y_i$ | 2 | 2 | 3 | 2,5 | 3,5 | 4 | 4 | 5 | 6 | 8 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}07$.

Вариант 8.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 30 | 41 | 52 | 60 | 73 | 80 | 92 | 100 | 112 | 125 |
| $y_i$ | 19 | 25 | 30 | 32 | 37 | 40 | 45 | 47 | 51 | 53 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}08$.

Вариант 9.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2,8 | 2,2 | 3,0 | 3,5 | 3,2 | 3,7 | 4,0 | 4,8 | 6,0 | 5,4 |
| $y_i$ | 6,7 | 6,9 | 7,2 | 7,3 | 8,4 | 8,8 | 9,1 | 9,8 | 10,6 | 10,7 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}09$.

Вариант 10.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 3,2 | 3,7 | 4,0 | 4,8 | 6,0 | 5,4 | 5,2 | 5,4 | 6,0 | 9,0 |
| $y_i$ | 8,4 | 8,8 | 9,1 | 9,8 | 10,6 | 10,7 | 11,1 | 11,8 | 12,1 | 12,4 |

Уровень значимости $\alpha = 0{,}1$.

## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИЯ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ»

### Функция нескольких переменных и ее частные производные

*Определение функции нескольких переменных*

Если каждой паре $(x, y)$ значений двух независимых друг от друга переменных $x$ и $y$ из некоторого множества $D$ соответствует определённое значение величины $z$, то говорят, что $z$ есть *функция двух независимых переменных* $x$ и $y$, *определённая на множестве* $D$. Множество $D$ называется *областью определения функции* $z = z(x, y)$.

Обозначается: $z = f(x, y)$ или $z = z(x, y)$.

Пример. $z = x^2 + 2y^2 \;\Rightarrow\; z = f(x, y)$.

Аналогично определяются функции трёх и более переменных.

Примеры. $u = x^2 + y^2 - z \;\Rightarrow\; u = f(x, y, z)$ – функция трёх переменных;

$$W = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$ – функция $n$ переменных.

Общее название: функции нескольких переменных (ФНП).

*Частные производные ФНП.*

Ели одному из аргументов функции $z = f(x, y)$ придать приращение, а другой аргумент не изменять, то функция получит *частное приращение по одному из аргументов*: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ – это частное приращение функции $z$ по аргументу $x$; $\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$ – это частное приращение функции $z$ по аргументу $y$.

*Частной производной функции нескольких переменных* по одному из её аргументов называется предел отношения частного приращения функции по этому аргументу к соответствующему приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

– это *частная производная функции $z$ по аргументу $x$*;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

– это *частная производная функции $z$ по аргументу $y$*.

Чтобы вычислить частную производную ФНП по одному из её аргументов, нужно все другие её аргументы считать постоянными и проводить дифференцирование по правилам дифференцирования функции одного аргумента.

<u>Пример.</u> $z = 2x^5 + 3x^2 y + y^2 - 4x + 5y - 1 \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^5 + 3x^2 y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_x = \left[y = const\right] = 10x^4 + 6xy - 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^5 + 3x^2 y + y^2 - 4x + 5y - 1\right)'_y = \left[x = const\right] = 3x^2 + 2y + 5.$$

*Полное приращение и полный дифференциал ФНП.*

*Полным приращением функции двух переменных* $z = f(x, y)$ в точке $(x, y)$, вызванным приращениями аргументов $\Delta x$ и $\Delta y$, называется выражение $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(x, y)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое полное приращение функции.

Если обозначить $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ – расстояние между близкими точками $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ и $(x, y)$, то $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \Delta z = 0$ – это *определение непрерывности ФНП на языке приращений.*

Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в любой точке $(x, y) \in D$, то она называется *непрерывной ФНП в области D*.

Функция $z = f(x, y)$, полное приращение $\Delta z$ которой в данной точке $(x, y)$ может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно $\Delta x$ и $\Delta y$, и величины, бесконечно малой более высокого порядка малости относительно $\Delta\rho$, называется *дифференцируемой ФНП в данной точке*, а линейная часть ее полного приращения называется *полным дифференциалом ФНП.*

Если $\Delta z = f'_x(x,y)\cdot\Delta x + f'_y(x,y)\cdot\Delta y + \gamma_1\cdot\Delta x + \gamma_2\cdot\Delta y$, где $\gamma_1, \gamma_2$ – бесконечно малые при $\Delta\rho \to 0$, то полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ выражается формулой: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, или:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

(приращения независимых переменных совпадают с их дифференциалами: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$).

Из определения полного дифференциала следует его связь с полным приращением: при малых $\Delta x$ и $\Delta y$ полное приращение функции $\Delta z$ примерно равно ее полному дифференциалу: $\Delta z \approx dz$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка малости относительно $\Delta\rho \to 0$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ зависит как от точки $M(x_0, y_0)$, в которой он вычисляется, так и от приращений $\Delta x$ и $\Delta y$.

*Производные ФНП высших порядков.*

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $(x, y)$ и её окрестности непрерывные частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ являются функциями тех же аргументов $x$ и $y$, то их можно дифференцировать по $x$ и по $y$. При этом возможны следующие 4 варианта:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

– эти частные производные называются *частными производными второго порядка* от функции $z\,(x, y)$.

Частные производные $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$ называются *смешанными частными производными второго порядка.*

Пример. Дана ФНП $z = e^{2x-y^2}$. Вычислим все её частные производные второго порядка.

$$z'_x = e^{2x-y^2}\cdot 2;\quad z'_y = e^{2x-y^2}\cdot(-2y);\quad z''_{xx} = (z'_x)'_x = \left(e^{2x-y^2}\cdot 2\right)'_x = 4e^{2x-y^2};$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y = \left(e^{2x-y^2}(-2y)\right)'_y = e^{2x-y^2}\cdot(-2y)^2 + e^{2x-y^2}(-2) = e^{2x-y^2}\cdot(4y^2-2);$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \left(e^{2x-y^2}\cdot 2\right)'_y = 2e^{2x-y^2}(-2y) = -4ye^{2x-y^2};$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = \left(e^{2x-y^2}\cdot(-2y)\right)'_x = -2ye^{2x-y^2}\cdot 2 = -4ye^{2x-y^2}.$$

Основное *свойство смешанных частных производных*: если функция $z = f(x, y)$ и её частные производные $z'_x$, $z'_y$, $z''_{xy}$ и $z''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $(x, y)$ и некоторой её окрестности, то в этой точке $z''_{xy} = z''_{yx}$, то есть смешанные частные производные при условии их непрерывности не зависят от порядка, в котором производится дифференцирование.

### *Частные производные ФНП, заданной неявно.*

Если каждой паре чисел $(x, y)$ из некоторой области $D \subset xOy$ соответствует одно или несколько значений $z$, удовлетворяющих уравнению $F(x, y, z) = 0$, то это уравнение неявно определяет функцию 2-х переменных, например, функцию $z = z(x, y)$.

Если существуют частные производные функции $F(x, y, z)$: $F'_x, F'_y, F'_z$ и $F'_z \neq 0$, то существуют частные производные от функции $z(x, y)$, которые можно вычислить по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}. \tag{2}$$

Пример. Дано: $x^2 + y^2 - z^2 + 4 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Здесь $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 4$. По формулам (2) находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x}{-2z} = \frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{2y}{-2z} = \frac{y}{z},\quad \forall z \neq 0.$$

Уравнение $F(x, y, z) = 0$ неявно определяет еще две функции 2-х переменных: $x = x(y, z)$ и $y = y(x, z)$. Частные производные этих функций можно найти по формулам, аналогичным формулам (2), например:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_y}; \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F'_z}{F'_y}. \qquad (3)$$

*Касательная плоскость и нормаль к поверхности*

*Графиком функции 2-х переменных* $z = f(x, y)$ является поверхность, проектирующаяся на плоскость $xOy$ в область определения функции $D$.

Рассмотрим поверхность $\sigma$, заданную уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – дифференцируемая функция, и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – фиксированная точка на поверхности $\sigma$, т.е. $z_0 = f(x_0, y_0)$.

*Касательной плоскостью* к поверхности $\sigma$ в её точке $M_0$ называется плоскость, в которой лежат касательные ко всем кривым, проведённым на поверхности $\sigma$ через точку $M_0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \qquad (4)$$

Вектор $\vec{N} = \{f'_x(M_0);\ f'_y(M_0); -1\}$ называется *вектором нормали к поверхности $\sigma$ в точке $M_0$*. Вектор нормали перпендикулярен касательной плоскости (рис. 1).

*Нормалью к поверхности* $\sigma$ в точке $M_0$ называется прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке.

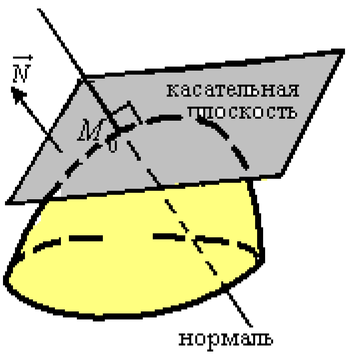

Рис. 1.

Канонические уравнения нормали к поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (5)$$

*Скалярное поле. Градиент. Производная по направлению.*

Говорят, что в двумерной области $D \subset xOy$ задано *скалярное поле*, если в каждой точке $M(x, y) \in D$ задана скалярная функция координат точки:

$$U(M) = U(x, y).$$

Пример: скалярное поле температур $T(x, y)$ в области $D$.

*Линии уровня* скалярного поля – это такие линии, на каждой из которых функция $U(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

*Уравнения линий уровня скалярного поля*: $U(x, y) = \text{const}$.

