МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)
«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
_______________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОРГАНИЗАЦИИ И КОНТРОЛЮ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ПД.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 11.02.03 Эксплуатация оборудования радиосвязи и электрорадионавигации судов
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании

методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Разработано

На основе Федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования, утвержденым приказом Минобрнауки России от 17 мая 2012 г. № 413 с изменениями и дополнениями от 29 июня 2017 №613

Председатель МК

Е.А.Чекашова

Протокол от «29» мая 2019 г.

Авторы (составители): Гарифуллина Е.А., преподаватель высшей категории «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»,
Чернюк Л.А., преподаватель высшей категории «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент): Богданова Е.А., кандидат педагогических наук, доцент, преподаватель отдельной дисциплины (математика, информатика, ИКТ) филиала НВМУ (г.Мурманск)

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

А. Содержание

Лист ознакомления..4
Учет экземпляров 5
Учет корректуры...6
Введение. 7
Тематический план учебной дисциплины «Математика»**Ошибка! Закладка не определена.**
Порядок выполнения самостоятельной работы обучающимся 13
Раздел 1. Развитие понятия о числе. 13
Раздел 2. Корни, степени и логарифмы. 21
Раздел 3. Основы тригонометрии. 24
Раздел 4. Функции, их свойства и графики. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции. 32
Раздел 6. Векторы и координаты. 36
Раздел 7.. Уравнение прямой, окружности и плоскости в пространстве...........................42
Раздел 8. Уравнения и неравенства. 44
Раздел 9. Производная и её приложения. 66
Раздел 10. Интеграл и его приложения. 71
Раздел 11. Дифференциальные уравнения. 87
Раздел 13. Тела и поверхности вращения 89
Раздел 14. Измерения в геометрии. 94
Раздел 15. Элементы теории вероятности и математической статистики. 97

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата,

Учет экземпляров

Держатель контрольного экземпляра
Методический кабинет

Учтенные экземпляры

Место хранения учтенных экземпляров	№ экз.
Кабинет начальника отделения	02 (электронный вариант)

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Введение.

1.1 Методические указания по организации и контролю самостоятельной работы обучающихся по учебной дисциплине «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования, Приказа Министерства образования и науки РФ № 292 от 18 апреля 2013 г. «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по основным программам профессионального обучения»; рабочей программой учебной дисциплины «Математика» и предназначены для реализации государственных требований к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям технического профиля.

1.2 Цели и задачи самостоятельной работы.

Самостоятельная работа по дисциплине «Математика» осуществляется с целью выполнения следующих функций:

- развивающей (повышение культуры умственного труда, приобщение к творческим видам деятельности, обогащение интеллектуальных способностей обучающихся);
- информационно-обучающей;
- ориентирующей и стимулирующей (процессу обучения придается профессиональное ускорение);
- воспитывающей (формируются и развиваются профессиональные качества специалиста);
- исследовательской (новый уровень профессионально-творческого мышления).

Основные цели самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Математика»:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать нормативную, справочную документацию и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности обучающихся: творческой инициативы, самостоятельности мышления, ответственности и организованности;
- формирование способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- разрешение противоречий между трансляцией знаний и их усвоением во взаимосвязи теории и практики;
- развитие исследовательских умений.

Для достижения указанных целей, закрепления и систематизации изученного учебного материала, формирования и развития умений, навыков и компетенций, качественного овладения знаниями обучающиеся на основе тематического плана самостоятельной работы решают следующие задачи**:**

- изучают рекомендуемые источники;
- повторяют и изучают основные понятия теории дисциплины;
- отвечают на контрольные вопросы;
- развивают навык написания конспектов на заданную тему,
- составляют понятийный словарь учебного занятия;
- работают с памятками, ОСК;
- развивают навык написания обучающих и проверочных самостоятельных работ, тестовых заданий и пр.

1.3 Требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1. - владеть методами доказательств и алгоритмов решения;

У2. - проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

У3. - владеть стандартными приёмами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем;

У4. - использовать готовые компьютерные программы, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

У5. - моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

У6. - характеризовать поведение функций, использовать полученные знания для описания и анализа реальных зависимостей;

У7. - распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры;

У8. - применять изученные свойства геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

У9. - находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей;

У10. - находить и оценивать основные характеристики случайных величин по их распределению;

знать:

З1. - о математике как части мировой культуры;

З2. - о месте математики в современной цивилизации;

З3. - о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

З4. - о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления;

З5. - о возможности аксиоматического построения математических теорий;

З6. - основные методы доказательств и алгоритмов решения задач;

З7. - основные понятия, идеи и методы математического анализа;

З8. - основные понятия о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основные свойства;

З9. - о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер;

З10. - о статистических закономерностях в реальном мире;

З11. - основные понятия элементарной теории вероятностей.

