МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «МГТУ»)

«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
_______________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ИПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 19.02.10 Технология общественного питания
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании

методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Председатель МК

Е.А.Чекашова

Протокол от 29 мая 2019 г.

Разработано

на основе ФГОС СПО по специальности 19.02.10 Технология продукции общественного питания, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 22 апреля 2014 г. № 384

Автор (составитель): Банникова Д.В. преподаватель первой категории «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»
Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент) _Гарифуллина Е.А., преподаватель высшей категории «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»
Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата,

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Содержание

Введение

1.1 Методические указания по практическим работам обучающихся по учебной дисциплине **«Математика»** разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 19.02.10 Технология продукции общественного питания базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 22 апреля 2014 г. № 384 учебного плана очной формы обучения, утвержденного 31.05.2019 г.

1.2 Цели и задачи практической (лабораторной) работы - требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

- У1 решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности;

- У2 применять простые математические модели систем и процессов в сфере профессиональной деятельности;

знать:

- З 1 - значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ;

- З 2 - основные понятия и методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики;

- З 3 - основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности

Таблица 1 - Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 1	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	У 1, З1
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	У 1 – У2, З1, З3
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	У 1 – У2, З1, З3
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития	У 1 – У2, З1, З3
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	У 1 – У2, З1
ОК 6	Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	У1 З1

ОК 7	Брать ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.	У1 З1
ОК 8	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	У1 - У2 З1 - З3
ОК 9	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	У1 З1
ПК 1.1.	Организовывать подготовку мяса и приготовление полуфабрикатов для сложной кулинарной продукции.	У2 З3
ПК 1.2.	Организовывать подготовку рыбы и приготовление полуфабрикатов для сложной кулинарной продукции.	У2 З3
ПК 1.3.	Организовывать подготовку домашней птицы для приготовления сложной кулинарной продукции.	У2 З3
ПК 2.1.	Организовывать и проводить приготовление канапе, легкие и сложные холодные закуски.	У2 З3
ПК 2.2.	Организовывать и проводить приготовление сложных холодных блюд из рыбы, мяса и сельскохозяйственной (домашней) птицы.	У2 З3
ПК 2.3.	Организовывать и проводить приготовление сложных холодных соусов.	У2 З3
ПК 3.1.	Организовывать и проводить приготовление сложных супов.	У2 З3
ПК 3.2.	Организовывать и проводить приготовление сложных горячих соусов.	У2 З3
ПК 3.3.	Организовывать и проводить приготовление сложных блюд из овощей, грибов и сыра.	У2 З3
ПК 3.4.	Организовывать и проводить приготовление сложных блюд из рыбы, мяса и сельскохозяйственной (домашней) птицы.	У2 З3
ПК 4.1.	Организовывать и проводить приготовление сдобных хлебобулочных изделий и праздничного хлеба.	У2 З3
ПК 4.2.	Организовывать и проводить приготовление сложных мучных кондитерских изделий и праздничных тортов.	У2 З3

ПК 4.3.	Организовывать и проводить приготовление мелкоштучных кондитерских изделий.	У2 З3
ПК 4.4.	Организовывать и проводить приготовление сложных отделочных полуфабрикатов, использовать их в оформлении.	У2 З3
ПК 5.1.	Организовывать и проводить приготовление сложных холодных десертов.	У2 З3
ПК 5.2.	Организовывать и проводить приготовление сложных горячих десертов	У2 З3
ПК 6.1.	Планировать основные показатели производства продукции общественного питания.	У2 З3
ПК 6.2.	Организовывать закупку и контролировать движение продуктов, товаров и расходных материалов на производстве.	У2 З3
ПК 6.3.	Разрабатывать различные виды меню и рецептуры кулинарной продукции и десертов для различных категорий потребителей.	У2 З3
ПК 6.4.	Организовывать производство продукции питания для коллективов на производстве.	У2 З3
ПК 6.5.	Организовывать производство продукции питания в ресторане.	У2 З3

2. Тематический план видов практической работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание практической работы обучающихся	Аудиторная учебная нагрузка, час	Практическая работа обучающегося, час
1	2	3	4
Раздел 1	**Математический анализ.**	**38**	**16**
Тема 1.1	Дифференциальное исчисление	10	6
	Практическая работа № 1. Вычисление пределов функций.		2
	Практическая работа № 2 Дифференцирование функций. Нахождение частных производных		4
Тема 1.2	Интегральное исчисление	10	6
	Практическая работа № 3. Методы нахождения неопределённого интеграла		2
	Практическая работа № 4. Вычисление определённого интеграла		2
Тема 1.3.	Дифференциальные уравнения	10	4
	Практическая работа № 5. Решение простых дифференциальных уравнений 1-го порядка		2
	Практическая работа № 6 Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка		2
Тема 1.4	Ряды	8	4
	Практическая работа № 7. Исследование числовых рядов на сходимость		2
	Практическая работа № 8. Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена		2
Раздел 3	**Основы теории вероятностей и математической статистики**	**12**	**6**
Тема 3.1	Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения	6	4
	Практическая работа № 9 Элементы комбинаторики		2
	Практическая работа № 10. Решение задач на нахождение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения.		2
Тема 3.2	Элементы математической статистики.	6	2
	Практическая работа № 11. Определение числовых характеристик случайных величин		2
Раздел 4	**Основные численные методы**	**10**	**2**
Тема 4.1	Численное интегрирование	10	2
	Практическая работа № 12. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешностей		2

Порядок выполнения практической работы обучающихся:

Раздел 1. Математический анализ

Тема 1.1. Дифференциальное исчисление

Практическая работа № 1.

Тема: Вычисление пределов функций.

Цель занятия: закрепить навыки нахождения пределов функции в точке и на бесконечности.

Оснащение: дидактические карточки с заданиями практической работы № 1

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Предел последовательности. Свойства пределов последовательности. **2.** Раскрытие неопределенностей. **3.** Первый и второй замечательные пределы. **4.** Асимптоты функции.

Справочный материал.

Число b называют **пределом последовательности** (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Правила для вычисления пределов

1. Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{k}{x^m}\right)=0$

2. Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b,\quad \lim\limits_{x\to\infty} g(x)=c,$ то

а) предел суммы равен сумме пределов: $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)+g(x)\big)=b+c$

б) предел произведения равен произведению пределов $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\cdot g(x)\big)=b\cdot c$

в) предел частного равен частному от деления пределов ($c\neq 0$,$g(x)\neq 0$) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{b}{c}$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела: $\lim\limits_{x\to\infty}\big(k\cdot f(x)\big)=k\cdot b$

3. Предел стационарной последовательности равен значению любого члена последовательности. $\lim\limits_{x\to\infty} C=C$.

Бесконечно большие и бесконечно малые величины.

Утверждение:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,$ *то функция называется бесконечно большой при* $x\to a$

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,$ *то функция называется бесконечно малой при* $x\to a$

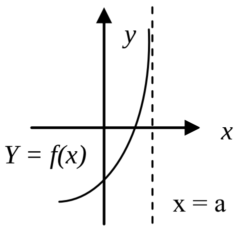
1. Сумма двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.
2. Сумма бесконечно большой функции и конечной функции есть бесконечно большая функция, а частное таких функций бесконечно малая.
3. Если *f(x)* бесконечно малая, то ей обратная функция - бесконечно большая.

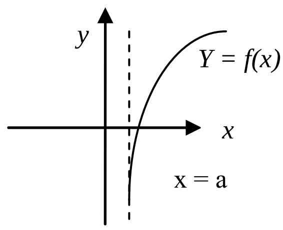
Есть особые случаи, когда предел суммы, произведения или частного нельзя найти, зная только пределы слагаемых, сомножителей или делимого и делителя. Такие случаи называются неопределенностями.

Для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ пользуются алгебраическими методами разложения числителя и знаменателя (или одного из них) на сомножители, затем производят сокращение, иногда проще раскрывать неопределенность вида $\frac{0}{0}$ делением числителя на знаменатель или наоборот, как делением многочлена на многочлен.

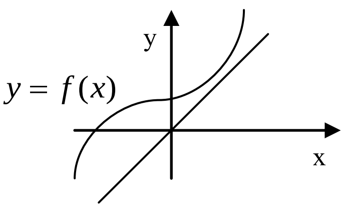
Для раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ числитель и знаменатель делят на x в максимальной степени, все члены, содержащие x в меньшей степени, будут стремиться к нулю.

Вертикальные асимптоты – прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ в точке a, если хотя бы один из разносторонних пределов равен бесконечности. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ *или* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$





Если функция задана дробно-рациональным выражением, то вертикальная асимптота появляется в тех точках, когда знаменатель равен нулю, а числитель не равен нулю.



Наклонная асимптота – прямая $y = k \cdot x + b$ наклонная асимптота функции $y = f(x)$, если эта функция представлена в виде $f(x) = k \cdot x + b + \alpha(x), \textit{при} \lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$

Необходимый и достаточный признак существования наклонной асимптоты:

Для существования наклонной асимптоты $y = k \cdot x + b$ к графику функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно существование конечных пределов: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x\right]$

Горизонтальные асимптоты. График функции имеет горизонтальную асимптоту при $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, если существует и конечен, хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$, то говорят, что функция не имеет горизонтальную асимптоту.