Геометрически линии уровня получаются, если поверхность $z = U(x, y)$ пересекать горизонтальными плоскостями $z = C$ и проектировать линии пересечения на плоскость $xOy$.

*Градиентом скалярного поля* $U(x, y)$ *в фиксированной точке* $M_0(x_0, y_0)$ называется вектор, проекции которого на оси координат совпадают с частными производными функции, вычисленными в точке $M_0$:

$$\overrightarrow{gradU}(M_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} = \left\{\frac{\partial U}{\partial z}; \frac{\partial U}{\partial y}\right\}_{M_0}, \tag{6}$$

где векторы $\vec{i}, \vec{j}$ – это орты координатных осей.

Вектор градиента $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ направлен перпендикулярно касательной к линии уровня, проходящей через точку $M_0$. Направление градиента указывает направление наибольшего роста функции $U(x, y)$ в точке $M_0$ .

Отложим от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$ некоторый вектор $\vec{s}$ . Скорость изменения скалярного поля $U(x, y)$ в направлении вектора $\vec{s}$ характеризует величина $\frac{\partial U}{\partial s}$, называемая *производной по направлению*.

Если в прямоугольной системе координат $xOy$ вектор $\vec{s}$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, то производная функции $U(x, y)$ по направлению вектора $\vec{s}$ в точке $M_0$ – число $\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0}$ – можно найти по формуле:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta, \tag{7}$$

Напомним формулы для вычисления направляющих косинусов вектора $\vec{s} = \{s_x; s_y\}$ :

$$\cos\alpha = \frac{s_x}{|\vec{s}|},\ \cos\beta = \frac{s_y}{|\vec{s}|}$$, где модуль вектора: $|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ .

Аналогично определяют скалярное поле $U(M)$ в трехмерной области $V$:

$U(M) = U(x, y, z)$, $\forall M(x,y,z) \in V$ . *Поверхности уровня* скалярного поля – это такие поверхности, на каждой из которых функция $U(x, y, z)$ сохраняет постоянное значение. *Уравнения поверхностей уровня скалярного поля*: $U(x, y, z) = \text{const}$.

Градиент скалярного поля $U(x, y, z)$ в произвольной точке $M(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{gradU}(M) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = \left\{\frac{\partial U}{\partial z}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z}\right\}, \qquad (8)$$

где векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – это орты координатных осей.

Вектор $\overrightarrow{gradU}(M)$ поля $U(x, y, z)$ направлен параллельно нормали к поверхности уровня $U(x, y, z) = \text{const}$ в точке $M$.

## Двойной интеграл.

*Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах*

Пусть функция 2-х переменных $z = f(x, y)$ задана и непрерывна в замкнутой области $D \subset xOy$. Двойной интеграл от этой функции по области $D$ имеет вид: $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$, где $dS = dx \cdot dy$ .

Область $D \subset xOy$ называется *правильной в направлении оси* $Oy$, если всякая прямая, параллельная оси $Oy$ пересекает границу области не более, чем в двух точках (за исключением участков границы, параллельных $Oy$).

Если область $D$ – правильная в направлении оси $Oy$ (рис. 2), то ее можно задать системой неравенств: $D:\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x). \end{cases}$

В этом случае двойной интеграл от функции $z = f(x, y)$ по области $D$ можно вычислить при помощи *двукратного* (*повторного*) интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \,.$$

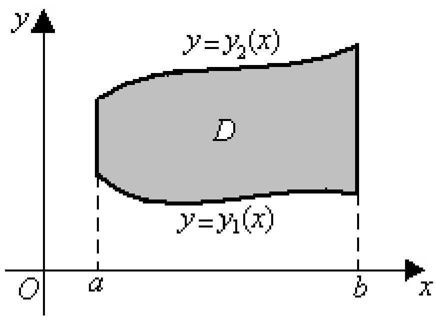

Рис. 2.

Здесь внутренний интеграл вычисляется по переменной $y$ в предположении, что $x$ – постоянная ($x$ = const); результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция $\Phi(x)$. Затем вычисляется внешний интеграл от $\Phi(x)$ по переменной $x$ в постоянных пределах, в результате получается число.

<u>Пример.</u> Вычислить $\iint\limits_D f(x,y)\,dS$, если $f(x,y) = y - 2x$, $D$: $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x \le y \le \sqrt{x}. \end{cases}$

$$\iint\limits_D (y-2x)\,dS = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} (y-2x)\,dy = \int\limits_0^1 \left( \frac{y^2}{2} - 2xy \right) \Bigg|_{y=x}^{y=\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left( \frac{x}{2} - 2x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x^2 \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left( \frac{x}{2} - 2x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 \right) dx = \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^{5/2} + \frac{1}{2}x^3 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{5-16+10}{20} = -\frac{1}{20} = -0{,}05.$$

Если область $D$ – правильная в направлении оси $Ox$ (рис. 3), то она задается системой неравенств: $D: \begin{cases} c \le y \le d, \\ x_1(y) \le x \le x_2(y), \end{cases}$ и тогда двойной интеграл сводится к повторному интегралу по формуле:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

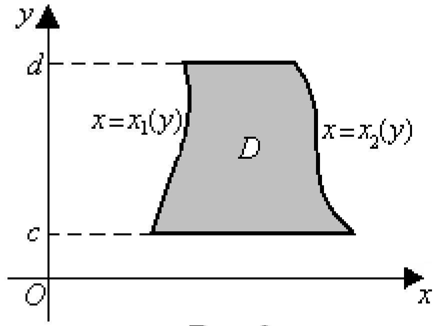

Рис. 3.

Здесь внутренний интеграл вычисляется по переменной $x$ в предположении, что $y$ = const; результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция от $y$, которая затем интегрируется в постоянных пределах.

Если область $D$ – правильная в обоих направлениях, то повторный интеграл не зависит от порядка интегрирования, и для вычисления двойного интеграла можно использовать любой из двух порядков интегрирования:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dS = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Если область $D$ – неправильная в обоих направлениях, то ее можно разбить на правильные части и воспользоваться свойством аддитивности двойного интеграла: $\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dS = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dS$.

*Вычисление двойного интеграла в полярных координатах*

Пусть область $D$ задается в полярных координатах системой неравенств $\begin{cases} \alpha \le \varphi \le \beta, \\ \rho_1(\varphi) \le \rho \le \rho_2(\varphi). \end{cases}$ Такая область (рис. 4) является *правильной в полярной системе координат* (каждый луч, выходящий из полюса, пересекает границу области не более, чем в 2-х точках, за исключением участков границы, совпадающих с некоторым полярным лучом).

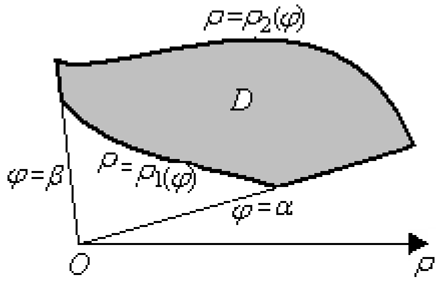

Рис. 4.

Преобразование двойного интеграла по области $D$ к полярным координатам осуществляется при помощи формул

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\quad dS = \rho\, d\rho\, d\varphi:$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dS = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Полученный двойной интеграл в полярных координатах может быть сведен к повторному интегралу при помощи неравенств, задающих область $D$. В результате получаем формулу перехода от двойного интеграла к повторному интегралу в полярных координатах:

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho.$$

*Некоторые приложения двойных интегралов*

Если подынтегральная функция $f(x, y) \equiv 1$, то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области $D$ равен *площади области интегрирования*:

$$S_D = \iint\limits_D dS.$$

Если область $D$ занята тонкой пластинкой и $\gamma(x, y) \ge 0$ – поверхностная плотность распределения неоднородного материала (т.е. масса единицы площади), то при помощи двойного интеграла можно вычислить *массу пластинки*, ее *статические моменты относительно осей координат* и другие величины.

Масса пластинки: $m = \iint\limits_D \gamma(x,y)dS$.

Статический момент относительно оси $Ox$:

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x, y) dS\,. \qquad (9)$$

Статический момент относительно оси $Oy$: $M_y = \iint\limits_D x \cdot \gamma(x, y) dS$.

Все перечисленные интегралы можно вычислить в декартовых либо в полярных координатах, переходя к соответствующему повторному интегралу.

## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ по теме «Теория вероятностей».

1.1. Случайные события

В основе теории вероятностей лежит следующая модель: имеется комплекс условий, который можно воспроизводить, хотя бы принципиально, неограниченное число раз. Каждое его воспроизведение называется *опытом, испытанием* или *экспериментом*. Предполагается, что в каждом опыте обязательно происходит одно и только одно так называемое *элементарное событие* (*элементарный исход*) $\omega$. Все множество элементарных событий, которые могут происходить в результате опыта, называется *пространством элементарных событий* (исходов) $\Omega$[1].

*Случайное событие* – это некоторое множество, состоящее из элементарных исходов $A=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k\}$. При этом исходы $\omega_1,\omega_2,...,\omega_k$ называются *благоприятствующими событию* $A$. Случайные события, так же как и множества, обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита с индексами или без: $A$, $B$, $C_1$, $D_2$ и т.д.

Говорят, что в результате эксперимента *произошло событие* $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, благоприятствующих событию $A$.

*Достоверным* называется событие, которое всегда происходит в результате рассматриваемого эксперимента. Следовательно, оно включает в

[1] Понятия “элементарное событие” и “происходит” являются первоначальными неопределяемыми понятиями, подобно геометрическим понятиям “точка” и “лежит”. При общих рассуждениях полезно иметь в виду какой-либо простой конкретный эксперимент типа общепонятного бросания монеты, игральной кости, извлечения карты из колоды и т.п.