Процесс изучения дисциплины «Математика» направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1).

Таблица 1 Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	Содержание компетенции	Требования к знаниям, умениям, практическому опыту
КК 1. Ценностно-смысловые компетенции.	Ориентироваться в окружающем мире и осознавать свою роль и предназначение; выбирать цели учебной деятельности, повседневной жизни; принимать решения	У 1,7 З 1-4
КК 2. Общекультурные компетенции.	Владеть эффективными способами организации свободного времени; знать и владеть бытовыми навыками;	У 1,5, 7 З 1-4
КК 3. Учебно-познавательные компетенции.	Приобретать знания из различных источников; грамотно формулировать образовательный запрос; использовать компьютерные технологии для поиска информации и её представления; планировать, анализировать свою работу; проявлять готовность к самообразованию;	У 1-10, З 1-11

КК 4. Информационно-коммуникативные компетенции.	Осуществлять поиск, отбор, систематизацию, анализ, обработку и сохранение информации; представлять информацию в различных формах (на рисунках, графиках, таблицах, чертежах, диаграммах и пр.); владеть современными информационными технологиями стандартного программного обеспечения; владеть техническими средствами информации: компьютер; владеть информационными технологиями: аудио- видеозапись, электронная почта, СМИ, Интернет; владеть навыками работы с документами;	У 4-8, З 6-11
КК 5. Социально-трудовые компетенции.	Знать права и обязанности в области профессионального самоопределения: осознание своей роли в профессиональном пространстве; оценка своих профессиональных потребностей и задатков; обладать навыками рациональной самоорганизации рабочего времени;	У 1,2,5, З 1-4
КК 6. Компетенции личного совершенствования.	планировать и организовывать свою деятельность; владеть способами развития личностных качеств: организованность, ответственность, креативность мышления; владеть навыками безопасной изнедеятельности;	У 1,2,5,9,10 З 3,9,10

2. Тематический план видов самостоятельной работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы	Самостоятельная работа обучающихся, час	Консультации, час
1	2	3	4
Раздел 1.	**Развитие понятия о числе**	**6**	
Тема 1.2.	**Погрешности приближений и вычислений.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Вычисление абсолютной и относительной погрешности при работе с приближенными вычислениями	4	
Тема 1.3	**Множество комплексных чисел.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Изображение комплексного числа на плоскости	2	
Раздел 2.	**Корни, степени и логарифмы.**	**4**	**2**
Тема 2.3.	**Логарифм числа.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Происхождение и роль логарифмов.	4	
Раздел 3	**Основы тригонометрии**	**10**	**2**
Тема 3.2..	**Формулы тригонометрии.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента	2	
	Самостоятельная работа обучающихся: Формулы вспомогательного угла	2	
Тема 3.3.	**Арксинус, арккосинус, арктангенс числа.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Арккотангенс числа	2	
Тема 3.4.	**Простейшие тригонометрические уравнения.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Простейшие тригонометрические уравнения вида $ctgx = a$	4	
Раздел 4	**Функции, их свойства и графики. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.**	**10**	
Тема 4.1.	**Числовая функция и её свойства. Обратная функция. Сложная функция.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Область определения и область значений обратной функции.	4	
Тема 4.5.	**Тригонометрические функции**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Гармонические колебания. Сложение гармонических колебаний	6	
Раздел 6	**Векторы и координаты.**	**10**	**2**
Тема 6.2.	**Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Действия над**		