Схема отыскания асимптот:

1) Для отыскания вертикальных асимптот выписывают все точки разрыва функции и конечные числа на границе области определения. Если таких точек нет, то нет и вертикальных асимптот.

Если такая точка $x = a$ имеется, то вычисляют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Если, хотя бы один из пределов существует и бесконечен, то $x = a$ - вертикальная асимптота. Если оба предела не существуют или конечны, то $x = a$ не является вертикальной асимптотой.

2) Для отыскания наклонных асимптот вычисляют $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - k \cdot x\right]$.

Если оба предела существуют и конечны, то $y = k \cdot x + b$ - наклонная асимптота.

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти пределы числовых последовательностей.

1.1. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 - n}{5 + n - n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

1.2. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 4}{7 - 5n + n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} tg 3x$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$ 5) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x - 5}{2 - \sqrt{x-1}}$

1.3. 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3 + n^2}{n^2 + 2n + 5n^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2 + 5x}{2}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$ 5) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$

1.4. 1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^4+n^3+n^2}{n+n^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} tg5x$ 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{3x}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

2. Найти асимптоты графика функции.

2.1. 1) $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$; 2) $y=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

2.2. 1) $y=\dfrac{-1x^2+3}{x-2}$; 2) $y=-1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

2.3. 1) $y=\dfrac{2x^2+6}{x-1}$; 2) $y=2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

2.4. 1) $y=\dfrac{-2x^2+6}{x-2}$; 2) $y=-2+\dfrac{6}{x}+\dfrac{2}{x^2}$.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение понятию предел функции. Перечислить правила нахождения пределов функции. Сформулировать первый и второй замечательные пределы.
2. Дать определение понятиям: непрерывная функция в точке, на промежутке. Дать определение понятию точка разрыва. Изобразить виды точек разрыва. Перечислить свойства непрерывных функций.
3. Дать определение понятию предел функции на бесконечности. Дать определение понятиям: бесконечно малая, бесконечно большая величина. Перечислить свойства для бесконечно малой и бесконечно большой величин.
4. Перечислить виды неопределенностей. Указать способы избавления от неопределенностей.
5. Дать определение понятию асимптота. Классифицировать виды асимптот. Объяснить способы нахождения различных асимптот.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

Практическая работа № 2.

Тема: Дифференцирование функций. Нахождение частных производных.

Цель занятия: закрепить навыки нахождения производной функции; умение дифференцировать сложную функцию.

Оснащение: таблицы с формулами дифференцирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 2

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Производная функции (определение). **2.** Механический смысл производной. **3.** Общее правило нахождения производной. **4.** Правила дифференцирования суммы, произведения, частного двух функций. **5.** Таблица производных основных элементарных функций. **6.** Сложная функция (определение). **7.** Правило дифференцирования сложной функции. **8.** Примечания к правилу дифференцирования функций. **9.** Признаки возрастания и убывания функции. **10.** Экстремум функции. Точки экстремума. **11.**Геометрический и физический смысл производной. **12.** Исследование функции с использованием производной. **13.** Понятие дифференциала функции. **14.** Понятие частной производной.

Справочные материалы.

Производной функции *f* в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx , при условии, что $\Delta x \to 0$,т.е.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правила дифференцирования

I. $C' = 0, \quad C - \textit{постоянная.}$ **IV.** $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, Ñ – ïîñòîÿííàÿ . **II.** $(u \pm v)' = u' \pm v'$ **V.** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ **III.** $(uv)' = u'v + uv'$

Отношение $\frac{f'(x)}{f(x)}$ называется **логарифмической производной** функции *f*(*x*). Способ **логарифмического дифференцирования** состоит в том, что сначала находят логарифмическую производную функции, а затем производную самой функции по формуле $f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x)$

Пусть: $z = f(y)$ - дифференцируема в точке y_0 , $y = \varphi(x)$ - дифференцируема в точке x_0 , $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда **сложная функция** $z = f(\varphi(x))$ - дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула: $z'_x = z'_y \cdot y'_x = f'(y) \cdot \varphi'(x)$ $\quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$

Касательной к кривой в точке называется прямая, которая является предельным положением секущей.

Уравнение касательной может быть записано в виде: $y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0)$.

Если закон движения материальной точки задан уравнением $S = f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определенный момент времени нужно найти производную $S' = f'(t)$ и подставить в неё соответствующее значение t. Механическое истолкование производной: $V = \frac{ds}{dt} = S'(t).$

Ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.

Теорема (достаточные условия): Если функция *f*(*x*) дифференцируема на интервале (*a*; *b*) и $f'(x) \succ 0 \qquad (f'(x) \prec 0)$, то эта функция возрастает (убывает) на данном интервале.

Возрастающие или убывающие функции называются **монотонными**

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются <u>критическими.</u>

Теорема (необходимые условия): Если дифференцируемая функция *f*(*x*) возрастает (убывает) в данном интервале (*a;b*), то производная этой функции неотрицательна $f'(x) \geq 0$. (не положительна $f'(x) \leq 0$) в этом интервале.

Дифференциал функции - это произведение производной $f'(x_0)$ и приращения аргумента Δx: $df = f'(x_0)\Delta x$ *или* $\boxed{dy = y' \cdot dx} \rightarrow y' = \frac{dy}{dx}$ **Формула для вычисления приближенных значений** $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ **Дифференциал второго порядка** - дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2 f = f'(x)dx^2$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x называется производная этой функции при постоянном значении переменной y; она обозначается $\frac{dz}{dx}$, z'_x

Задания для самостоятельного решения.

1. Найти производную функции при данном значении аргумента

1.1. $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$, $x = \sqrt{3}$

1.2 $f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$, $x = 0$

1.3 $f(x) = \ln\frac{x+1}{x}$, $x = 3$

1.4. $f(x) = \frac{e^{-3x} - e^{3x}}{3}$, $x = 0$

2. Составить уравнение касательной к кривым в указанных точках

2.1 $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 3$, $x = 2$

2.2 $y = \frac{2x+3}{2x-1}$, $x = 0$

2.3. $y = \sqrt{5x-9}$, $x = 0$

2.4. $y = \ln(1+x)$, $x = 0$

3. Найти наибольшее значение функции на заданном отрезке

3.1. $y = (1-\cos x)\cdot\sin x$, $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

3.2. $y = \ln\cos 7x + \sqrt{\frac{x}{\pi}}$, $\left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$

3.3. $y = \sqrt{\cos 4x}$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

3.4 $y = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$, $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

4. Исследовать функцию на выпуклость и точки перегиба.

4.1 $y = e^{2x} - 4e^{x} + 2$

4.2 $y = x^2 \cdot \ln x$

4.3 $y = (x-1)^4 \cdot (3x+7)$

4.4 $y = \ln x + \frac{1}{x}$

5. Найти дифференциалы функций.

5.1 $y = e^{\sin(2x-4)}$

5.2 $y = (1+\cos x)\cdot\sin x$

5.3 $y = \frac{e^x}{e^x - 2}$

5.4 $y = e^{x^2-4x+1}$

6. Найти частные производные функции первого порядка.

6.1 $z = \frac{2x-3y}{2x+3y}$

6.2 $z = \frac{x-3y}{2x+4y}$

6.3 $z = e^{-\frac{2x+y}{5y-x}}$.

..6.4 $z = \frac{x^2 - y}{2x + y^2}$.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение понятию производная. Записать правила дифференцирования и таблицу производных элементарных функций.
2. Дать определение понятию дифференциал функции. Объяснить понятия: производные и дифференциалы высших порядков.
3. Сформулировать понятие физический смысл производной. Записать и изобразить в чем заключается физический смысл производной.
4. Дать определение понятию геометрический смысл производной. Объяснить в чем заключается отличие значения производной от положения касательной к графику функции. Записать уравнение касательной.
5. Изложить приложение производной на примере исследования функции. Рассказать о понятиях монотонность, экстремум (точки экстремума), выпуклость, точки перегиба.
6. Найдите производную сложной функции $\left(\sin^2\left(3x^2-4x\right)\right)'$.
7. Запишите уравнение нормали.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 1.2 Интегральное исчисление

Практическая работа № 3.

Тема: Методы нахождения неопределённого интеграла

Цель занятия: находить неопределенный интеграл различными методами

Оснащение: карточки с формулами интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 3

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Неопределенный интеграл (определение). **2.**Свойства неопределенного интеграла. **3.**Приёмы непосредственного интегрирования. **4.**Метод подстановки при вычислении неопределенного интеграла. **5.**Метод интегрирования по частям. **6.**Интегрирование тригонометрических функций. **7.**Интегрирование рациональных дробей. **8.** Геометрическое и физическое приложение неопределенного интеграла.

Справочный материал. Первообразной данной функции *f* называют такую функцию *F*, производная которой (на всей области определения) равна *f*, то есть $F' = f$. Совокупность всех первообразных для функции *f*(x) на интервале X называется неопределенным интегралом от функции *f*(x) и обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, *f*(x) – подинтегральная функция, *f*(x)*dx* – подинтегральное выражение. Таким образом $\int f(x)dx = F(x) + C$, где *F*(x) – некоторая первообразная для *f*(x), C – произвольная постоянная.