себя все элементарные исходы, т.е. достоверным событием является пространство элементарных исходов $\Omega$.

Событие называется *невозможным*, если оно заведомо не может произойти в результате рассматриваемого эксперимента. Значит, невозможное событие не содержит ни одного элементарного исхода, т.е. это событие является пустым множеством и обозначается $\varnothing$.

*Суммой* событий $A$ и $B$ называется событие $A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий $A$ или $B$, т.е. это событие состоит из элементарных исходов, которые принадлежат либо $A$, либо $B$, либо двум событиям одновременно.

*Произведением* событий $A$ и $B$ называется событие $AB$, состоящее в том, что оба события $A$ и $B$ произошли одновременно, т.е. это событие состоит из элементарных исходов, принадлежащих и $A$, и $B$.

Два события $A$ и $B$ называются *несовместными*, если $A$ и $B$ не могут произойти одновременно. Несовместные события не имеют ни одного общего благоприятствующего исхода, следовательно, $AB=\varnothing$.

*Противоположным событию* $A$ называется событие $\overline{A}$, которое происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие $A$. Для противоположных событий одновременно выполняются два условия: их сумма является достоверным событием, т.е. $A+\overline{A}=\Omega$, а произведение – невозможным событием, т.е. $A\overline{A}=\varnothing$.

1.2. Вероятность события

Для количественной оценки возможности появления случайного события $A$ в рассматриваемом эксперименте вводится специальная числовая функция $P(A)$, называемая *вероятностью события* $A$, которая каждому событию ставит в соответствие число.

Например, вероятность события $A$ можно найти, используя *классическое определение вероятности*: вероятность случайного события $A$ равна отношению числа $k$ элементарных равновозможных исходов, благоприятствующих событию, к числу $n$ всех возможных элементарных исходов эксперимента, т.е.

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Заметим, что вероятность достоверного события $P(\Omega) = 1$, вероятность невозможного события $P(\varnothing) = 0$. Кроме того, из определения вероятности следует, что для любого события $A$ выполняется неравенство:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

1.3. Вероятности сложных событий

Для вычисления вероятностей сложных событий используются следующие теоремы теории вероятностей.

Теорема сложения вероятностей. Если события $A$ и $B$ несовместны, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1)$$

Сформулированная теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых.

Если же события $A$ и $B$ совместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2)$$

Из теоремы сложения вероятностей следует, что если $A$ и $\overline{A}$ – противоположные события, то

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ или } P(A) = 1 - P(\overline{A}). \quad (3)$$

Теорема умножения вероятностей. Если события $A$ и $B$ независимы (т.е. вероятность одного из событий не зависит от появления или непоявления другого), то вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (4)$$

Сформулированная теорема также справедлива для любого конечного числа сомножителей.

1.4. Формула Бернулли

Последовательность $n$ независимых испытаний, в каждом из которых может произойти некоторое событие $A$ (его называют *успехом*) с вероятностью $p = P(A)$, постоянной при любом испытании, или противоположное ему событие $\overline{A}$ (его называют *неудачей*) с вероятностью $q = P(\overline{A}) = 1 - p$, называется *схемой Бернулли*.

Если производится $n$ независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события $A$ постоянна и равна $p$, то вероятность того, что событие $A$ произойдет ровно $m$ раз определяется *формулой Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{5}$$

где $C_n^m$ – число сочетаний из $n$ элементов по $m$ элементам, которое вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}. \tag{6}$$

1.5. Случайные величины

*Случайной величиной* $\xi$ называется числовая функция, определенная на пространстве элементарных исходов $\Omega$, которая каждому элементарному исходу $\omega$ ставит в соответствие число $\xi(\omega)$.

Условимся в дальнейшем, как правило, случайные величины обозначать греческими буквами: $\xi$, $\eta$, …, а принимаемые ими значения – строчными латинскими (с индексами или без): $x$, $y_1$ и т.д.

Случайные величины делятся на *дискретные* и *непрерывные*.

Случайная величина называется *дискретной*, если значения, которые может принимать данная случайная величина, образуют дискретное (конечное или бесконечное) множество чисел $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, …

Под *непрерывной* случайной величиной будем понимать величину, значения которой, заполняют конечный или бесконечный промежуток числовой оси $Ox$.

Например, число студентов на лекции – дискретная случайная величина, продолжительность лекции – непрерывная.

1.6. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

*Законом распределения случайной величины* называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается *рядом распределения*, который представляется в виде таблицы:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

где в первой строке перечислены все возможные значения случайной величины, а во второй – соответствующие им вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$, удовлетворяющие соотношению $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Закон распределения может быть задан графически в виде *многоугольника распределения вероятностей*, т.е. в виде ломаной, соединяющей точки с координатами $(x_i, p_i)$ для $i = \overline{1, n}$.

*Математическим ожиданием* или *средним значением* дискретной случайной величины $\xi$ называется сумма произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M\xi = \sum_i x_i p_i \,. \tag{7}$$

*Дисперсией* случайной величины $\xi$ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания, т.е.

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_i (x_i - M\xi)^2 \cdot p_i\,. \tag{8}$$

Для вычисления дисперсии на практике бывает удобнее использовать другую формулу, которую можно получить из формулы (8) с помощью простых преобразований:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M\xi)^2. \tag{9}$$

*Средним квадратическим отклонением* или *стандартным отклонением* случайной величины называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}\,. \tag{10}$$

1.7. Непрерывная случайная величина и ее числовые характеристики

Закон распределения непрерывной случайной величины $\xi$ удобно задавать с помощью *функции плотности вероятности* $f(x)$. Вероятность $P(a < \xi < b)$ того, что значение, принятое случайной величиной $\xi$, попадет в интервал $(a;b)$, определяется равенством:

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

*Математическим ожиданием* или *средним значением* непрерывной случайной величины $\xi$ с плотностью распределения вероятности $f(x)$ называется число:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx,$$

если этот интеграл сходится абсолютно. В противном случае математическое ожидание случайной величины $\xi$ не существует.

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется также, как и для дискретной. Для непосредственного вычисления дисперсии используют формулы:

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 f(x)dx \text{ или } D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M\xi)^2.$$

1.8. Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина имеет *нормальное* или *гауссовское распределение* с параметрами $a$ и $\sigma^2$, где $-\infty < a < \infty$ и $\sigma > 0$ (пишут $\xi \sim N(a, \sigma^2)$), если функция плотности случайной величины имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

для любого $x \in R$.

При $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, т.е. $\xi \sim N(0,1)$, нормальный закон распределения называется *стандартным* или *нормированным*.

Если случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение с параметрами $a$ и $\sigma^2$, то

$$M\xi = a \text{ и } D\xi = \sigma^2.$$

Найти вероятность попадания случайной величины $\xi$, распределенной по нормальному закону с параметрами $a$ и $\sigma^2$, в интервал $(\alpha, \beta)$ можно по формуле:

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \tag{11}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функции Лапласа, значения которой определяются по таблице. При использовании таблицы необходимо учитывать, что функция $\Phi(x)$ является нечетной и при $x > 4$ значения $\Phi(x)$ считаются равными 0,5.

**СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО теме «Математическая статистика»**

2.1. Генеральная и выборочная совокупности

*Генеральной совокупностью* называется вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений). Один или несколько элементов, взятых из генеральной совокупности для получения информации о ней, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*. *Объемом совокупности* (выборочной или генеральной) называется число элементов этой совокупности.

Метод статистического исследования, состоящий в том, что на основе изучения выборки делается заключение обо всей генеральной совокупности, называется *выборочным*. Для того чтобы по отобранным значениям некоторого показателя можно было достаточно уверенно судить обо всей совокупности, полученная выборка должна быть *репрезентативной (представительной),* т.е. правильно отражать пропорции генеральной совокупности. Выборка будет представительной лишь тогда, когда все объекты генеральной совокупности имеют *одинаковую вероятность попасть в выборку.*

В дальнейшем под генеральной совокупностью будем подразумевать не само множество объектов, а множество значений случайной величины, принимающей числовое значение на каждом из объектов. В статистике обычно исследуемые случайные величины называют *признаками* и обозначают большими латинскими буквами $X$ , $Y$ и т.д.

Выборку будем рассматривать как совокупность независимых случайных величин $X_1, X_2,..., X_n$, распределенных так же, как и случайная величина (признак) $X$ , представляющая генеральную совокупность. Конкретные значения, которые приняли эти случайные величины в результате эксперимента, называют *реализацией выборки* или *значениями признака* и обозначают строчными буквами $x_1, x_2,..., x_n$. Различные значения признака называют *вариантами*.

## 2.2. Вариационные ряды

Числа, показывающие, сколько раз встречаются варианты $x_i$ в выборке, называются *частотами* (обозначаются $n_i$).

*Вариационным* (*статистическим*) *рядом* называется расположенный в порядке возрастания или убывания ряд вариант с соответствующими им частотами. Вариационный ряд часто называют *рядом распределения выборки*.

Вариация (изменение) количественных признаков может быть дискретной, например, академическая система успеваемости: 5 – отлично, 4 – хорошо и т.д., или непрерывной, например, возраст, рост или вес человека. В зависимости от характера вариации признака различают дискретные и интервальные вариационные ряды.