	векторами, заданными координатами.		
	Самостоятельная работа обучающихся: Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Полярные координаты	6	
Раздел 7	**Уравнение прямой, окружности и плоскости в пространстве**	**3**	
Тема 7.1	**Уравнение прямой, окружности и плоскости в пространстве.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Уравнение плоскости в пространстве	3	
Раздел 8	**Уравнения и неравенства**	**26**	
Тема 8.1.	**Равносильность уравнений, неравенств и систем.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Метод Крамера.	6	
	Самостоятельная работа обучающихся: Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств.	4	
Тема 8.2.	**Иррациональные уравнения, системы, неравенства**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение иррациональных уравнений различными методами.	4	
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)}\ \phi\ g(x), \sqrt{f(x)} \geq g(x)$ и вида $\sqrt{f(x)}\ \pi\ g(x), \sqrt{f(x)} \leq g(x)$	4	
Тема 8.3.	**Показательные уравнения и системы, неравенства**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение показательно-степенных уравнений.	4	
Тема 8.5.	**Тригонометрические уравнения и системы, неравенства.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение трансцендентных логарифмических уравнений, тригонометрических уравнений, применяя свойства функций (ограниченности и монотонности), неравенство Коши.	4	
Раздел 9	**Производная и её приложения.**	**6**	**2**
Тема 9.1.	**Последовательность. Понятие о пределах последовательности, функции в точке, на бесконечности**.		
	Самостоятельная работа обучающихся: Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функций и их классификация	2	
	Самостоятельная работа обучающихся: Асимптоты. Использование асимптот при построении графиков функций	4	
Раздел 10	**Интеграл и его приложения.**	**8**	**2**
Тема 10.1.	**Первообразная функции. Неопределенный интеграл.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Приложение дифференциала к приближенным вычислениям	2	
Тема 10.2.	**Способы вычисления неопределенного интеграла**.		

	Самостоятельная работа обучающихся: Вычисление неопределённого интеграла некоторых тригонометрических функций.	4	
Тема 10.5.	**Приложение определенного интеграла для решения прикладных задач**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла	2	
Раздел 11	**Дифференциальные уравнения.**	**4**	
Тема 11.2.	**Дифференциальные уравнения II порядка. Задача Коши.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Решение задач естественнонаучного цикла на составление дифференциальных уравнений	4	
Раздел 13	**Тела и поверхности вращения.**	**4**	
Тема 13.1.	**Понятие тела вращения. Цилиндр, конус, шар, сфера.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Вписанная и описанная призма в цилиндр, конус, шар.	2	
	Самостоятельная работа обучающихся: Вписанная и описанная пирамида в цилиндр, конус, шар.	2	
Раздел 14	**Измерения в геометрии.**	**5**	**2**
Тема 14.5.	**Объем шара и площадь поверхности сферы.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Нахождение площади и объёма вписанной и описанной пирамиды в цилиндр, конус, шар.	3	
	Самостоятельная работа обучающихся: Нахождение площади и объёма вписанной и описанной пирамиды в цилиндр, конус, шар.	2	
Раздел 15	**Элементы теории вероятности и математической статистики.**	**1**	
Тема 15.1.	**Основные понятия комбинаторики.**		
	Самостоятельная работа обучающихся: Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.	1	
	Индивидуальный проект	**10**	
	ИТОГО	**107**	**12**

Порядок выполнения самостоятельной работы обучающимся

Раздел 1. Развитие понятия о числе.

Тема 1.2. Вычисление абсолютной и относительной погрешности при работе с приближенными вычислениями

Цель:

1. Познакомиться с формулами нахождения погрешностей при выполнении действий с приближенными числами;
2. Научиться применять формулы относительной и абсолютной погрешности при выполнении вычислений.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить материал по теме, составить краткий конспект
2. Произвести вычисления с приближенными числами и найти границы относительной и абсолютной погрешностей: $\dfrac{\sqrt{12{,}234} - 2{,}56 \cdot 7{,}2^3}{4{,}1872}$

Порядок выполнения задания.

1. На основании материала, представленного в пособии материала, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме.
2. Составить краткий конспект данного материала, используя вопросы для изучения.
3. Выполнить предложенное задание.

Вопросы для изучения:

1. Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности [1] с.26 - 30
2. Верные и значащие цифры. Запись приближенных значений. [1] с.30 - 32
3. Вычисление погрешностей величин и арифметических действий [1] с.33 - 35
4. Методы оценки погрешности приближенных вычислений [1] с.33 - 35

Приближенное значение величины. Абсолютная и относительная погрешности

Решение практических задач, как правило, связано с числовыми значениями величин. Эти значения получаются либо в результате измерения, либо в результате вычислений. В большинстве случаев значения величин, которыми приходится оперировать, являются приближенными.

Пусть X - точное значение некоторой величины, а x - наилучшее из известных ее приближенных значений. В этом случае погрешность (или ошибка) приближения x определяется разностью $X-x$. Обычно знак этой ошибки не имеет решающего значения, поэтому рассматривают ее абсолютную величину:

$$e_x = |X - x|. \qquad (1)$$

Величина e_x, называемая *абсолютной погрешностью* приближенного значения x, в большинстве случаев остается неизвестной, так как для ее вычисления нужно точное значение X. Вместе с тем, на практике обычно удается установить верхнюю границу абсолютной погрешности, т.е. такое (по возможности наименьшее) число Δx, для которого справедливо неравенство

$$\Delta x \geq |X - x|. \qquad (2)$$

Число Δx в этом случае называется *предельной абсолютной погрешностью,* или *границей абсолютной погрешности приближения x.*

Таким образом, предельная абсолютная погрешность приближенного числа x - это всякое число Δx, не меньшее абсолютной погрешности e_x этого числа.