Непосредственное интегрирование Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием.

Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную функции, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Правило: 1). Определить вид табличного интеграла, к которому можно привести данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно). 2). Определить, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записать эту замену. 3). Найти дифференциалы обеих частей записи и выразить дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной. 4). Произвести замену под интегралом. 5). Найти полученный интеграл. 6). В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: $(uv)' = u'v + v'u$
где u и v некоторые функции от x. В дифференциальной форме: $d(uv) = udv + vdu$

Замечание 1: 1) Для применения формулы $\int udv = uv - \int vdu$ требуется выполнить одно дифференцирование для определения dv и одно интегрирование для определения v. Надо помнить, что в состав dv должен обязательно входить дифференциал независимой переменной.

2) Выбор u и dv не может быть произвольным. Он определяется требованием, чтобы интеграл, к которому приводит формула $\int udv = uv - \int vdu$, был проще заданного.

Замечание 2: 1) В интегралах вида $\int P(x)\cdot e^{x}dx, \int P(x)\cdot \sin axdx, \quad \int P(x)\cdot \cos axdx$,

где $P(x)$- многочлен относительно х, a - некоторое число, полагают $u = P(x)$

2) В интегралах вида

$\int P(x)\cdot \ln axdx, \int P(x)\cdot \arcsin axdx, \quad \int P(x)\cdot \arccos axdx, \int P(x)\cdot arctgaxdx, \quad \int P(x)\cdot arcctgaxdx$

полагают $P(x)dx = dv,\ u$ - остальные сомножители

В интегралах вида $\int e^{ax}\cdot \sin bxdx, \int e^{ax}\cdot \cos bxdx, \quad \sqrt{ax^2+b}$ где $a,в$ - числа полагают

$u = e^{ax}\ или \quad u = \sin bx(\cos bx)$

При интегрировании данных функций иногда приходится интегрировать дважды. Вычисления интеграла сводится к решению алгебраического уравнения первой степени.

Интегралы от произведений синусов и косинусов.

а) **Интегрирование произведений синусов и косинусов кратных дуг**. При нахождении интегралов вида $\int \sin mx\cdot \cos nx\cdot dx$, $\int \sin mx\cdot \sin nx\cdot dx$, $\int \cos mx\cdot \cos nx\cdot dx$ с помощью школьных тригонометрических формул $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$,

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$, $\quad \cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$ задача сводится к интегрированию линейной комбинации тех же функций (с другими аргументами).

б) $\int \sin^{m}x\cos^{n}xdx,$ где хотя бы одно из чисел m и n -- нечётное положительное. Такие интегралы вычисляются заменой $s = \sin x$, если нечётна степень косинуса, или $c = \cos x$, если нечётна степень синуса.

$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} d\left(\sin x\right) = \int s^m \left(1-s^2\right)^{\frac{n-1}{2}} ds.$ После раскрытия скобок этот интеграл легко вычисляется. Аналогично нужно поступать и в случае нечётной степени m, используя равенство $\sin xdx = -d(\cos x)$.

в) Аналогично решаются интегралы вида

$\int \sin^m xdxg\left(\cos x\right)dx, \quad \int \cos^n xg\left(\sin x\right)dx, \quad где \quad m, n$ - нечетные положительные числа.

г) $\int \sin^m x \cos^n xdx, \quad где \quad m, n$ - четные неотрицательные. Такие интегралы упрощаются при помощи тригонометрических *формул понижения степени*:

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\alpha\right); \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\alpha\right), \quad \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. После применения этих формул (быть может, неоднократного) и раскрытия скобок получаются интегралы, в которых степень синуса или косинуса нечётна. Они либо сразу сводятся к табличным линейной заменой, либо их можно вычислить тем способом п.б).

Интегрирование рациональных дробей.

Интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы - в случаях простейших дробей 1 типа;

2) через рациональные функции - в случае простейших дробей 2 типа

3) через логарифмы и арктангенсы - в случае простейших дробей 3 типа

4) через рациональные функции и арктангенсы - в случае простейших дробей 4 типа.

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln\left|x-a\right| + C$.

2. $\int \frac{A}{\left(x-a\right)^n}dx = A \cdot \int \left(x-a\right)^{-n} d\left(x-a\right) = A \cdot \frac{\left(x-a\right)^{-n+1}}{-n+1} + C$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot arctg\, \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$

4. $I_m = \int \frac{Ex+F}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m}$ 1). Выделяем в числителе дифференциал знаменателя:

$$I_m = \frac{E}{2}\int \frac{d(x^2+p_2x-q_2)}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m} + \left(F-\frac{Ep_2}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)} = \frac{E}{2}\frac{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^{1-m}}{1-m} +$$
$$+\left(F-\frac{Ep_2}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+p_2x-q_2\right)^m}$$

Метод неопределенных коэффициентов

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой разложен на множители $Q(x) = \left(x-x_1\right)^{k_1} \cdot \left(x-x_2\right)^{k_2} \cdot \ldots \cdot \left(x^2+p_1x+q_1\right)^{s_1} \ldots \left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}$, можно представить в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{\left(x-x_1\right)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{\left(x-x_1\right)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \frac{B_2}{\left(x-x_2\right)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{\left(x-x_2\right)^{k_2}} + \frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^2} + \ldots. + \frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{\left(x^2+p_mx+q_m\right)^{s_m}}, A_1, A_2, ..B_1, B_2 ... M_1, N_1 ...$$ - некоторые действительные коэффициенты.

Последовательность нахождения неопределенного интеграла методом неопределенных коэффициентов.

1. Если рациональная дробь является неправильной, то надо разделить «уголком» числитель на знаменатель, в результате чего получим многочлен и правильную дробь.
2. Знаменатель полученной дроби разложить на произведение линейных и квадратичных множителей.
3. Правильную дробь разложить на сумму простейших дробей.
4. Найти постоянные коэффициенты.
5. Найти интеграл от каждого слагаемого в отдельности и просуммировать результат.

Пример: $\frac{x^2-3}{(x-2)(x+3)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$, $\quad \frac{x^3+2}{x^2\left(x^3+2\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^3+2}$

Интегрирование рациональной дроби приводится к интегрированию простейших дробей.

Геометрическое и физическое приложение неопределенного интеграла

Нахождение первообразной по начальным условиям. При интегрировании функции получается совокупность её первообразных. Для того чтобы из этой совокупности выделить конкретную первообразную задают дополнительные условия, начальные условия.

При решении таких задач используют следующий алгоритм:

1) Находят неопределенный интеграл от заданной функции

2) Вычисляют величину С, подставляя начальные условия в полученную совокупность первообразных для заданной функции.

3) Находят искомую первообразную, заменяя в совокупности первообразных постоянную интегрирования её вычисленным значением.

Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку. Под наклоном кривой мы понимаем тангенс угла наклона касательной к этой кривой в конкретной точке. Наклон или угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x по геометрическому смыслу производной равен значению производной в этой точке, т.е. $k = y' = f'(x_0)$.

Рассмотрим обратную задачу: зная наклон кривой в любой её точке как функцию абсциссы этой точки, т.е. зная что $k = y' = f'(x_0)$, найти уравнение самой кривой.

Так как $k = y' = f'(x_0) = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = f(x), т.е. \quad dy = f(x)dx \Rightarrow y = \int f(x)dx$. Вычислив этот неопределенный интеграл, мы можем получить уравнение $y = F(x) + C$, которое содержит произвольную постоянную. Этому уравнению на плоскости соответствует семейство кривых, получаемых из любой параллельным переносом вдоль оси ОУ. Данные графики называются интегральными кривыми.

Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения. По физическому смыслу производной мы знаем, что $V = S'(t), \quad a = V'(t) = S''(t)$, т.е. скорость - это первая производная пути, ускорение - это первая производная скорости или вторая производная пути. Закон движения тела по заданной скорости можно найти интегрированием, а по заданному ускорению - двукратным интегрированием.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти неопределенный интеграл методом непосредственного интегрирования.

1.1. $\int\left(9x^6 - 2x^3 + 5x - 1\right)dx$ .. .

1.2. $\int\left(4x^4 + 3x^2 - 2x + 5\right)dx$

1.3. $\int\left(6 - x - 2x^2 + 5x^4\right)dx$

1.4. $\int\left(8x^4 - 3x^2 + 7x - 3\right)dx$

2. Найти неопределенный интеграл методом подстановки.

2.1. $\int\sqrt[3]{(4-x)^2}\,dx$

2.2. $\int(5+2x)^7\,dx$

2.3. $\int(8x-1)^9\,dx$

2.4.. $\int\sqrt[4]{(3x-2)^3}\,dx$

3. Найти неопределенный интеграл от произведений синуса и косинуса.

3.1. $\int\cos^5 x \cdot \sin x\,dx$

3.2. $\int\sin^3 x\cos x dx$

3.3. $\int \sin^5 x \cos x dx$ 3.4. $\int \cos^7 x \cdot \sin x dx$

4. Найти неопределенный интеграл рациональной дроби.