Вариационный ряд называется *дискретным*, если любые его варианты отличаются на постоянную величину. Он представляет собой таблицу, состоящую из двух строк: конкретных значений признака и их частот:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_k$ |
| $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

где $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Вариационный ряд называется *интервальным*, если варианты могут отличаться один от другого на сколь угодно малую величину[2]. Он представляет собой таблицу, состоящую из двух строк – интервалов значений признака и числа значений выборки, попадающих в этот интервал:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Интервал, $x_i - x_{i+1}$ | $x_1 - x_2$ | $x_2 - x_3$ | … | $x_k - x_{k+1}$ |
| Частота, $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ |

## 2.3. Числовые характеристики

Вариационный ряд содержит достаточно полную информацию об изменчивости признака. Однако обилие числовых данных, с помощью которых он задается, усложняет их использование. В то же время на практике часто оказывается достаточным знание лишь сводных числовых характеристик выборочной совокупности. Рассмотрим наиболее часто используемые числовые характеристики вариационных рядов: среднюю арифметическую, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

[2] Построение интервальных вариационных рядов целесообразно не только при непрерывной вариации признака, но и если дискретная вариация проявляется в широких пределах, т.е. число вариантов дискретного признака достаточно велико.

Средняя арифметическая

Средние величины характеризуют значения признака, вокруг которого концентрируются наблюдения. Наиболее распространенной из средних величин является *средняя арифметическая*. Для ее расчета используют формулу:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i\ , \tag{14}$$

где $x_i$ – варианты, $n_i$ – соответствующие им частоты, $n$ – объем совокупности.

Если средняя арифметическая рассчитывается по всей генеральной совокупности в целом, то ее называют *генеральной средней*, а если по выборке – *выборочной средней*.

Если статистический материал представлен в виде интервального вариационного ряда, то при расчете выборочной средней сначала необходимо вычислить середины каждого интервала $x_i^*$, которые рассчитываются по формуле: $x_i^* = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. Далее расчеты ведутся, как и для дискретного вариационного ряда, но в качестве вариантов используем $x_i^*$.

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение

*Дисперсия* представляет собой средний квадрат отклонений индивидуальных значений признака от их средней величины и вычисляется по формуле:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i}{n}\ . \tag{15}$$

Дисперсия, рассчитанная для генеральной совокупности, называется *генеральной дисперсией*, а для выборки – *выборочной дисперсией*.

При вычислении выборочной дисперсии для интервальных вариационных рядов в качестве $x_i$, как и при вычислении выборочной средней, используются середины соответствующих интервалов.

Иногда, особенно если дисперсию приходится рассчитывать «вручную», удобнее использовать другую формулу, которая легко получается из формулы (15) с помощью несложных математических преобразований:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\overline{x})^2 . \qquad (16)$$

*Среднее квадратическое отклонение* представляет собой квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} .$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) выражается в тех же единицах измерения, что и признак.

## 2.4. Точечные оценки

Большинство случайных величин имеют распределения, зависящие от одного или нескольких параметров. Так, например, нормальное распределение зависит от параметров $a$ и $\sigma^2$.

Выборочная характеристика, используемая в качестве приближенного значения неизвестного параметра генеральной совокупности, называется *статистической точечной оценкой* этого параметра. Статистическая оценка неизвестных параметров теоретического распределения генеральной совокупности (или просто параметров генеральной совокупности) – одна из основных задач математической статистики.

Обозначим через $\theta$ некоторый неизвестный параметр генеральной совокупности, а через $\theta_n^*$– точечную оценку этого параметра. Оценка $\theta_n^*$ есть функция $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ от выборки объема $n$ из независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и генеральная совокупность. Поэтому оценка $\theta_n^*$, как функция случайных величин, также является случайной величиной, в отличие от оцениваемого параметра $\theta$, который является величиной неслучайной, детерминированной.

Оценка $\theta_n^*$ для параметра $\theta$ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру, т.е. $M\theta_n^* = \theta$. В противном случае оценка называется *смещенной*.

Несмещенность – свойство оценок при фиксированном $n$. Оно означает отсутствие ошибки "в среднем", т.е. при систематическом использовании данной оценки.

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся точечные оценки параметров генеральной совокупности.

1. Выборочная средняя $\bar{x}$ есть несмещенная оценка для генеральной средней $\bar{x}_0$, причем $\sigma_{\bar{x}}^2 = \dfrac{\sigma_0^2}{n}$, где $n$ – объем выборки, $\sigma_0^2$ – генеральная дисперсия признака.
2. Выборочная дисперсия $\sigma_x^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $\sigma_0^2$.
3. Исправленная дисперсия $s^2$, вычисляемая по формуле

$$s_x^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 \tag{17}$$

или

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 , \tag{18}$$

является несмещенной оценкой для генеральной дисперсии $\sigma_0^2$.

Разница между $\sigma_x^2$ и $s_x^2$ заметна при небольшом числе наблюдений $n$. При $n > 40-50$ получим, что $\sigma_x^2 \approx s_x^2$, т.е. в качестве оценки $\sigma_0^2$ вполне можно использовать выборочную дисперсию $\sigma_x^2$.

## 2.5. Интервальные оценки

Точечные оценки параметров генеральной совокупности могут быть приняты в качестве ориентировочных, первоначальных результатов обработки выборочных данных. Их недостаток заключается в том, что неизвестно, с какой точностью оценивается параметр. Если для выборок большого объема точность обычно бывает достаточной, то для выборок небольшого объема вопрос точности оценок становится очень важным.

Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\theta_n^*$ параметра $\theta$, используют интервальную оценку параметра.

*Интервальной оценкой* параметра $\theta$ называется числовой интервал $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)$, который с заданной вероятностью $\gamma$ накрывает неизвестное значение параметра $\theta$, т.е. $P\left(\theta \in \left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)\right) = \gamma$. Такой интервал $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)$ называется *доверительным*, а вероятность $\gamma$ – *доверительной вероятностью* или *надежностью оценки*.

Обычно надежность оценки $\gamma$ задается заранее величиной, близкой к единице, например: 0,9, 0,95, 0,99 или 0,999.

Границы доверительного интервала и его длина находятся по выборочным данным и поэтому являются случайными величинами. Длина доверительного интервала уменьшается с ростом объема выборки $n$ и увеличивается с ростом доверительной вероятности $\gamma$.

Очень часто (но не всегда) доверительный интервал выбирается симметричным относительно несмещенной точечной оценки $\theta_n^*$, т.е. выбирается интервал вида $(\theta_n^* - \Delta; \theta_n^* + \Delta)$. Число $\Delta$ при этом называется *точностью оценки*.

Так, например, интервальная оценка (доверительный интервал) для генеральной средней $\bar{x}_0$ исследуемого признака $X$, имеющего нормальное распределение, может быть найдена по формуле:

$$\bar{x} - \Delta < \bar{x}_0 < \bar{x} + \Delta . \qquad (19)$$

В случае, когда генеральная дисперсия $\sigma_0^2$ известна (например, это заранее заданная ошибка измерительного прибора), то точность оценки $\Delta$ находится по формуле:

$$\Delta = \frac{t_\gamma \cdot \sigma_0}{\sqrt{n}}, \qquad (20)$$

где $n$ – объем выборки, а число $t_\gamma$ определяется из равенства $2\Phi(t_\gamma) = \gamma$, т.е. по таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находится значение аргумента $t_\gamma$, которому соответствует значение функции $\Phi(x)$, равное $\gamma / 2$.

В случае, когда генеральная дисперсия $\sigma_0^2$ неизвестна, а известна лишь ее оценка – исправленная выборочная дисперсия $s^2$, то точность оценки $\Delta$ находится по формуле:

$$\Delta = \frac{t_{\gamma,k} \cdot s}{\sqrt{n}}, \qquad (21)$$

где значение числа $t_{\gamma,k}$ определяется по таблице критических точек распределения Стьюдента при доверительной вероятности $\gamma$ и числе степеней свободы $k = n - 1$.

Замечание. Если выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ объема $n$ представляет собой набор независимых одинаково распределенных случайных величин, то, согласно центральной предельной теореме, распределение $\dfrac{\bar{x} - \bar{x}_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$ при больших $n$ близко к стандартному нормальному. Это позволяет строить доверительный интервал для генеральной средней $\bar{x}_0$ по формулам (19) и (20) при любом распределении признака, если объем выборки является достаточно большим ($n > 100$), при этом в качестве $\sigma_0^2$ используется ее любая оценка.

2.6. Проверка статистических гипотез

*Статистической гипотезой* называется любое предположение о виде или о параметрах неизвестного распределения генеральной совокупности.

Не располагая сведениями обо всей генеральной совокупности, высказанную гипотезу сопоставляют по определенным правилам с выборочными данными и делают вывод о том, можно принять гипотезу или нет. Эта процедура сопоставления называется *проверкой гипотезы.*

Рассмотрим этапы проверки гипотезы и используемые при этом понятия.

1. Располагая выборочными данными и руководствуясь конкретными условиями рассматриваемой задачи, формулируют гипотезу $H_0$, которую называют *основной* или *нулевой,* и гипотезу $H_1$, *конкурирующую* с гипотезой $H_0$. Гипотезу $H_1$ называют также *альтернативной*, она является логическим отрицанием гипотезы $H_0$. Выбор тех или иных нулевых или альтернативных гипотез определяется решаемыми исследователем прикладными задачами.

2. Задается вероятность $\alpha$, которую называют *уровнем значимости.*

Уровень значимости $\alpha$ определяет вероятность так называемой ошибки первого рода, которая совершается при отвержении гипотезы $H_0$, т.е. принимается конкурирующая гипотеза $H_1$, тогда как на самом деле гипотеза $H_0$ верна. Вероятность $\alpha$ задается заранее малым числом: 0,1; 0,05, 0,001 и т.д.