Пример: Возьмем число $\pi = 3.14159265358...$. Если же вызвать π на индикатор 8-разрядного МК, получим приближение этого числа: $\pi' = 3.1415926.$ Попытаемся выразить абсолютную погрешность значения π': $e_{\pi'} = |\pi - \pi'| = 0{,}00000005358...$. Получили бесконечную дробь, не пригодную для практических расчетов. Очевидно, однако, что $e_{\pi'} < 0{,}00000006$, следовательно, число 0,00000006 = 0,6 * 10^{-7} можно считать предельной абсолютной погрешностью приближения π', используемого МК вместо числа π: $\Delta\pi' = 0{,}6 * 10^{-7}$.

Неравенство (2) позволяет установить приближения к точному значению X по недостатку и избытку:

$$x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x, \qquad (3)$$

которые могут рассматриваться как одна из возможных пар значений соответственно нижней границы (НГ) и верхней границы (ВГ) приближения x:

$$НГ_x = x - \Delta x; \;\; ВГ_x = x + \Delta x. \qquad (4)$$

Во многих случаях значения границы абсолютной ошибки Δx, так же как и наилучшие значения приближения x**,** получаются на практике в результате измерений. Пусть, например, в результате повторных измерений одной и той же величины x получены значения: 5,2; 5,3; 5,4; 5,3. В этом случае естественно принять за наилучшее приближение измеряемой величины среднее значение x**=**5,3. Очевидно также, что граничными значениями величины x в данном случае будут $НГ_X$= 5,2, $ВГ_X$ = 5,4, а граница абсолютной погрешности x может быть определена как половина длины интервала, образуемого граничными значениями $НГ_X$ и $ВГ_X$, т.е. $x = \frac{5,4 - 5,2}{2} = 0,1.$

По абсолютной погрешности нельзя в полной мере судить о точности измерений или вычислений. Качество приближения характеризуется величиной *относительной погрешности,* которая определяется как отношение ошибки e_x к модулю значения X(когда оно неизвестно, то к модулю приближения x).

Предельной относительной погрешностью (или *границей относительной погрешности)* δx приближенного числа называется отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения x:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|}. \qquad (5)$$

Формула (5) позволяет при необходимости выражать абсолютную погрешность через относительную:

$$\Delta x = |x| * \delta x. \qquad (6)$$

Относительную погрешность выражают обычно в процентах.

Пример Определим предельные погрешности числа x=3,14 как приближенного значения π. Так как π=3,1415926…., то $\Delta = |\pi\text{-}3,14| < 0,0015927 < 0,0016 = \Delta x$ по формуле связи получаем $\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \frac{0,0016}{3,14} < 0,00051$ таким образом $\Delta x = 0,0016; \delta x = 0,00051 = 0,51\%$

Верные и значащие цифры. Запись приближенных значений

Цифра числа называется *верной* (в широком смысле), если ее абсолютная погрешность не превосходит единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Пример. X=6,328 ΔX=0,0007 ΔX<0,001 следовательно цифра 8-верная

Пример: А). Пусть 0 = 2,91385, $\Delta a = 0.0097$. В числе a верны в широком смысле цифры 2, 9, 1.

Б) Возьмем в качестве приближения к числу π = 3,141592... число π' = 3,142. Тогда $|\pi - \pi'| < 0.001 = \Delta\pi'$, (рис.) откуда следует, что в приближенном значении π' = 3,142 все цифры являются верными.

В) Вычислим на 8-разрядном МК частное точных чисел 3,2 и 2,3, получим ответ: 1,3913043. Ответ содержит ошибку, поскольку

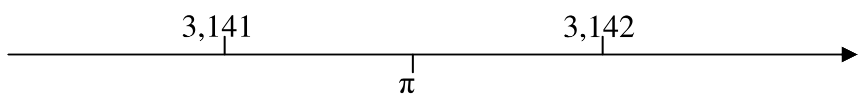


Рис. Приближение числа π

разрядная сетка МК не вместила всех цифр результата и все разряды начиная с восьмого были опущены. (В том, что ответ неточен, легко убедиться, проверив деление умножением: 1,3913043 2,3 = 3,9999998.) Не зная истинного значения допущенной ошибки, вычислитель в подобной ситуации всегда может быть уверен, что ее величина не превышает единицы самого младшего из изображенных на индикаторе разряда результата. Следовательно, в полученном результате все цифры верны.