4.1. $\int \frac{dx}{(2x-1)(2x+3)x}$. 4.2. $\int \frac{x-1}{x(x+4)(x+3)}dx$.

4.3. $\int \frac{x}{(x-1)(x-4)(x+7)}dx$. 4.4. $\int \frac{x-1}{x(x+8)(x-7)}dx$.

5. Найти функцию по её дифференциалу.

5.1.Найти функцию по её дифференциалу $dy = (\cos 2x - 6\sin^2 x \cdot \cos x)dx$, если функция принимает значение 2 при $x = \frac{\pi}{2}$.

5.2. Найти функцию по её дифференциалу $dy = (\cos 2x - 6\cos^2 x \cdot \sin x)dx$, если функция принимает значение 2 при $x = \pi$.

5.3. Найти функцию по её дифференциалу $dy = (\sin 2x - 6\sin^2 x \cdot \cos x)dx$, если функция принимает значение 0,5 при $x = \frac{\pi}{6}$.

5.4. Найти функцию по её дифференциалу $dy = (\sin 2x - 6\cos^2 x \cdot \sin x)dx$, если функция принимает значение 1 при $x = \frac{\pi}{2}$.

6. Решите задачу, используя неопределённый интеграл

6.1.Найдите уравнение кривой, проходящей через точку А (0; 1), если угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен $5x$.

6.2. Ускорение прямолинейно движущейся точки меняется по закону $a = 4t^2$, где a – ускорение, м/с^2; t – время, в с. Найдите зависимость скорости движения от времени, если в начальный момент времени (t = 0) скорость точки была равной 1 м/с

6.3. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку А(1; 2), если угловой коэффициент касательной к кривой в точке с абсциссой x равен x^3.

6.4. Скорость прямолинейно движущейся точки изменяется по закону $v = t^3 + 1$, где v – скорость, м/с, t – время в с. Найдите закон движения точки, если в момент времени t = 2 с точка находилась в начале координат.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию первообразная. Сформулировать основное свойство первообразных функций.
2. Проверьте, является ли функция $F(x)=3\ln|x|+C$ первообразной для функции $f(x)=\frac{3}{x}$.
3. Дать определение понятию неопределённый интеграл. Рассказать в чем заключается его геометрический смысл.
4. Записать свойства неопределённого интеграла. Проиллюстрировать таблицу интегралов элементарных функций.
5. Найдите ошибку в вычислении интеграла: $\int x^{-4}dx=\frac{x^{-5}}{-5}+C$.
6. Показать на примере в чем заключается интегрирование неопределённого интеграла методом подстановки. $\int(6x-1)^5dx$
7. Показать на примере в чем заключается интегрирование неопределённого интеграла по частям. Указать, какие из следующих интегралов целесообразно интегрировать по частям: $a)\int x\cdot arctgxdx \quad b)\int\frac{dx}{x\ln x}$.
8. В семействе кривых $y=\int xdx$ найдите кривую, проходящую через точку (2;3).

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Практическая работа № 4.

Тема: Вычисление определённого интеграла

Цель занятия: закрепить навыки непосредственного интегрирования; применения метода подстановки при нахождении определенного интеграла; вычисления определенного интеграла по частям.

Оснащение: карточка с формулами интегрирования; микрокалькулятор; карточки с методами интегрирования, дидактические карточки с заданиями практической работы № 4.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Определенный интеграл (определение). **2.**Свойства определенного интеграла. **3.**Правило вычисления определенного интеграла. **4.**Приёмы непосредственного интегрирования. **5.**Метод подстановки при вычислении неопределенного интеграла. **6.**Метод интегрирования по частям. **7.**Формула Ньютона-Лейбница.

Способы вычисления определенных интегралов:

I. Формула Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\ \Big|_b^a = F(b) - F(a)$

II. Замена переменной в определенном интеграле $x = \varphi(t)$ **осуществляется по следующей формуле** $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$,где α и β определяются в силу замены из условий $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$. При замене переменной в определенном интеграле возвращаться к старой переменной после замены не надо.

III. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла имеет вид

$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x).$ Рекомендации по выбору u и dv остаются точно такими же, как и для формулы интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Свойства определенного интеграла

1) При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный: $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла: $\int\limits_a^b k \cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx, \quad k - \textit{постоянный} \quad \textit{множитель}$. (свойство линейности)

3) Если *a, в, c* принадлежат интервалу на котором функция $f(x)$ непрерывна, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. (свойство аддитивности определенного интеграла)

4) $\int_a^b dx = b - a$.

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx.$$

6) Переменную интегрирования можно обозначить любой буквой, не нарушая справедливости формул, т.е. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy = \int_a^b f(t)dt = \ldots.$

7) Если нижний и верхний пределы интегрирования равны между собой, то определенный интеграл равен нулю. $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

8) Если f(x) – четная непрерывная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Если f(x) – нечетная непрерывная функция, то $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Задания для самостоятельного решения.

1. Вычислить определенный интеграл методом непосредственного интегрирования:

1.1. а) $\int_0^2 \left(3 - x + 4x^2\right)dx$; б) $\int_0^1 \left(2e^x - \sqrt{x}\right)dx$ в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \sin x\right)dx$

1.2. а) $\int_{-2}^{-1} \left(4 + x - 2x^2\right)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{5}{\sin^2 x} - \sin x\right)dx$ в) $\int_1^e \left(\frac{2}{x} - e^x\right)dx$

1.3. а) $\int_0^1 \left(2 - x - 3x^3\right)dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(3\cos x - \frac{2}{\cos^2 x}\right)dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx$

1.4. а) $\int_1^2 \left(6x - 7x^2 + 1\right)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos x - 2\sin x\right)dx$ в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \sin x\right)dx$

2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки.

2.1. а) $\int_0^2 \frac{4xdx}{\left(x^2-1\right)^3}$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin xdx}{3-\cos x}$ .....2.2 $\int_1^5 \sqrt{\left(2x-1\right)^3}\,dx$ б) $\int_0^{\sqrt[3]{2}} 3e^{x^3}x^2dx$

2.3.а) $\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{\left(x+3\right)^2}}$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{\sin x}\cos xdx$ 2.4 $\int_{-1}^{2} \left(x^2-1\right)^3 xdx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\sin x+1}\cos xdx$

3. Вычислить определенный интеграл по частям.

3.1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos xdx$ 3.2. $\int_0^1 arctgxdx$ 3.3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin xdx$ 3.4. $\int_0^1 x\cdot e^{-x}dx$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию определённый интеграл. Рассказать в чем заключается его геометрический смысл. Проиллюстрировать геометрический смысл определенного интеграла.
2. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
3. Расскажите: что в записи $\int_a^b f(x)dx$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)dx$. Может ли быть $a = b$?
4. Показать на примере в чем заключается интегрирование определённого интеграла подстановкой. $\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$
5. Показать на примере в чем заключается интегрирование определённого интеграла по частям. $\int_0^1 \arcsin xdx$

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 1.3 Дифференциальные уравнения

Практическая работа № 5.

Тема: Решение простых дифференциальных уравнений 1-го порядка

Цель занятия: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными, линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Оснащение: карточки с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 5.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Что называется дифференциальным уравнениям? **2.** Как определяется порядок дифференциального уравнения? **3.** Что называется общим решением дифференциального уравнения? **4.** Что называется частным решением дифференциального уравнения? **5.** Задача Коши; начальные условия задачи Коши. **6.** Геометрический смысл решения задачи Коши. **7.** Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. **8.**Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, его решение. **9.** Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Справочный материал.

Дифференциальным называется **уравнение,** содержащее независимую переменную *x*, искомую функцию *y* этой переменной и её производные $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**, если неизвестные функции зависят от одной независимой переменной.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение.

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая обращает данное уравнение в тождество.

Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция $У = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от *n* произвольных постоянных и удовлетворяющая данному уравнению при любых значениях этих постоянных.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при фиксированных значениях произвольных постоянных.

Дифференциальным уравнением **первого порядка** называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) первого порядка.

Если уравнение представлено в виде $y' = f(x, y)$ или $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$,то такое **уравнение** называют **разрешённым относительно производной**.

Виды дифференциальных уравнений.

1. Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$, где $f(x)$, $g(y)$ - данные функции, называется уравнением с **разделенными переменными.** $f(x)dx = - g(y)dy$ - другая запись.

Решение уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

2. Уравнение вида $f(x)\,F(y)\,dx + g(x)\,G(y)\,dy = 0$, где $f(x)$, $F(y)$, $g(x)$, $G(y)$ - заданные функции, называется уравнением с **разделяющимися переменными.**

3. Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0,\ f(x),\ \ \varphi(x)$- функции от x, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uv,\ \ u, v$ - новые функции от *x*.

Дифференциальное уравнение **первого порядка** $\boldsymbol{y' = f(x, y)}$ **называется однородным**, если его можно представить в виде $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одного измерения.