3. Выбирается статистический критерий проверки гипотезы – $K$. *Статический критерий* – это случайная величина, закон распределения которой при условии справедливости проверяемой гипотезы $H_0$ известен.

После выбора критерия множество всех его возможных значений разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при котором нулевая гипотеза отвергается – *критиче-*

*ская область* $Q$, а другое содержит те значения критерия, при которых гипотеза принимается – *область принятия гипотезы*. *Критическими точками* $K_{кр}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Различают одностороннюю (правостороннюю или левостороннюю) и двустороннюю критические области. *Правосторонней* (*левосторонней*) называют критическую область, определяемую неравенством $K > K_{кр}$ ($K < K_{кр}$). *Двусторонней* называют критическую область, определяемую неравенствами $K < K_{кр1} \cup K > K_{кр2}$.

4. По результатам эксперимента находят эмпирическое (наблюдаемое) значение статистического критерия $K$. Если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают в пользу конкурирующей гипотезы; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, то нулевую гипотезу принимают.

5. Результат проверки гипотезы формулируется следующим образом: гипотеза $H_0$ проверена по критерию $K$ на уровне значимости $\alpha$ и принята (не противоречит имеющимся экспериментальным данным) или отвергнута.

Пример.

**Проверка гипотезы о равенстве средних двух нормально распределенных совокупностей с неизвестными, но равными дисперсиями по малым выборкам ($n \leq 25$)**

Пусть имеются две нормально распределенные генеральные совокупности $X$ и $Y$, характеризуемые генеральными средними $\bar{x}_0$ и $\bar{y}_0$. Для проверки гипотезы из этих совокупностей берутся две независимые выборки объемов $n_1$ и $n_2$, по которым находят выборочные средние $\bar{x}$, $\bar{y}$ и исправленные выборочные дисперсии $s_x^2$, $s_y^2$.

1. Нулевая гипотеза $H_0$: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$.

Альтернативная гипотеза $H_1$: а) $\bar{x}_0 > \bar{y}_0$ ($\bar{x}_0 < \bar{y}_0$);

б) $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$.

2. Уровень значимости $\alpha$.

3. Статистический критерий: $$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{n_1 s_x^2 + n_2 s_y^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \qquad (22)$$

Критерий $t$ имеет распределение Стьюдента с $k = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

а) При альтернативной гипотезе $\bar{x}_0 > \bar{y}_0$ $(\bar{x}_0 < \bar{y}_0)$ критическая область является односторонней и определяется неравенством $|t| > t_{1-2\alpha,k}$. Критическая точка определяется по таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента, где $k = n_1 + n_2 - 2$, $\gamma = 1 - 2\alpha$.

б) При альтернативной гипотезе $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$ критическая область является двусторонней и определяется неравенством $|t| > t_{1-\alpha,k}$. Критическая точка определяется по таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента, где $k = n_1 + n_2 - 2$, $\gamma = 1 - \alpha$.

4. По формуле (22) определяем эмпирическое значение $t$-критерия.

Гипотеза $H_0$ принимается, если: а) $|t| \leq t_{1-2\alpha,k}$;

б) $|t| \leq t_{1-\alpha,k}$.

5. Делается вывод о результатах проверки гипотезы $H_0$.

## 2.7. Основные понятия корреляционного и регрессионного анализов

При одновременном изучении нескольких признаков какого-либо объекта или учете нескольких показателей в эксперименте возникает вопрос о взаимосвязях между исследуемыми величинами. Наиболее разработанными в математической статистике методами анализа взаимосвязей являются *корреляционный* и *регрессионный анализы*.

При изучении взаимосвязи признаки делятся на два класса:

- признаки, обуславливающие изменения других признаков, называются *факторными*, или *факторам*;
- признаки, изменяющиеся под действием факторных признаков, называются *результативными*.

Связь называется *статистической*, если каждому значению факторного признака соответствует определенное (условное) распределение результативного признака. *Корреляционной связью* называется частный случай статистической связи, состоящий в том, что разным значениям факторного признака соответствуют *различные средние значения* результативного.

Корреляционная зависимость между признаками $X$ и $Y$ может быть представлена в виде уравнения:

$$M_x(Y) = \varphi(x),$$

где $M_x(Y)$ – условное математическое ожидание признака $Y$ при заданном $X = x$. Это уравнение называется *теоретическим уравнением регрессии* (или *функцией регрессии*) $Y$ на $X$, а его график – *теоретической линией регрессии*.

2.8. Парная регрессия

В зависимости от вида функции $\varphi(x)$ различают *линейную* и *нелинейную* регрессию.

Для отыскания теоретического уравнения регрессии необходимо знать закон распределения двумерной случайной величины $(X,Y)$. Но на практике исследователь располагает выборкой пар значений $(x_i, y_i)$ ограниченного объема $n$. В этом случае можно построить лишь наилучшую оценку для функции регрессии, которой является *выборочное уравнение регрессии* $y_x = \varphi(x, a_0, a_1, ..., a_p)$ *Y на X* (или просто *уравнение регрессии*), где $y_x$ – условная средняя признака $Y$ при фиксированном значении признака $X = x$, $a_0, a_1, ..., a_p$ – параметры уравнения регрессии.

Так, например, оценкой линейного уравнения регрессии $Y$ на $X$ является выборочное уравнение регрессии $y_x = a_0 + a_1 x$.

Параметры $a_0$ и $a_1$ выборочного уравнения регрессии находятся следующим образом:

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2}; \tag{23}$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}, \tag{24}$$

где $\bar{x}$ – выборочная средняя факторного признака $X$, $\bar{y}$ – выборочная средняя результативного признака $Y$, $\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i$ – средняя из произведений соответствующих значений факторного и результативного признаков, $\sigma_x^2$ – выборочная дисперсия факторного признака $X$.

Коэффициент $a_1$ в уравнении регрессии называется *коэффициентом регрессии* (выборочным). Он показывает, насколько изменяется в среднем значение результативного признака при увеличении факторного на единицу собственного измерения.

2.9. Выборочный коэффициент корреляции

Измерение тесноты и направления связи является важной задачей изучения и количественного измерения взаимосвязи явлений.

Если известно (или предполагается), что между результативным и факторным признаками существует линейная связь, то для оценки ее тесноты используется *выборочный коэффициент корреляции* $r$ (или просто *коэффициент корреляции*). Он чаще всего рассчитывается по формуле:

$$r = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{25}$$

Коэффициент корреляции изменяется в пределах от –1 до +1. Равенство коэффициента нулю свидетельствует об отсутствии линейной связи**.** Равенство коэффициента $\pm 1$ показывает наличие функциональной связи. Знак «+» указывает на прямую связь (увеличение или уменьшение одного признака сопровождается аналогичным изменением другого признака), знак «–» – на обратную связь (увеличение или уменьшение одного признака сопровождается противоположным по направлению изменением другого признака).

В зависимости от того, насколько $|r|$ приближается к 1, различают линейную связь слабую – $0{,}1 < |r| < 0{,}3$, умеренную – $0{,}3 < |r| < 0{,}5$, заметную – $0{,}5 < |r| < 0{,}7$, достаточно тесную – $0{,}7 < |r| < 0{,}9$ и весьма тесную – $0{,}9 < |r| < 0{,}99$.

## РЕШЕНИЕ ПРИМЕРНОГО ВАРИАНТА КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задача 1.** Дана функция $z = \cos^2(2x - y)$. Требуется:

1) найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$;

2) найти полный дифференциал $dz$;

3) показать, что для данной функции справедливо равенство: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение.

1) При нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ считаем аргумент $y$ постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\cos^2(2x - y))'_x = 2\cos(2x - y)(\cos(2x - y))'_x =$$

$$= 2\cos(2x-y)(-\sin(2x-y))(2x-y)'_x = -2\cos(2x-y)\sin(2x-y)((2x)'_x - (y)'_x) =$$

$$= -2\cos(2x-y)\sin(2x-y)(2-0) = -\sin(2(2x-y))2 = -2\sin(4x-2y).$$

При нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем аргумент $x$ постоянным:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (\cos^2(2x-y))'_y = 2\cos(2x-y)(\cos(2x-y))'_y =$$

$$= 2\cos(2x-y)(-\sin(2x-y))(2x-y)'_y = -2\cos(2x-y)\sin(2x-y)((2x)'_y - (y)'_y)$$

=

$$= -\sin(2(2x-y))(0-1) = \sin(4x-2y).$$

2) По формуле (1) находим полный дифференциал функции:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = -2\sin(4x-2y)dx + \sin(4x-2y)dy.$$

3) Найдем смешанные частные производные второго порядка.

Для того, чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, дифференцируем $\frac{\partial z}{\partial x}$ по $y$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (-2\sin(4x-2y))'_y = [\textit{считаем x постоянным}] =$$

$$= -2\cos(4x-2y)(4x-2y)'_y = -2\cos(4x-2y)(0-2) = 4\cos(4x-2y).$$

Для того, чтобы найти $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, дифференцируем $\frac{\partial z}{\partial y}$ по $x$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (\sin(4x-2y))'_x = [\textit{считаем y постоянным}] =$$

$$= \cos(4x-2y)(4x-2y)'_x = \cos(4x-2y)(4-0) = 4\cos(4x-2y).$$

Получили: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4\cos(4x-2y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4\cos(4x-2y) \Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}.$$

Ответы: 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ = –2sin(4$x$ – 2$y$); $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ = sin(4$x$ – 2$y$);

2) dz = –2sin(4$x$ – 2$y$)d$x$ + sin(4$x$ – 2$y$)d$y$;

3) равенство $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ выполнено.