Первая отброшенная (неверная) цифра часто называется *сомнительной.*

Говорят, что приближенное данное записано *правильно,* если в его записи все цифры верные. Если число записано правильно, то по одной только его записи в виде десятичной дроби можно судить о точности этого числа. Пусть, например, записано приближенное число a = 16,784, в котором все цифры верны. Из того, что верна последняя цифра 4, которая стоит в разряде тысячных, следует, что абсолютная погрешность значения a не превышает 0,001. Это значит, что можно принять $\Delta a = 0.001$, т.е. a = 16,784±0,001.

Очевидно, что правильная запись приближенных данных не только допускает, но и обязывает выписывать нули в последних разрядах, если эти нули являются выражением верных цифр. Например, в записи b = 109,070 нуль в конце означает, что цифра в разряде тысячных верна и она равна нулю. Предельной абсолютной погрешностью значения b, как следует из записи, можно считать $\Delta b = 0{,}001$. Для сравнения можно заметить, что значение c = 109,07 является менее точным, так как из его записи приходится принять, что $\Delta c = 0{,}01$.

Значащими цифрами в записи числа называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они расположены между значащими цифрами или стоят в конце для выражения верных знаков.

Пример а) 0,2409 - четыре значащие цифры; б) 24,09 - четыре значащие цифры; в) 100,700 - шесть значащих цифр.

Выдача числовых значений в ЭВМ, как правило, устроена таким образом, что нули в конце записи числа, даже если они верные, не сообщаются. Это означает, что если, например, ЭВМ показывает результат 247,064 и в то же время известно, что в этом результате верными должны быть восемь значащих цифр, то полученный ответ следует дополнить нулями: 247,06400.

В процессе вычислений часто происходит *округление чисел,* т.е. замена чисел их значениями с меньшим количеством значащих цифр. При округлении возникает погрешность, называемая погрешностью округления. Пусть x - данное число, а x_1 - результат округления. Погрешность округления определяется как модуль разности прежнего и нового значений числа:

$$\Delta_{окр} = |x - x_1|. \qquad (7)$$

В отдельных случаях вместо $\Delta_{окр}$ приходится использовать его верхнюю оценку.

Пример Выполним на 8-разрядном МК действие 1/6. На индикаторе высветится число 0,1666666. Произошло автоматическое округление бесконечной десятичной дроби 0,1(6) до числа разрядов, вмещающихся в регистре МК. При этом можно принять $\Delta_{окр} = 0{,}7 * 10^{-7}$.

Цифра числа называется *верной в строгом смысле,* если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, в котором стоит эта цифра.

Правила записи приближенных чисел.

1. Приближенные числа записываются в форме x ± Δx. Запись X = x ± Δx означает, что неизвестная величина X удовлетворяет следующим неравенствам: x-Δx <= X <= x+Δx

   При этом погрешность Δx рекомендуется подбирать так, чтобы

   а) в записи Δx было не более 1-2 значащих цифр;

   б) младшие разряды в записи чисел x и Δx соответствовали друг другу.

   Пример: 23,4±0,2 ; 2,730±0,017 ; -6,97±0,10.

2. Приближенное число может быть записано без явного указания его предельной абсолютной погрешности. В этом случае в его записи (мантиссе) должны присутствовать только верные цифры (в широком смысле, если не сказано обратное). Тогда по самой записи числа можно судить о его точности.

Пример. Если в числе A=5,83 все цифры верны в строгом смысле, то ΔA=0,005. Запись B=3,2 подразумевает, что ΔB=0,1. А по записи C=3,200 мы можем заключить, что ΔC=0,001. Таким образом, записи 3,2 и 3,200 в теории приближенных вычислений означают не одно и то же.

Цифры в записи приближенного числа, о которых нам неизвестно, верны они или нет, называются *сомнительными.* Сомнительные цифры (одну-две) оставляют в записи чисел промежуточных результатов для сохранения точности вычислений. В окончательном результате сомнительные цифры отбрасываются.

Округление чисел.

1. Правило округления. Если в старшем из отбрасываемых разрядов стоит цифра меньше пяти, то содержимое сохраняемых разрядов числа не изменяется. В противном случае в младший сохраняемый разряд добавляется единица с тем же знаком, что и у самого числа.
2. При округлении числа, записанного в форме x±Δx, его предельная абсолютная погрешность увеличивается с учетом погрешности округления.