Однородное дифференциальное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = zx$, тогда $dy = z \cdot dx + x \cdot dz$ или $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$, где $z = \frac{y}{x}$ – новая неизвестная функция.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найти частные решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1.1. 1) $4xydx-(x^2+1)dy=0;$ при x =1 и y = 4 2) $y^2dx-e^xdy=0;$ при x = 0 и y = 1

3) $(1-y)dx+(1+x)dy=0;$ при y(1)=3 4) $y\sin xdx+\cos xdy=0;$ при $x=\dfrac{\pi}{3}$ $y=\dfrac{1}{2}$

1.2.1) $\dfrac{dy}{x-1}-\dfrac{dx}{y-2}=0;$ при x = 0 и y = 4 2) $\dfrac{dy}{dx}-2x-3=0$; y(3)=0

3) $\sqrt{x}dy-\sqrt{y}dx=0;$ при y = 0 и x = 0 4) $y'=(2y+1)ctgx;$ при $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

1.3.1) $\dfrac{dy}{x^2}-\dfrac{dx}{y^2}=0;$ при x = 0 и y =2 2) $(1+y)dx-(1-x)dy=0;$ y(-2) = 3

3) $y\cdot tgx\cdot dx+dy=0;$ при $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4$ 4) $x^2\cdot dy-(2x\cdot y+3y)=0;$ при $y(4)=1$

1.4.1) $(x^2+1)dy-xydx=0;$ при $x=\sqrt{3}$ и y = 2 2) $y'=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y(0)=2$

3) $2y\cdot dx-(1+x)dy=0;$ при y(1) = 4 4) $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy,$ при $y(0)=2$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

2.1. $\dfrac{dy}{dx}-2y-3=0$ 2.2. $\dfrac{dy}{dx}=y+1$

2.3. . $\dfrac{dy}{dx}+xy=x$ 2.4. $\dfrac{dy}{dx}-yctgx=\sin x$

3. Найти общее решение однородного уравнения первого порядка.

3.1. $(xy-x^2)\cdot y'=y^2$ 3.2. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$

3.3. $xy'=y\cdot\ln\dfrac{x}{y}$ 3.4. $y-xy'=x+y\cdot y'$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию дифференциальное уравнение. Изобразить графически его решение. Дать определение понятию порядок дифференциального уравнения. Перечислить в чем отличия его общего и частного решения. Перечислить классификацию дифференциальных уравнений.
2. Перечислить классификацию дифференциальных уравнений. Дать определение понятию дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Показать на примере в чем заключается решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
3. Дать определение понятию линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Показать на примере в чем заключается решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $\frac{dy}{dx} = y + 1$
4. Дать определение понятию однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Показать на примере в чем заключается решение однородного дифференциального уравнения первого порядка $\left(x^2 + 2xy\right)dx + xydy = 0$.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Практическая работа № 6.

Тема: Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Цель занятия: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Оснащение: карточки с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 6.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Дифференциальные уравнения второго порядка. **2.**Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ и метод их решения. **3.** Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$ и их решение. **4.** Характеристическое уравнение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. **5.** Вид общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения. **6.** Начальные условия в дифференциальных уравнениях второго порядка.

Справочный материал.

Обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$, где F – известная функция трех переменных, x – независимая переменная, y – неизвестная функция, y', y''– ее производные.

Если уравнение представлено в виде $y'' = f(x, y, y')$, то такое уравнение называют **разрешённым относительно производной.**

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка. Простейшим видом неполного дифференциального уравнения второго порядка является уравнение вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ или $\frac{dy'}{dx} = f(x)$. Решается двукратным интегрированием: $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, $dy' = f(x)dx, \quad y' = \int f(x)dx$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, $\quad \frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$ где p и q – постоянные коэффициенты, называется **линейным однородным уравнения второго порядка** с постоянными коэффициентами.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения. Доказано, что частными линейно независимыми решениями данного уравнения являются функции вида $y = e^{kx}$, поэтому их отыскание сводится к нахождению корней характеристического уравнения $\mathrm{k}^2 + \mathrm{pk} + \mathrm{q} = 0$. Для его составления в уравнение $y'' + py' + qy = 0$ вместо y'', y', и y нужно подставить соответственно k^2, k, и *1*. При решении характеристического уравнения возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и притом различные числа ($k_1 \neq k_2$); **2)** k_1 и k_2 – действительные равные числа ($k_1 = k_2$); **3)** k_1 и k_2 – комплексные числа.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$.

общий интеграл имеет вид $\mathrm{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

II. Корни характеристического уравнения действительны и равны: $k_1 = k_2$.

частные решения имеют вид $\mathrm{y}_1 = e^{k_1 x}$ и $\mathrm{y}_2 = e^{k_2 x}$, общее решение – $\mathrm{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

III. Корни характеристического уравнения комплексные.

Так как комплексные корни входят попарно сопряжёнными, то обозначим: $k_1 = a + bi,\quad k_2 = a - bi$, где $a = -\dfrac{p}{2},\quad b = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Частные решения можно записать в форме $\mathrm{y}_1 = e^{ax} \cos bx$ и $\mathrm{y}_2 = e^{ax} \sin bx$, общее решение – $\mathrm{y} = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Простейшие уравнения в частных производных.

Дифференциальное уравнение в частных производных – это равенство, содержащее несколько независимых переменных, искомую функцию и ее частные производные по этим переменным. В общем виде это уравнение может быть записано так: $F(x_1, x_2, \ldots x_n, u, \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots) = 0$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$- независимые переменные; $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - неизвестная искомая функция. (1)

Дифференциальное уравнение (1) будет **линейным**, если функция F линейна относительно искомой функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и ее производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение $X\dfrac{\partial z}{\partial x} + Y\dfrac{\partial z}{\partial y} = Z,$ (2) где X, Y, Z- функции *x,y,z.* Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{X} = \dfrac{dy}{Y} = \dfrac{dz}{Z}.$ Пусть решение этой системы определяется равенствами $\omega_1(x, y, z) = C_1,\quad \omega_2(x, y, z) = C_2$.Тогда общий интеграл дифференциального уравнения

(2) имеет вид $\Phi[\omega_1(x,y,z),\omega_2(x,y,z)]=0$, где $\Phi(\omega_1,\omega_2)$- произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить неполные дифференциальные уравнения второго порядка:

1.1 $\frac{d^2s}{dt^2}=18t+2$, если $s(0)=4$, $s'(0)=5$

1.2 $\frac{d^2y}{dx^2}=x^2$, если $y(0)=0$, $y'(0)=12$

1.3 $\frac{d^2y}{dx^2}=12x$, если $y(0)=2$, $y'(0)=20$

1.4 $\frac{d^2y}{dx^2}=-6x+2$, если $y(-1)=-8$, $y'(-1)=3$

2. Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

2. 1 1) $y''-4y'+5y=0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$

2.2. 1) $y''+2y'+10y=0$ 2) $y''+6y'+9y=0$

2. 3 1) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$ 2) $y''+12y'+36y=0$

2. 4 1) $y''+8y'+15y=0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+4y=0$

3. Найти частные решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

3.1 $y''-10y'+25y=0$, если $y(0)=2$, $y'(0)=8$

3.2. $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-20y=0$, если $y(0)=\frac{9}{5}$, $y'(0)=0$

3.3 $y''-6y'+13y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=5$

3.4 $y''-4y'+13y=0$, если $y(\frac{\pi}{3})=1$, $y'(\frac{\pi}{3})=-6$

4. Решить дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно частных производных. Найти общий интеграл уравнения.

4.1 $\sin x\frac{\partial z}{\partial x}+\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

4.2 $y\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$

4.3 $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=-2xy$

4.4 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=4$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Показать на примере в чем заключается решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения.
4. Дать определение понятию простейшего дифференциального уравнения в частных производных. Показать на примере в чем заключается решение простейшего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$
5. Из предложенных дифференциальных уравнений выберите дифференциальное уравнение в частных производных: $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$, $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$, $\cos xx\frac{\partial z}{\partial x}+\cos y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 1.4 Ряды

Практическая работа № 7.

Тема: Исследование числовых рядов на сходимость

Цель занятия: закрепить понятия сходимости и расходимости ряда, признаки Даламбера, Коши и Лейбница.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 7.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие числового ряда. Общий член. Частичная сумма. **2.** Понятия: сходящийся ряд, расходящийся. **3.** Геометрический ряд. **4**. Гармонический ряд. **5.** Необходимый и достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Признак Даламбера. **6.** Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. **7.** Абсолютная и условная сходимость. **8.** Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Справочный материал.

Числовым рядом (или просто рядом) называется выражения вида, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ... (1), где \quad u_1, u_2, ... u_n - действительные \quad или \quad комплексные \quad числа,$ называемые членами ряда, u_n- общим членом.