**Задача 2.** Поверхность $\sigma$ задана уравнением $z = \dfrac{y}{x} + xy - 5x^3$. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sigma$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей ей, если $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

Решение.

Уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\sigma$ получим, используя формулы (4) и (5). Найдем частные производные функции $z = f(x, y) = \dfrac{y}{x} + xy - 5x^3$:

$$f'_x(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_x = -\frac{y}{x^2} + y - 15x^2;$$

$$f'_y(x, y) = \left(\frac{y}{x} + xy - 5x^3\right)'_y = \frac{1}{x} + x.$$

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит поверхности $\sigma$, поэтому можно вычислить $z_0$, подставив заданные $x_0 = -1$ и $y_0 = 2$ в уравнение поверхности:

$$z = \frac{y}{x} + xy - 5x^3 \Rightarrow z_0 = \frac{2}{-1} + (-1)\,2 - 5\,(-1)^3 = 1.$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(-1, 2, 1)$:

$$f'_x(M_0) = -\frac{2}{(-1)^2} + 2 - 15(-1)^2 = -15; \quad f'_y(M_0) = \frac{1}{-1} - 1 = -2.$$

Пользуясь формулой (4), получаем уравнение касательной плоскости к поверхности $\sigma$ в точке $M_0$:

$$z - 1 = -15(x + 1) - 2(y - 2) \;\Rightarrow\; 15x + 2y + z + 10 = 0.$$

Пользуясь формулой (5), получаем канонические уравнения нормали к поверхности $\sigma$ в точке $M_0$: $\frac{x+1}{-15} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Ответы: уравнение касательной плоскости: $15x + 2y + z + 10 = 0$; уравнения нормали: $\frac{x+1}{-15} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

**Задача 3.** Дано плоское скалярное поле $U = x^2 - 2y$, точка $M_0(1,-1)$ и вектор $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Требуется:

1) найти уравнения линий уровня поля;

2) найти градиент поля в точке $M_0$ и производную $\frac{\partial U}{\partial s}$ в точке $M_0$ по направлению вектора $\vec{s}$;

3) построить в системе координат $xOy$ 4-5 линий уровня, в том числе линию уровня, проходящую через точку $M_0$, изобразить вектор $\overrightarrow{grad\,U}(M_0)$ на этом чертеже.

Решение.

1) Для $U = x^2 - 2y$ уравнение семейства линий уровня имеет вид $x^2 - 2y = C$ или $y = \frac{x^2}{2} - \frac{C}{2}$, где $C$ – произвольная постоянная. Это семейство парабол, симметричных относительно оси $Oy$ (ветви направлены вверх) с вершинами в точках $(0, -\frac{C}{2})$.

1) Найдем частные производные функции $U = x^2 - 2y$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = (x^2 - 2y)'_x = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = (x^2 - 2y)'_y = -2.$$

В точке $M_0(1,-1)$ значения частных производных: $\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = 2$, $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = -2$.

По формуле (6) находим градиент поля в точке $M_0$:

$$\overrightarrow{grad\,U}(M_0) = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \vec{i} + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \vec{j} = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Прежде, чем найти производную по направлению вектора $\vec{s} = 2\vec{i} - \vec{j} =$ = {2; – 1}, вычислим его модуль и направляющие косинусы:

$$\left|\vec{s}\right| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\,,\ \cos\alpha = \frac{s_x}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta = \frac{s_y}{\left|\vec{s}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Производную поля по направлению вектора $\vec{s}$ в точке $M_0$ вычисляем по формуле (8): $\left.\frac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot \cos\alpha + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot \cos\beta = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{6}{\sqrt{5}}$.

3) Для построения линий уровня в системе координат $xOy$ подставим в уравнение семейства линий уровня $y = \frac{x^2}{2} - \frac{C}{2}$ различные значения $C$:

при $C = 0$ получим $y = \frac{x^2}{2}$ – уравнение линии уровня, соответствующей значению $U = 0$;

при $C = -2$ получим $y = \frac{x^2}{2} + 1$ (для $U = -2$);

при $C = 2$ получим $y = \frac{x^2}{2} - 1$ (для $U = 2$);

при $C = -4$ получим $y = \frac{x^2}{2} + 2$, и т.д.

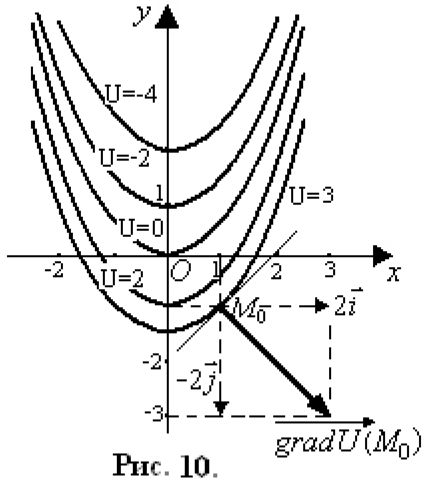

Рис. 10.

Получим уравнение линии уровня, проходящей через точку $M_0(1,-1)$. Для этого вычислим значение функции $U$ в этой точке: $\left.U\right|_{M_0} = \left.\left(x^2 - 2y\right)\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = 3 \ \Rightarrow\ C = 3 \ \Rightarrow\ y = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$.

Построим эти линии в системе координат $xOy$ (рис. 10).

Для построения градиента поля в точке $M_0$ нужно отложить от точки $M_0$ проекции градиента в направлениях координатных осей и построить вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ по правилу параллелограмма.

В данном случае $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j} = \{2; -2\}$, поэтому откладываем от точки $M_0(1,-1)$ две единицы вдоль оси $Ox$, две единицы в направлении, противоположном оси $Oy$ и получаем вектор $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$

как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $2\vec{i}$ и $-2\vec{j}$ (рис. 10).

Ответы: 1) $x^2 - 2y = C$; 2) $\overrightarrow{gradU}(M_0) = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ , $\left.\dfrac{\partial U}{\partial s}\right|_{M_0} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ ;

3) линии уровня и $\overrightarrow{gradU}(M_0)$ на рисунке 10.

**<u>Задача 4.</u>** Используя двойной интеграл, вычислить статический момент относительно оси *Ox* тонкой однородной пластинки, имеющей форму области *D*, ограниченной заданными линиями: $xy = 4$, $2x = y^2$, $y = 3$. Построить чертеж области интегрирования.

Указание. Считать плотность вещества $\gamma(x, y) \equiv 1$.

<u>Решение.</u>

Область *D* (рис. 11) представляет собой криволинейный треугольник *MNK*, где $N\left(\dfrac{4}{3}, 3\right)$, $K\left(\dfrac{9}{2}, 3\right)$. Для определения координат точки $M$ решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 4, \\ 2x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2/2, \\ y^3/2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2/2, \\ y^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2,2).$$

Область *D* – правильная в направлении оси *Ox*, она задается системой неравенств: $D: \begin{cases} 2 \le y \le 3, \\ 4/y \le x \le y^2/2, \end{cases}$ где $x = \dfrac{4}{y}$, $x = \dfrac{y^2}{2}$ – это уравнения линий, ограничивающих область слева и справа.

Найдем статический момент пластинки *MNK* относительно оси *Ox* по формуле (9):

$$M_x = \iint\limits_D y \cdot \gamma(x, y)\, dS = [\gamma(x, y) \equiv 1] = \iint\limits_D y\, dS .$$

Для вычисления двойного интеграла сводим его к повторному интегралу в соответствии с системой неравенств, задающих область *D*:

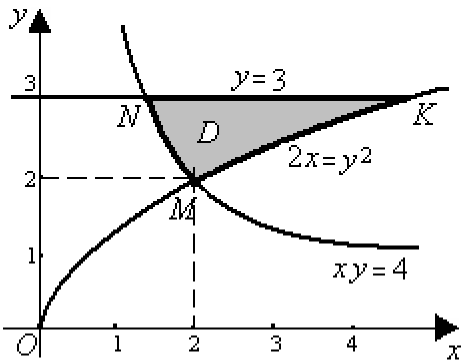

Рис. 11.

$$M_x = \iint\limits_D y\,dS = \int\limits_2^3 dy \int\limits_{4/y}^{y^2/2} y\,dx = \int\limits_2^3 y\left(\int\limits_{4/y}^{y^2/2} dx\right)dy = \int\limits_2^3 y \cdot x\Big|_{x=4/y}^{x=y^2/2} dy = \int\limits_2^3 y\left(\frac{y^2}{2} - \frac{4}{y}\right)dy =$$

$$= \int\limits_2^3 \left(\frac{y^3}{2} - 4\right)dy = \left(\frac{y^4}{8} - 4y\right)\Bigg|_2^3 = \frac{81}{8} - 12 - \frac{16}{8} + 8 = \frac{65}{8} - 4 = \frac{65-32}{8} = \frac{33}{8} = 4{,}125.$$

Ответы: $M_x$ = 4,125 ед. стат. момента; область интегрирования на рисунке 11.

**Задача 5**. По каналу связи передаются три сообщения. Вероятность того, что первое сообщение будет искажено равна 0,1, второе – 0,2, третье – 0,3. Найти вероятности следующих событий: $A$ – все три сообщения переданы без искажения; $B$ – ровно одно сообщение передано без искажения; $C$ – хотя бы одно сообщение искажено.

Решение.