Пример: Округлим до сотых число 4,5371±0,0482. Неправильно было бы записать 4,54±0,05 , так как погрешность округленного числа складывается из погрешности исходного числа и погрешности округления. В данном случае она равна 0,0482 + 0,0029 = 0,0511 . Округлять погрешности всегда следует с избытком, поэтому окончательный ответ: 4,54±0,06.

Пример Пусть в приближенном значении a = 16,395 все цифры верны в широком смысле. Округлим a до сотых: a_1 = 16,40. Погрешность округления $\Delta_{окр} = 0{,}005$. Для нахождения полной погрешности Δa_1, нужно сложить $\Delta_{окр}$ с погрешностью исходного значения a_1 которая в данном случае может быть найдена из условия, что все цифры в записи a верны: Δa_1 = 0,001. Таким образом, $\Delta a_1 = \Delta a + \Delta_{окр} = 0{,}001 + 0{,}005 = 0{,}006$. Отсюда следует, что в значении a_1 = 16,40 цифра 0 не верна в строгом смысле.

Вычисление погрешностей арифметических действий

1. **Сложение и вычитание**. Предельной абсолютной погрешностью алгебраической суммы является сумма соответствующих погрешностей слагаемых:

Ф.1 $$\Delta(X+Y) = \Delta X + \Delta Y, \qquad \Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y.$$

Пример. Даны приближенные числа X = 34,38 и Y = 15,23 , все цифры верны в строгом смысле. Найти $\Delta(X-Y)$ и $\delta(X-Y)$. По формуле Ф.1 получаем:

$\Delta(X-Y) = 0{,}005 + 0{,}005 = 0{,}01$.

Относительную погрешность получим по формуле связи:

$$\delta(X-Y) = \frac{\Delta(X-Y)}{|X-Y|};\ X-Y = 19{,}15 \quad и \quad \delta(X-Y) = \frac{0{,}01}{19{,}15} \approx 0{,}0005221 \le 0{,}0006 = 6\cdot 10^{-4}$$

2. **Умножение и деление.** Если $\delta X \ll |X|$ и $\delta Y \ll |Y|$, то имеет место следующая формула:

Ф.2 $$\delta(X\cdot Y) = \delta(X/Y) = \delta X + \delta Y.$$

Пример. Найти $\Delta(X\cdot Y)$ и $\delta(X\cdot Y)$ для чисел из предыдущего примера. Сначала с помощью формулы Ф.2 найдем $\delta(X\cdot Y)$:

$$\delta X = \frac{0{,}005}{34{,}38} = 0{,}00015, \qquad \delta Y = \frac{0{,}005}{15{,}23} = 0{,}00033,$$

$\delta(X\cdot Y) = \delta X + \delta Y = 0{,}00015 + 0{,}00033 = 0{,}00048$

Теперь $\Delta(X\cdot Y)$ найдем с помощью формулы связи:

$\Delta(X\cdot Y) = |X\cdot Y|\cdot\delta(X\cdot Y) = |34{,}38 \cdot 15{,}23|\cdot 0{,}00048 \le 0{,}26$.

3. **Возведение в степень и извлечение корня**. Если $\delta X \ll |X|$, то справедливы формулы Ф.3

Методы оценки погрешности приближенных вычислений

Существуют строгие и нестрогие методы оценки точности результатов вычислений.

1. **Строгий метод итоговой оценки**. Если приближенные вычисления выполняются по сравнительно простой формуле, то с помощью формул Ф.1-Ф.5 и формул связи погрешностей можно вывести формулу итоговой погрешности вычислений. Вывод формулы и оценка погрешности вычислений с ее помощью составляют суть данного метода.

Пример Значения a = 23,1 и b = 5,24 даны цифрами, верными в строгом смысле. Вычислить значение выражения $B = \dfrac{\sqrt{a}}{b \ln a}$.

С помощью МК получаем B = 0,2921247. Используя формулы относительных погрешностей частного и произведения, запишем:

$\delta B = \delta\left(\sqrt{a}\right) + \delta b + \delta(\ln a)$, т.е.

$$\delta B = \frac{1}{2}\delta a + \delta b + \frac{\delta a}{|\ln a|}.$$

Пользуясь МК, получим $\delta B = 0{,}0035$, что дает $\Delta B = B\delta B = 0{,}0008$. Это означает, что в результате две цифры после запятой верны в строгом смысле: B=0,29±0,001.