Сумма первых *n*- членов ряда (1) называется ***n*- й частичной суммой ряда** и обозначается через S_n, *т.е.* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1), то этот предел называют суммой ряда (1) и говорят, **ряд сходится**._Записывают: $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Если предел не существует или $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд (1) называют **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Первый признак сходимости: Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (1)$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n (2)$. Если для всех n выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Предельный признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда (1) и (2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 \prec A \prec \infty)$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно. Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, называется <u>эталонным</u>

Замечание 3: Если *l=0 или l=∞* - выбираем другой эталонный ряд.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...(1),$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Радикальный признак Коши. Пусть дан ряд (1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак сходимости знакочередующегося (знакопеременного) ряда.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \textit{где} \quad u_n \succ 0 \quad \textit{для} \quad n \in N \qquad (3)$$

Достаточный признак Лейбница: Знакочередующийся ряд (3) сходится, если: 1.Последовательность абсолютных величин ряда монотонно убывает т.е.$u_1 > u_2 > u_3 > ... > u_n > ...$ 2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. При этом сумма S ряда (3) удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Знакопеременный ряд называется

условно сходящимся, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов, расходится.

Задания для самостоятельного решения.

1. Вычислить сумму членов ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2-3n+2}$ 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-3)(n+1)}$

2.Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$ 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}$ 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Коши.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$ 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{10}\cdot 10}$ 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}$

5. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{3n-1}$ 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)}{2n+1}$ 5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию числовой ряд. Дать определение понятию сходимость и расходимость числовых рядов. Сформулировать необходимый и достаточный признаки сходимости и расходимости знакоположительного ряда.
2. Дать определение понятию знакоположительного ряда. Сформулировать предельный признак сравнения ряда.
3. Сформулировать признак сходимости ряда по Даламбера. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по Даламберу.

4. Сформулировать радикальный признак сходимости ряда Коши. Описать алгоритм исследования ряда по признаку Коши.
5. Дать определение понятию знакопеременный ряд. Сформулировать признак сходимости ряда Лейбница. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по признаку Лейбница.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с

Практическая работа № 8.

Тема: Разложение функций в ряд Тейлора – Маклорена

Цель занятия: закрепить понятия сходимости и расходимости ряда степенного ряда, разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 8.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие степенного ряда. **2.** Область и радиус сходимости степенного ряда. **3.** Определение функционального ряда. Точка и радиус сходимости. **4.** Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.

Содержание и порядок выполнения работы

Разложение функций в степенные ряды. Степенным рядом называется ряд, состоящий из степенных функций аргумента *x*: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, ...a_n, ...$ называются коэффициентами ряда, $x \in R$, член $a_n x^n$ - общим членом ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество всех значений *x*, при которых данный ряд сходится. Число *R* называется **радиусом сходимости** ряда (1), если при $|x| \prec R$ ряд сходится и притом абсолютно, а при $|x| \succ R$ ряд расходится. Радиус сходимости *R* можно найти, используя признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = R, \qquad (2)$$

$(a_n \neq 0, n = 1,2,3,..)$

Промежуток $-R \prec x \prec R$ называется промежутком (интервалом) сходимости. Если предел равен нулю (*R* = 0), то ряд (1) сходится в единственной точке *x* = 0.

Ряд, членами которого являются функции от *x*, называется **функциональным**: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2) + ... + u_n(x_n) + ...$.

Придавая *x* определенное значение, можно получить числовой ряд, который может быть как сходящимся, так и расходящийся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется **точкой сходимости** ряда, если ряд расходится – **точкой расходимости**.

Разложение функций в степенные ряды. Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + ...$ (3)

Если $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + ...,$(4) которой называется **рядом Маклорена**.

Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать сколько угодно раз, причем полученные ряды имеют тот же промежуток сходимости, что и исходный ряд.

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать по правилам сложения и умножения многочленов. При этом промежуток сходимости полученного нового ряда совпадает с общей частью промежутков сходимости исходного рядов.

Для разложения функции $f(x)$ **в ряд Маклорена необходимо**: 1) вычислить значения функции и её последовательных производных в точке $x=0$,т.е. , $f(0)\,f'(0),\,f''(0),...,\,f^{(n)}(0);$ 2) составить ряд Маклорена, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (4); 3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (2).

Для разложения функции в ряд Тейлора необходимо: 1)вычислить значения функции и её последовательных производных в точке $x = a$, т.е. , $f(a)\,f'(a),\,f''(a),...,\,f^{(n)}(a);$ 2) составить ряд Тейлора, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (3). 3) найти промежуток сходимости по формуле (2).

Примечание. Справедливы следующие разложения в ряд Маклорена:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...(-\infty < x < +\infty)$ экспоненциальный ряд

2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n} +}{(2n+1)!} + \ldots(-\infty < x < +\infty)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...(-\infty < x < +\infty)$

4) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + ...(-1 < x < +1)$ логарифмический ряд

5) $arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...(-1 \le x \le +1)$

6) $(1+x)^n = 1 + \frac{a}{1}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{a(a-1)...(a-(n-1))}{n!}x^n..(-1 < x < +1)$ - биномиальный ряд

7) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n + ...(-1 < x < +1)$

Пример 1: Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = e^{2x}$ по степеням $x-1$.

Решение: 1 способ. Вычислим значения данной функции и её производной при $x = 1$. Имеем: $f(x) = e^{2x}$, $f'(x) = 2e^{2x}$, $f''(x) = 4e^{2x}$, $f'''(x) = 8e^{2x}$,..., $f^{(n)}(x) = 2^n \cdot e^{2x}$;

$f(1) = e^2$, $f'(1) = 2e^2$, $f''(1) = 4e^2$, $f'''(1) = 8e^2$,..., $f^{(n)} = 2^n \cdot e^2$. Подставим эти значения в формулу (3), получим разложение функции $f(x) = e^{2x}$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$:

$e^{2x} = e^2\left[1+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+...+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+...\right]$. Промежуток сходимости ряда найдем по формуле (2): $a_n = \frac{2^n}{n!}$, $\quad a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot n!}$; $\quad \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n\cdot(n+1)\cdot n!}{n!\cdot 2^{n+1}} = \frac{n+1}{2}$.

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2}\right| = \infty$, т.е. промежуток сходимости – вся числовая прямая.

2 способ. Если в разложении $e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...(-\infty < x < +\infty)$ заменить x на $2x$, то получим ряд Маклорена для функции e^{2x}: $e^{2x} = 1+\frac{2}{1!}x+\frac{2^2}{2!}x^2+...+\frac{2^n}{n!}x^n+...$ (5)

Функцию e^{2x} представим в виде $e^{2(x-1)}\cdot e^2$ и подставим это выражение в формулу (5), заменив x на $x-1$; имеем $e^{2x} = e^{2(x-1)}\cdot e^2 = e^2\left[1+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{4}{2!}(x-1)^2+...+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+...\right]$.

Задания для самостоятельного решения.

1. Разложить в ряд Тейлора:

1.1 а) функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. б) функцию $f(x)=\ln x$ по степеням $(x-1)$

1.2 а) функцию $\cos x$ по степеням $x+\frac{\pi}{3}$. б) функцию $f(x)=\sqrt{x}$ по степеням $(x-4)$

1.3 а) функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{6}$. б) функцию $f(x)=x^4+x^2$ по степеням $(x-1)$

1.4 а) функцию $\cos x$ по степеням $x-\frac{\pi}{2}$. б) функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ по степеням $(x+1)$.

2. Разложить в ряд Маклорена:

2.1 функцию $\sin 3x$ 2.2 функцию e^{3x}. 2.3 функцию e^{-2x}. 2.4 функцию $\cos\frac{x}{2}$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию степенной ряд. Описать метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена и Тейлора.
2. Найдите формулу общего члена ряда: $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1 Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения

Практическая работа № 9.

Тема: Элементы комбинаторики

Цель занятия: разобрать основные понятия комбинаторики.

Оснащение: карточки с теоретическими сведениями, дидактические карточки с практической работой № 9.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие соединения. **2.** Понятие размещения, формула размещения. **3.** Понятие перестановки, формула перестановки. **4.** Понятие сочетания, формула сочетания.

Справочный материал:

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются соединениями. Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания. Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики, занимающийся их решениями – комбинаторика.

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называется **перестановками.** Обозначение: P_n , n - число элементов, входящих в перестановку. Формула: $P_n = n!$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$.

Комбинация из m элементов по n элементам, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называется **размещениями.** Обозначение: A_m^n - m-число всех имеющихся элементов, n- число элементов в каждой комбинации.

Формула: $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Сочетаниями называется все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга, по крайней мере, хотя бы одним элементом. $(m \in \mathrm{N}, n \in \mathrm{N}, \quad n \le m \quad)$ Обозначение: C_m^n. Формула: $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$

Основное свойство числа сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$ (позволяет упростить нахождение числа сочетаний из m элементов по n , когда n превосходит $\frac{1}{2}m$).

Задания для самостоятельного решения.

1. Составить различные комбинации чисел из данных цифр.

1.1. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 4,7,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.2. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 5,8,9. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.3. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 2,3,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.4. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 3,6,7. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

2. Записать формулу.

2.1. Написать формулу числа перестановок из 5 элементов. Сосчитать их количество.

2.2. Написать формулу числа перестановок из 4 элементов. Сосчитать их количество.

2.3. Написать формулу числа перестановок из 9 элементов. Сосчитать их количество.

2.4. Написать формулу числа перестановок из 7элементов. Сосчитать их количество.

3. Решить задачу, используя понятие перестановок.