Введем в рассмотрение вспомогательные события $A_k$ – k-ое сообщение передано без искажений, $\overline{A}_k$ – k-ое сообщение искажено, $k = 1,2,3$. Согласно условию $P(\overline{A}_1) = 0{,}1$, тогда $P(A_1) = 1 - P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. Аналогично, $P(\overline{A}_2) = 0{,}2$ и $P(A_2) = 0{,}8$, $P(\overline{A}_3) = 0{,}3$ и $P(A_3) = 0{,}7$.

Так как событие $A$ можно представить в виде $A = A_1A_2A_3$ и события $A_1, A_2, A_3$ независимы, то вероятность события $A$ можно найти по теореме умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

$$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}504.$$

Событие $B$ можно представить следующим образом:

$$B = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3,$$

причем слагаемые $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ являются попарно несовместными событиями. Поэтому на основании теоремы сложения вероятностей (1) получаем:

$$P(B) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3).$$

Для вычисления вероятностей событий $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3$ и $\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$ используем теорему умножения вероятностей:

$$P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}9\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3 = 0{,}054;$$

$$P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}1\cdot 0{,}8\cdot 0{,}3 = 0{,}024;$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3) = 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 = 0{,}014.$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$P(B) = 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092.$$

События $A$ и $C$ являются противоположными, следовательно,

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496.$$

Ответы: $P(A) = 0{,}504$, $P(B) = 0{,}092$, $P(C) = 0{,}496$.

**Задача 6.** Стрелок ведет стрельбу по цели с вероятностью попадания при каждом выстреле 0,4. За каждое попадание он получает 5 очков, а в случае промаха очков ему не начисляют. Составить закон распределения случайной величины $\xi$ – числа очков, полученных стрелком за 3 выстрела, построить многоугольник распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение.

Случайная величина $\xi$ может принимать 4 значения:

0 – если стрелок промахнулся 3 раза;

5 – если стрелок попал 1 раз при трех выстрелах;

10 – если стрелок попал 2 раза при трех выстрелах;

15 – если стрелок попал 3 раза.

Так как каждый выстрел можно рассматривать, как независимое испытание, в результате которого возможны только два исхода: попадание («успех») или промах («неудача»), то вероятности, соответствующие каждому значению случайной величины, можно найти по формуле Бернулли (5):

$$P(\xi = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

По условию задачи имеем: число испытаний $n = 3$, вероятность успеха $p = 0{,}4$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$, значения $m$ будут изменяться от 0 до 3. Т.о. имеем:

$$p_0 = p(\xi = 0) = C_3^0\, 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}216,$$

$$p_1 = p(\xi = 5) = C_3^1\, 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432,$$

$$p_2 = p(\xi = 10) = C_3^2\, 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^1 = 0{,}288,$$

$$p_3 = p(\xi = 15) = C_3^3\, 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^0 = 0{,}064.\text{о}$$

Следовательно, окончательно закон распределения случайной величины $\xi$ будет иметь вид:

| $x_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

Построим многоугольник распределения. Для этого по оси абсцисс отложим возможные значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности и соединяем точки ($x_i$, $p_i$) отрезками прямых. Полученная при этом ломаная линия и есть многоугольник распределения вероятностей случайной величины $\xi$.

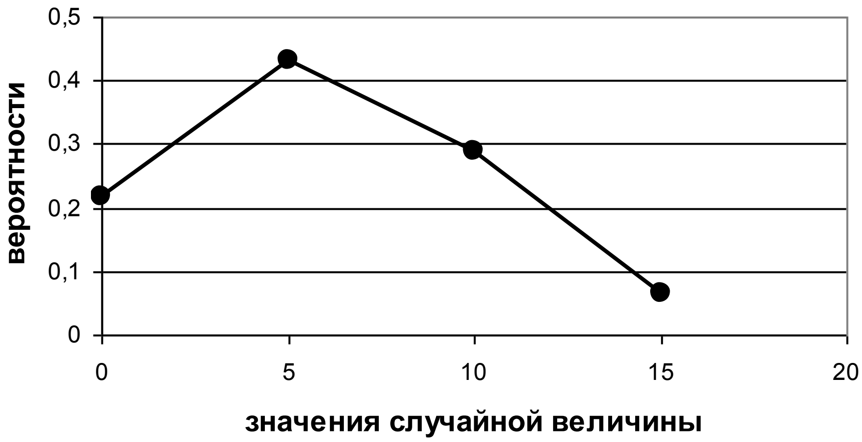


Рис. 1. Многоугольник распределения вероятностей

Рассчитаем числовые характеристики случайной величины $\xi$.

1. Математическое ожидание вычисляем по формуле (7)

$$M\xi = \sum_i x_i p_i = 0 \cdot 0{,}216 + 5 \cdot 0{,}432 + 10 \cdot 0{,}288 + 15 \cdot 0{,}064 = 6.$$

2. Дисперсия вычисляется по формуле (9):

$$D\xi = \sum_i x_i^2 \cdot p_i - (M\xi)^2 = 0^2 \cdot 0{,}216 + 5^2 \cdot 0{,}432 + 10^2 \cdot 0{,}288 + 15^2 \cdot 0{,}064 - 6^2 = 18.$$

3. Среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{18} \approx 4{,}2.$$

Ответ. Закон распределения случайной величины $\xi$:

| $x_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,216 | 0,432 | 0,288 | 0,064 |

многоугольник распределения – на рисунке 1, $M\xi = 6$, $D\xi = 18$, $\sigma_\xi = \sqrt{18} \approx 4{,}2$.

**Задача 7.** Случайная величина $\xi$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 10$ и дисперсией $\sigma^2 = 4$. Найти вероятность того, что в результате испытания $\xi$ примет значение, заключенное в интервале $(12;14)$.

Решение.

Так как случайная величина $\xi$ имеет нормальное распределение, то вероятность ее попадания в интервал можно найти по формуле (11). Учитывая, что по условию имеем: $\alpha = 12$, $\beta = 14$, $a = 10$, $\sigma^2 = 4$, то получим:

$$P(12 < \xi < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим: Ф(2)=0,4772, Ф(1)=0,3413. Значит, получаем: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$.

Ответ: $P(12 < \xi < 14) = 0{,}1359$

**Задача 8.** По выборке из генеральной совокупности нормально распределенного количественного признака X найти: 1) числовые характеристики выборки – выборочную среднюю, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение; 2) несмещенные оценки для генеральной средней и генеральной дисперсии; 3) доверительный интервал для оценки генеральной средней с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

| $x_i$ | 33,2 | 38,2 | 43,2 | 48,2 | 53,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 2 | 4 | 10 | 3 | 1 |

Решение.

1. Сначала вычислим числовые характеристики выборки.

Выборочную среднюю найдем по формуле (14).

Учитывая, что объем выборки $n = 2 + 4 + 10 + 3 + 1 = 20$, получаем:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(33{,}2 \cdot 2 + 38{,}2 \cdot 4 + 43{,}2 \cdot 3 + 48{,}2 \cdot 3 + 53{,}2 \cdot 1) = 42{,}45.$$

Выборочную дисперсию удобнее вычислять по формуле (16):

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{20}(33{,}2^2 \cdot 2 + 38{,}2^2 \cdot 4 + 43{,}2^2 \cdot 3 + 53{,}2^2 \cdot 1) - 42{,}45^2 = 23{,}1875.$$

Выборочное СКО:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{23{,}1875} \approx 4{,}82.$$

2. Несмещенной оценкой для генеральной средней $\bar{x}_0$ является выборочная средняя $\bar{x} = 42{,}45$.

Несмещенной оценкой дисперсии $\sigma_0^2$ генеральной совокупности является исправленная выборочная дисперсия $s_x^2$, которая вычисляется по формуле (17):

$$s_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 23{,}1875 \approx 24{,}41.$$

3. Так как генеральная дисперсия $\sigma_0^2$ неизвестна, а известна лишь ее оценка – исправленная выборочная дисперсия $s_x^2$ и данная выборка имеет небольшой объем ($n < 30$), то доверительный интервал для генеральной средней можно найти, используя формулы (19) и (21).

Значение $t_{\gamma,n-1}$ находим по таблице распределения Стьюдента, где $\gamma = 0{,}99$ – доверительная вероятность, $n = 20$ – объем выборки, $n - 1 = 19$ - число степеней свободы.

Учитывая, что $\bar{x} = 42{,}45$, $s_x = \sqrt{24{,}41} \approx 4{,}94$, $t_{0{,}99;19} = 2{,}86$, находим сначала точность оценки по формуле (21):

$$\Delta = 2{,}86 \cdot \frac{4{,}94}{\sqrt{20}} \approx 3{,}16.$$

Теперь искомый доверительный интервал определяем по формуле (19):

$$42{,}45 - 3{,}16 < \bar{x}_0 < 42{,}45 + 3{,}16$$

или $39{,}39 < \bar{x}_0 < 45{,}61$.

Ответы: 1. $\bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_x^2 = 23{,}1875$, $\sigma_x \approx 4{,}82$; 2. $\bar{x}_0 \approx \bar{x} = 42{,}45$, $\sigma_0^2 \approx s_x^2 \approx 24{,}41$; 3. $39{,}21 < \bar{x}_0 < 45{,}69$.

**Задача 9.** Массовую долю (%) оксида меди в минерале определили методом иодометрии и методом комплексометрии. По первому методу получили результаты: 38,20; 38,00; 37,66, а по второму: 37,70; 37,65; 37,55. Проверить, различаются ли средние результаты данных методов на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если известно, что результаты измерений имеют нормальный закон распределения с неизвестными, но равными дисперсиями.

Решение.