2. **Метод строгого пооперационного учета погрешностей**. Иногда попытка применения метода итоговой оценки приводит к слишком громоздкой формуле. В этом случае более целесообразным может оказаться применение данного метода. Он заключается в том, что оценивается точность каждой операции вычислений отдельно с помощью тех же формул Ф.1-Ф.5 и формул связи.

3. **Метод подсчета верных цифр**. Данный метод относится к нестрогим. Оценка точности вычислений, которую он дает, в принципе не гарантирована (в отличие от строгих методов), но на практике является довольно надежной. Суть метода заключается в том, что после каждой операции вычислений в полученном числе определяется количество верных цифр с помощью нижеследующие правил.

П.1. При сложении и вычитании приближенных чисел в результате верными следует считать, те цифры, десятичным разрядам которых соответствуют верные цифры во всех слагаемых. Цифры всех других разрядов кроме самого старшего из них перед выполнением сложения или вычитания должны быть округлены во всех слагаемых.

П.2. При умножении и делении приближенных чисел в результате верными следует считать столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное данное с наименьшим количеством верных значащих цифр. Перед выполнением этих действий среди приближенных данных нужно выбрать число с наименьшим количеством значащих цифр и округлить остальные числа так, чтобы они имели лишь на одну значащую цифру больше него.

П.3. При возведении в квадрат или в куб, а также при извлечении квадратного или кубического корня в результате следует считать верными столько значащих цифр, сколько имелось верных значащих цифр в исходном числе.

П.4. Количество верных цифр в результате вычисления функции зависит от величины модуля производной и от количества верных цифр в аргументе. Если модуль производной близок к числу 10k (k - целое), то в результате количество верных цифр относительно запятой на k меньше (если k отрицательно, то - больше), чем их было в аргументе. В данной лабораторной работе для определенности примем соглашение считать модуль, производной близким к 10k , если имеет место неравенство:

$0{,}2\cdot 10K < |f'(X)| \le 2\cdot 10k$.

П.5. В промежуточных результатах помимо верных цифр следует оставлять одну сомнительную цифру (остальные сомнительные цифры можно округлять) для сохранения точности вычислений. В окончательном результате оставляют только верные цифры.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Объясните, как вычисляется граница абсолютной погрешности суммы и разности приближенных значений чисел.
2. Расскажите, как вычисляется граница относительной погрешности суммы и разности приближенных значений чисел.
3. Запишите, как вычисляется граница абсолютной погрешности произведения и частного приближенных значений чисел.
4. Запишите, как вычисляется граница относительной погрешности произведения и частного приближенных значений чисел?.
5. Объясните, как вычисляется граница относительной погрешности степени приближенного значения числа?
6. Расскажите, как применяются «Правила подсчета цифр» при различных действиях.

Рекомендуемая литература.

1. Богомолов Н.В., Самойленко П.И., Математика: учебник для ссузов, Москва, Дрофа, 2013г., 395 стр..

Тема 1.3. Изображение комплексного числа на плоскости

Цель:

1. Познакомиться с геометрической интерпретацией комплексного числа;
2. Научиться изображать сумму и разность комплексных чисел в декартовой системе координат.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу.
2. Выполнить предложенные задания:

1) Найти сумму и разность двух комплексных чисел $z_1 = 3 - j, \quad z_2 = 1 - 2j$.

2) Найти модуль каждого из данных чисел.

Порядок выполнения задания.

1. На основании материала, представленного в пособии материала, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме.
2. Составить краткий конспект данного материала, используя вопросы для изучения.
3. Выполнить предложенное задание.

Вопросы для изучения:

1. Изображение комплексных чисел. [1] с.17, [2] с.18
2. Правила сложения и вычитания для комплексных чисел, заданных радиус-векторами. [2] с.20
3. Свойства радиус-векторов. Модуль комплексного числа. [2] с.19, [3] с.19
4. Как с помощью комплексных чисел удобно задавать геометрические фигуры на плоскости [1] с.19.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, как геометрически представляется комплексное число?
2. Дайте определение модуля комплексного числа.
3. Расскажите, как представляется геометрически сумма двух комплексных чисел.

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

2. Богомолов Н.В., Самойленко П.И., Математика: учебник для ссузов, Москва, Дрофа, 2013г., 395 стр..

3. Башмаокв М.И.: учебник/ М.И. Башмаков. – М.: КНОРУС, 2016. – 394с. – (Начальное и среднее профессиональное образование).