3.1. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 7-ми уроков?

3.2. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 5-ти уроков?

3.3. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 6-ти уроков?

3.4. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 8-ми уроков?

4. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

4.1. В классе 18 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.2. В классе 17 юношей и 15 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек г) всех учащихся?

4.3. В классе 10 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.4. В классе 13 юношей и 17 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

5. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

5.1. В классе 25 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.2. В классе 28 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.3. В классе 36 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.4. В классе 27 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

6. Вычислить, используя формулы размещения и сочетания.

6.1. Вычислить: а) A_8^2; б) C_6^2. 6.2. Вычислить: а) A_{10}^2; б) C_8^2.

6.3. Вычислить: а) A_6^2; б) C_{10}^2. 6.4. Вычислить: а) A_8^4; б) C_{12}^3.

7. Решить уравнение.

7.1. $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$ 7.2. $20A_{n-2}^3 = A_n^5$

7.3. $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$ 7.4. $A_n^4 = 5A_{n-2}^3$

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию комбинаторика. Запишите формулы для нахождения перестановки, размещения, сочетания. Установите различия основных понятий комбинаторики : перестановка, размещение, сочетание.
2. Объясните, в чем состоит комбинаторное правило умножения, используемое для подсчета числа возможных вариантов.
3. Проверьте равенство: $C_n^6 = \dfrac{A_6^{n-6}}{P_{n-6}}$.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. -

(Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с

Практическая работа № 10.

Тема: Решение задач на нахождение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения.

Цель занятия: научиться применять теоремы сложения и умножения для нахождения полной вероятности наступившего события

Оснащение: карточки «Полная вероятность»; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 10.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: **1.**Определение вероятности наступления события. **2.**Теорема сложения вероятностей. **3.**Условная вероятность. **4.**Независимость событий. Теорема умножения событий. **5.**Формула полной вероятности.

Справочный материал.

Испытание - всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий. Результат действия или наблюдения - **случайное событие**. **Искомое событие** (или искомый исход) - определенное событие из всех возможных. **Равновозможные события** - все события, которые имеют равные возможности произойти. Обозначения событий - A, B, C. События называются **несовместными**, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте вместе. В противном случае - **события совместные. Достоверные события** - события, происходящие в данном испытании обязательно. Обозначение - U .

Событие называется **невозможным**, если оно в данном опыте не может произойти. Обозначение - V. **Полной системой событий** A_1, A_2, …, A_N называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании. Если полная система состоит из двух несовместимых событий, то такие события называются **противоположными** и обозначаются А и $\overline{A}$.

1. Относительная частота. *A* - случайное событие, N- число одинаковых испытаний,М - число испытаний, в котором событие *A* произошло. $\frac{M}{N}$ - частота наступления события *A* в данной последовательности испытаний.

2.Вероятность события. Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом Р(*A*).

Вероятность события *A* равна отношению числа *m* исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события *A*, к общему числу *n* всех равновозможных несовместных исходов, т.е. $P(A)=\frac{m}{n}$

Свойства: 1) Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы. 2) Вероятность достоверного события равна единице, так как

$\frac{n}{n}=1$

3)Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $\frac{0}{n}=0$.

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. А+ В или А $\cup B$ $\bigcup_{\kappa=1}^{n} A_{\kappa}$ - сумма n- событий.

Т- 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий) Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B)=P(A)+P(B)$

Следствие 1: Если *A, B, ...M* - образуют полную систему, то сумма вероятностей будет равна 1.

Следствие 2: $P(A)+P(\overline{A})=1$, $\overline{A}$ - противоположное событие событию *A*.

Опр. 2 Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет, $A\cap B$, *AB*, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ - произведение *n* -событий.

Событие *A* называется **независимым** от события *B*, если наступление события *B* не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события *A*.

Т- 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий) Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. $P(AB)=P(A)\cdot P(B).$

Т-3 (теорема сложения вероятностей совместных событий): Если A и B - совместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

А* и *В - случайные события одного и того же испытания. **Условной вероятностью** события A или вероятностью события A при условии, что наступит событие B, называется

число $\dfrac{P(AB)}{P(B)}.$ $\qquad P\left(\dfrac{A}{B}\right)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ - Условная вероятность.

Т- 4 (теорема умножения вероятностей зависимых событий) Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B).$

Формула полной вероятности.

$H_1, H_2, \ldots H_n$ - гипотезы. $P(A)=P\left(\dfrac{A}{H_1}\right)\cdot P(H_1)+P\left(\dfrac{A}{H_2}\right)\cdot P(H_2)\cdot\ldots\cdot P\left(\dfrac{A}{H_N}\right)\cdot P(H_N)$

Вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить задачу на классическое определение вероятности случайного события.

1.1. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть ровно 1 проигрышный билет.

1.2. В коробке 8 белых и 7 черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара. Найдите вероятность того, что имеется 3 белых шара.

1.3. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

1.4. На полке стоит 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

2. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей несовместных событий.

2.1. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным или красным.

2.2. Из колоды в 36 карт случайным образом одновременно вытаскивают 2 карты. Найдите вероятность того, что одна из них пиковой, а другая трефовой масти.

2.3. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выиграют какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке вы, верно, угадали 4 или 5 чисел?

2.4. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть хотя бы один выигрышный билет.

3. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей совместных событий.

3.1. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.

3.2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 5, либо 6, либо тому и другому одновременно.

3.3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 7, либо тому и другому одновременно.

3.4. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 7, либо 8, либо тому и другому одновременно.

4. Решить задачу, применив теорему умножения вероятностей независимых событий.

4.1. Электрическая схема состоит из пяти последовательно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,5; 0,8; 0,1; 0,2. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

4.2. Электрическая схема состоит из трех параллельно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,7; 0,85. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

4.3. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого – 0,16. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?

4.4. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом мешке - 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

5. Решить задачу, применив формулу полной вероятности.

5.1. С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей, со второго – 30% , а с третьего – 30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

5.2. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех – 0,5 и для остальных – 0,3. Какова вероятность поражения цели?
5.3. На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 80% деталей первого сорта, второй – 90% . Взятая наудачу с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.
5.4. В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 – со второго и 20 – с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8 . Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию случайное событие, совместное и несовместное событие, испытание, равновозможное событие, противоположные события. Проиллюстрируйте все определения на примерах.
2. Сформулируйте операции над событиями: сумма, произведение, разность событий. Проиллюстрируйте все определения с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Дать определение понятию вероятность события. Дать классическое определение вероятности. Перечислить свойства вероятности. Дать определение частота наступления события (использовать примеры).
4. Сформулировать теоремы сложения вероятностей и их следствия.
5. Дать определение зависимого и независимого событий. Дать определение условной вероятности. Сформулировать теоремы умножения вероятностей: вероятность появления двух независимых событий, вероятность появления двух зависимых событий.

6. Дать определение полной группы событий. Объяснить формулу полной вероятности. Воспроизвести формулу Байеса.
7. Пусть событие С состоит в наступлении одного из двух несовместных событий А и В. Как найти в этом случае вероятность события С?

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с

Тема 4.2 Элементы математической статистики.

Практическая работа № 11.

Тема: Определение числовых характеристик случайных величин

Цель занятия: закрепить навыки нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины

Оснащение: микрокалькулятор; теоретические таблицы по теме с примерами, дидактические карточки с заданиями практической работы № 11.

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Формула Бернулли. **2.** Случайная величина. Закон распределения случайной величины. **3.** Биноминальное распределение случайной величины. **4.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Справочный материал: Схема Бернулли: Рассматривают независимые повторения одного того же испытания с двумя возможными исходами, которые условно называются «успех» и «неудача». Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что при n таких повторениях произойдет ровно k «успехов».

Теорема Бернулли: Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,

где p - вероятность «успеха», $q = 1 - p$ - вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. **Обозначения:** Случайные величины X; Y; Z…, их значения - строчными соответствующими буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные величины.

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: x_1, x_2,…. Значение x_k принимается с некоторой вероятностью $p_k = P(X = x_k) > 0$. При этом $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Соответствие, которое каждому значению x_k дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность p_k, называется **законом распределения** случайной величины X.

Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

значения x_i	1	2	…	n
вероятность p_i	1	2		n

События X = x_i (I = 1, 2, 3, …,n) являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую **многоугольником или полигоном** распределения вероятностей.

Биноминальное распределение. Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие *р.*

Случайная величина X представляет собой число наступлений событий A в n опытах.

значения x_i	0	1	2	…	n

Закон ее распределения имеет вид:

вероятность p_i	$P(An,_0)$	$P(An,_1)$	$P(An,_2)$	…	$P(An,n)$

где $P(A_{n,n})$ вычисляется по формуле Бернулли. **Закон распределения**, который характеризуется такой таблицей, называется **биноминальным.**

Числа в вероятности отражают размер отклонения случайной величины - эти числа называются **числовыми характеристиками случайной величины.**

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Свойства математического ожидания. 1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ 2. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой этой величине: $M(C) = C$ 3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$. 4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$. 5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины: $M(X \pm C) = M(X) \pm C$. 6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю: $M[X - M(X)] = 0$.

Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят, что математическое ожидание существует, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} | x_k | p_k$ сходится, при расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $D(X) = M(X - M(X))^2$.

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в виде: $D(X)=\sum\left[x_i-M(X)\right]^2\cdot p_i$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$

Свойства дисперсии. 1.Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$. 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат: $D(C\cdot X)=C^2D(X)$, $D(X+C)=D(X)$. 3. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания: $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$. 4. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины X – числа наступления события A в *n* независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вероятностью *p*. Случайная величина X принимает целочисленные значения *m*= 0, 1, …, *n* с вероятностями $P(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам $E(X)=np,\quad D(X)=npq,\quad \sigma(X)=\sqrt{npq}$, где q =1- p.

Функция распределения случайной величины $F(x)=P(X<x)$ в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле: $F(x)=\sum\limits_{x_k<x} p_k=\sum\limits_{x_k<x} P(X=x_k)$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Решить задачу, используя схему Бернулли.

1.1. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение всего времени.

1.2. Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно. Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов хотя бы три выйдут их него неповрежденными.

1.3. Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0,1. Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

1.4. Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания 0,2. Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

2. По таблице распределения случайной величины X, найдите математическое ожидание данной величины.

2.1

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,07	0,1	0,13	0,18	0,04	0,14	0,19	0,12	0,03

2.2.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,02	0,03	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,03	0,02

2.3

X	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2.4.

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

3.1.

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

3.2.

X	-1	1	2	3
P	0,48	0,01	0,09	0,42

X	-1	1	2	3

3.3.

P	0,19	0,51	0,25	0,05

3.4

X	-3	3	5	7
P	0,09	0,51	0, 1	0, 3

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной в первой задаче.

5. Решить задачу.

5.1. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

5.2. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,25.

5.3. В лотерее имеется 100 билетов, из них выигрышных: 5 по 500 руб., 20 по 50 руб., 30 по 10 руб., 45 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.

5.4. У охотника 6 патронов. Он стреляет по волку, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,3.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию независимых испытаний относительно события. Охарактеризовать схему Бернулли. Записать теорему Бернулли.
2. Дать определение понятию случайная величина и перечислить её числовые характеристики. Дать определение понятиям дискретные и непрерывные случайные величины.
3. Дать определение понятию распределение случайной величины. Сформулировать закон распределения дискретной случайной величины. Сравнить

закон распределения дискретной случайной величины с биноминальным законом распределения.

4. Дать определение понятию математическое ожидание случайной величины. Перечислить свойства математического ожидания.
5. Дать определение понятиям: дисперсия дискретной случайной величины, отклонение случайной величины от её математического ожидания. Записать формулы для нахождения дисперсии дискретной случайной величины. Объяснить свойства дисперсии.
6. Дать определение понятию среднее квадратичное отклонение. Записать формулу для нахождения среднего квадратичного отклонения. Рассказать в чем заключается закон больших чисел.
7. Из урны, в которой находится 6 белых и 9 черных шаров, извлекают шар, фиксируют его цвет, после чего возвращают шар в урну. Опыт повторяют трижды. Какова вероятность того, что из трех извлеченных при этом шаров ровно два окажутся белыми?
8. По мишени стреляют 5 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Составьте закон распределения случайной величины Х – попадания в цель.

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.

3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с

Раздел 4. Основные численные методы

Тема 4.1 Численное интегрирование

Практическая работа № 12.

Тема: Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешностей

Цель занятия: закрепить навыки нахождения приближенного значения определенного интеграла различными способами.

Оснащение: микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы №12, теоретические таблицы по теме с примерами

Содержание и порядок выполнения работы

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Определенный интеграл. **2.** Таблица интегралов. **3.** Способы вычисления приближенного значения интеграла: способ прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол).**4.** Оценка погрешности.

Справочный материал: метод прямоугольников.

Как и при рассмотрении интегральной суммы, разобьем отрезок [*а; в*] на *n* равных частей и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат. Заменим дугу АВ кривой *y = f(x)* ступенчатой линией. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$$S_{заштр.} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \Delta x \cdot (f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1}))$$

Учитывая, что отрезок разделен на n рвных частей, получим:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \Rightarrow S_1 = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) - по\ недостатку, (рис.1)$$

. Если прямоугольники провести выше дуги, то площадь будет находится по формуле:

$$S_2 = \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + ... + f(x_n)) - по\ избытку\ (рис.2),$$

$$т.е. S_1 \prec \int_a^b f(x)dx \prec S_2 - формула\ прямоугольников$$

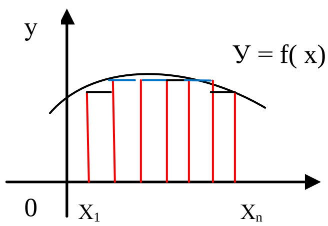


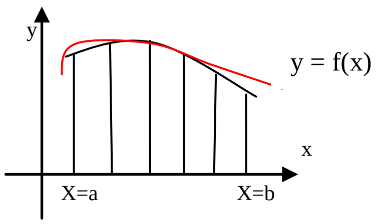
Рис.1

Предельная абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$$R_n \le \frac{\Delta x}{2} \cdot (b-a) \cdot M_1, \text{ где } M_1 = \max_{[a;b]} |f'(x)|.$$

Метод трапеций. Этот метод приближенного интегрирования обычно дает более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Дугу АВ кривой *y = f(x)* заменяют ломаной линией, вписанной в эту дугу. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x \text{....} В\, итоге \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots y_{n-1} \right) + R_n$$



Погрешность Δ от применения формулы трапеций оценивается по формуле: $R_n \le \frac{(\Delta x)^2}{12} \cdot (b-a) \cdot M_2$

где M_2 – максимальное значение модуля второй производной функции $y = f(x)$ на отрезке [а;в], т.е. $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$.

Метод парабол. Прежде чем формулировать этот метод, запишем две леммы.

Лемма 1.1. *Через любые три точки M_1 (x_1; y_1), M_2 (x_2; y_2), M_3 (x_3; y_3) с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида* $y = Ax^2+Bx+C$ (1)

Лемма 1.2. *Площадь s криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=Ax^2+Bx+C$, проходящей через точки M_1 (-h; y_1), M_2 (0, y_2), M_3 (h, y_3) выражается формулой* $s = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3)$ (2)

Сущность заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси OY.

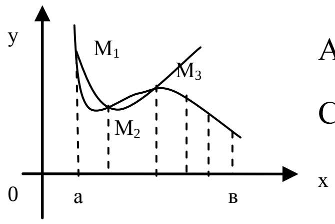
$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}))$ Если отрезок интегрирования делится на четное число равных частей, мы запишем формулу Симпсона иначе:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2})\right]$$

или, если $\sum_1 = y_0 + y_{2n}$; $\sum_2 = y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}$, $\sum_3 = y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}$, то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum\nolimits_1 + 4 \cdot \sum\nolimits_2 + 2 \cdot \sum\nolimits_3\right) + R_n$$

В формуле параболы значение функции f(x) в нечетных точках разбиения x_1, x_3, ..., x_{2n-1} имеет коэффициент 4, в четных точках x_2, x_4, ..., x_{2n-2} - коэффициент 2 и в двух граничных точках x_0=a, x_1, x_{2n} =b - коэффициент 1.



Абсолютное значение остаточного члена общей формулы Симпсона равно: $R_n \le \frac{\Delta x^4}{180}\cdot(b-a)\cdot M_3$, где $M_3 = \max\limits_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

В ряде случаев отыскание четвертой производной подынтегральной функции оказывается затруднительно. В этом случае для оценки погрешности вычисления интеграла по формуле Симпсона при выбранном шаге разбиения, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, если $n = 4k$, применяют специальный прием, называемый методом удвоения шага вычислений. Вычисляется приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона, в которой принять $\Delta x = \frac{b-a}{4k}$.. Назовем найденное значение интеграла I_1. Далее шаг Δx удваивается, и вычисление по формуле Симпсона проводится для шага $\Delta x = \frac{b-a}{2k}$, вновь найденное значение интеграла обозначается I_2. Погрешность второго вычисления приблизительно в 16 раз больше погрешности первого, и обе погрешности имеют одинаковый знак. Поэтому погрешность первого вычисления можно приблизительно определить по формуле: $\delta I_1 = \frac{I_1 - I_2}{15}$. Такой способ называют оценкой погрешности формулы Симпсона по методу удвоения шага вычислений.

Задачи для самостоятельного решения.

1.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int\limits_1^2 \frac{1}{2+x}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на 8 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

2.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

3.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей.

Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

4.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^2 \sqrt{x+5}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

Порядок выполнения

1.Изучить теоретический материал;

2.Выполнить практическое задание по вариантам

3.Ответить на вопросы для самоконтроля

Форма контроля

Оценка за выполнение практического задания, оценка за устный дифференцированный опрос.

Контрольные вопросы.

1. Дать определение понятию численное интегрирование.
2. Запишите формулу прямоугольников для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
3. Запишите формулу трапеций для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
4. Запишите формулу парабол для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?

Рекомендуемая литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.
2. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред.проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
3. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с