Вычисляем для каждого метода числовые характеристики, учитывая, что объем каждой выборки равен $n_x = n_y = 3$:

- выборочные средние значения по формуле (14):

$$\bar{y} = \frac{1}{n_y}\sum y_i = \frac{1}{3}(37{,}70 + 37{,}65 + 37{,}55) = 37{,}63;$$

- исправленные выборочные дисперсии по формуле (18):

$$s_x^2 = \frac{1}{n_x - 1}\sum (x_i - \bar{x})^2,\ s_y^2 = \frac{1}{n_y - 1}\sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$s_x^2 = \frac{1}{2}((38{,}20 - 37{,}95)^2 + (38{,}00 - 37{,}95)^2 + (37{,}66 - 37{,}95)^2) = 0{,}07453;$$

$$s_y^2 = \frac{1}{2}((37{,}70 - 37{,}63)^2 + (37{,}65 - 37{,}63)^2 + (37{,}55 - 37{,}63)^2) = 0{,}00583.$$

Теперь проверим гипотезу о равенстве средних двух совокупностей.

1. Нулевая гипотеза: $H_0$: $\bar{x}_0 = \bar{y}_0$.

Альтернативная гипотеза: $H_1$: $\bar{x}_0 \neq \bar{y}_0$

2. Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

3. Проверку гипотезы будем проводить с помощью $t$-критерия, так как выборки маленькие и по условию дисперсии генеральных совокупно-

стей неизвестны, но равны. По таблице значений $t_{\gamma,k}$ распределения Стьюдента при $\gamma = 1-\alpha = 1-0{,}05 = 0{,}95$ и числе степеней свободы $k = 3+3-2 = 4$ находим критическое значение: $t_{0,95;4} = 2{,}78$.

4. Рассчитаем эмпирическое значение $t$-критерия, используя формулу (22):

$$t = \frac{37{,}95 - 37{,}63}{\sqrt{\frac{3 \cdot 0{,}07453 + 3 \cdot 0{,}00583}{3+3-2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}} = 1{,}96.$$

Сравним полученное значение $t$ с табличным значением $t_{0,95;4}$. Так как $|t| < t_{0,95;4}$, то гипотеза $H_0$ принимается.

5. Гипотеза о равенстве средних значений двух методов проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью $t$-критерия и принята. Следовательно, результаты обоих методов отражают истинное содержание $CuO$ в минерале.

Ответ: гипотеза $H_0$ о равенстве средних проверена на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ с помощью $t$-критерия и принята.

**Задача 10.** Имеются следующие данные об уровне механизации работ $X$ (%) и производительности труда $Y$ (т/чел.) для 14 однотипных предприятий:

| № п/п | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 30 | 32 | 36 | 40 | 41 | 47 | 54 |
| $y_i$ | 24 | 20 | 28 | 30 | 31 | 33 | 37 |

| № п/п | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 55 | 56 | 60 | 61 | 67 | 69 | 76 |

| $y_i$ | 40 | 34 | 38 | 41 | 43 | 45 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

Требуется: 1) оценить тесноту и направление связи между признаками с помощью коэффициента корреляции; 2) найти уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$ ; 3) в одной системе координат построить эмпирическую и теоретическую линии регрессии.

<u>Решение.</u>

1. Для удобства проведем все необходимые предварительные расчеты в таблице.

Таблица 1

Расчетная таблица

| № п/п | $x_i$ | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 24 | 900 | 576 | 720 |
| 2 | 32 | 20 | 1024 | 400 | 640 |
| 3 | 36 | 28 | 1296 | 784 | 1008 |
| 4 | 40 | 30 | 1600 | 900 | 1200 |
| 5 | 41 | 31 | 1681 | 961 | 1271 |
| 6 | 47 | 33 | 2209 | 1089 | 1551 |
| 7 | 54 | 37 | 2916 | 1369 | 1998 |
| 8 | 55 | 40 | 3025 | 1600 | 2200 |
| 9 | 56 | 34 | 3136 | 1156 | 1904 |
| 10 | 60 | 38 | 3600 | 1444 | 2280 |
| 11 | 61 | 41 | 3721 | 1681 | 2501 |
| 12 | 67 | 43 | 4489 | 1849 | 2881 |
| 13 | 69 | 45 | 4761 | 2025 | 3105 |
| 14 | 76 | 48 | 5776 | 2304 | 3648 |
| **Всего** | **724** | **492** | **40134** | **18138** | **26907** |

Рассчитаем числовые характеристики выборки, используя итоговую строку расчетной таблицы и учитывая, что объем выборки $n=14$:

- выборочные средние:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i = \frac{1}{14} \cdot 724 = 51,71;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum y_i = \frac{1}{14} \cdot 492 = 35,14;$$

- средние по квадратам:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 = \frac{1}{14}\cdot 40134 = 2866{,}71;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum y_i^2 = \frac{1}{14}\cdot 18138 = 1295{,}57;$$

- средняя по произведениям:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum x_i y_i = \frac{1}{14}\cdot 26907 = 1921{,}93;$$

- выборочные средние квадратические отклонения:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 2866{,}71 - 51{,}71^2 = 192{,}79;\ \sigma_x = \sqrt{192{,}79} = 13{,}88;$$

$$\sigma_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 1295{,}57 - 35{,}14^2 = 60{,}75;\ \sigma_y = \sqrt{60{,}75} = 7{,}79.$$

Вычислим выборочный коэффициент корреляции по формуле (26):

$$r = \frac{1921{,}93 - 51{,}71\cdot 35{,}14}{13{,}88\cdot 7{,}79} = 0{,}970.$$

Т.к. $r > 0$ и $r \in (0{,}9;\, 0{,}99)$, то, следовательно, линейная связь между изучаемыми признаками является прямой и весьма тесной.

2. Найдем уравнение линейной регрессии $Y$ на $X$: $y_x = a_0 + a_1 x$, вычислив параметры уравнения регрессии по формулам (23) и (24):

$$a_1 = \frac{1921{,}93 - 51{,}71\cdot 35{,}14}{192{,}79} = 0{,}54;$$

$$a_0 = 35{,}14 - 0{,}54\cdot 51{,}71 = 7{,}22.$$

Следовательно, уравнение прямой регрессии имеет вид:

$$y_x = 0{,}54x + 7{,}22.$$

3) Построим в одной системе координат эмпирическую и теоретическую линии регрессии. Эмпирическая линия – это ломаная, соединяющая точки с координатами $(x_i, y_i)$, а теоретическая – это график прямой регрессии, уравнение которой было получено в п. 2. Теоретическую линию регрессии можно построить по двум точкам, абсциссы которых выбираются произвольно, а ординаты находятся по построенному уравнению ре-

грессии. Найдем координаты точек для построения теоретической линии регрессии: $x_1 = 30$, тогда $y_1 = 0{,}54 \cdot 30 + 7{,}22 = 23{,}42$; $x_2 = 76$, $y_2 = 48{,}26$. Значит, теоретическую линию регрессии будем строить по двум точкам с координатами $(30;48{,}26)$ и $(76;48{,}26)$.

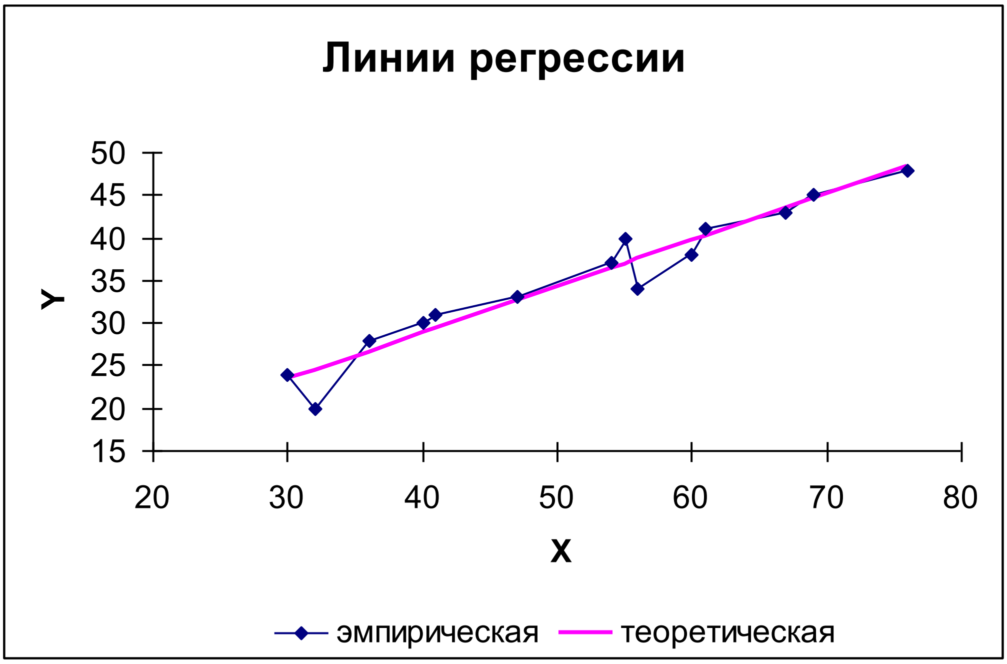


Рис. 2. Эмпирическая и теоретическая линии регрессии

Ответ: 1) $r = 0{,}970$, линейная связь прямая, весьма тесная; 2) выборочное уравнение прямой регрессии $y_x = 0{,}54x + 7{,}22$; 3) линии регрессии представлены на рис. 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- Москва : Айрис-пресс, 2011. - 602, [1] с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 212.
2. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург : Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003, 2001. - 432 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 781.

**Дополнительная литература**

1. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Профессия, 2007, 2003 ; Москва. - 200 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 378.

2. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 815 с.: ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 30.