Раздел 2. Корни, степени и логарифмы.

Тема 2.3. Происхождение и роль логарифмов.

Цель:

1. Познакомиться с историей появления логарифмов;

2. Найти области применения логарифмов.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.

2. Составить краткий конспект данного материала, используя вопросы для изучения.

Вопросы для изучения:

1. История появления логарифмов .[1] стр. 35; .[4] стр. 65-75.

2. Приложение логарифмов .[1] стр. 36.

Первые логарифмические таблицы. были составлены независимо друг от друга Дж. Непером и швейцарским математиком И. Бюрги. Таблицы Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614) и «Устройство удивительной таблицы логарифмов» (1619) содержали 8-значные логарифмы синусов, косинусов и тангенсов для углов от 0° до 90°, следующих через одну минуту. Т. к. синус 90° тогда принимали равным 107, а на него часто приходилось умножать, то Непер определил свои логарифмы, так, что логарифм 107 был равен нулю. Логарифмы остальных синусов, меньших 107, у него положительны. Непер не ввёл понятия об основании системы логарифмов. Его логарифм числа N в современных обозначениях приблизительно равен. Свойства логарифмов Непера несколько сложнее обычных, т. к. у него логарифм единицы отличен от нуля.

«Арифметические и геометрические таблицы прогрессий» (1620) Бюрги представляют собой первую таблицу антилогарифмов («чёрные числа») и дают значения чисел, соответствующих равноотстоящим логарифмам («красным числам»). «Красные числа» Бюрги суть логарифмы поделенных на 108 «чёрных чисел» при основании, равном

Таблицы Бюрги и особенно Непера немедленно привлекли внимание математиков к теории и вычислению логарифмов. По совету Непера английский математик Г. Бриггс вычислил 8-значные десятичные логарифмы (1617) от 1 до 1000 и затем 14-значные (1624) от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000 (по его имени десятичные логарифмы иногда называют бриговыми). 10-значные таблицы от 1 до 100 000 издал голландский математик А. Влакк (1628). Таблицы Влакка легли в основу большинства последующих таблиц, причём их авторы внесли много изменений в структуру Л. т. и поправок в выкладки (у самого Влакка было 173 ошибки, у австрийского математика Г. Вега в 1783 — пять; первые безошибочные таблицы выпустил в 1857 немецкий математик К. Бремикер). В России таблицы логарифмов впервые были изданы в 1703 при участии Л. Ф.Магницкого. Таблицы т. н. гауссовых логарифмов были опубликованы в 1802 итальянским математиком З. Леонелли; К. Ф.Гаусс ввёл (1812) эти логарифмы в общее употребление.

2. Логарифмическая линейка.

3. Логарифмы в физике.

- Громкость звука;

- яркость звёзд;

Астрономы делят звезды по степени яркости на видимые и абсолютные звездные величины - звезды первой величины, второй, третьей и т. д. Во II веке до н.э. Гиппарх разделил звезды на 6 групп. Самые яркие – звезды 1-ой величины, самые слабые – 6-ой величины. Последовательность видимых звездных величин, воспринимаемых глазом, представляет собой арифметическую прогрессию. Но физическая их яркость изменяется по иному закону: яркости звезд составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собой логарифм ее физической яркости, т. е. оценивая яркость звезд, астроном оперирует таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5. В 1856 году Н. Погсон предложил формулу для шкалы звёздных величин. Видимая звёздная величина определяется по формуле: $m = -2{,}5 \lg I + C$, где I — световой поток от объекта, C — постоянная величина. Помимо шкалы звездных величин, мы узнали, что логарифмы используются и для определения уровня астероидной опасности.

- шкала Рихтера;

- барометрическая шкала

Зависимость давления атмосферы p (в сантиметрах ртутного столба) от выраженной в километрах высоты h над уровнем моря выражается $p = 76 \cdot 2{,}7^{-\frac{h}{8}}$. Высота над уровнем моря вычисляется по формуле $h = \dfrac{8000}{0{,}4343} \lg \dfrac{p_0}{p}$, где p_0 - давление на уровне моря, p – давление на высоте h

4. Химическая шкала кислотности.

5. Психологическая шкала.

Психические шкалы, определяющие силу наших эмоций, также имеют логарифмический характер.

В качестве общеизвестного примера начнем со «шкалы Ландау», по которой наш знаменитый физик оценивал заслуги своих коллег. Вот как об этом вспоминает академик В. Л. Гинзбург: «… Ландау имел «шкалу заслуг» в области физики. Шкала была логарифмическая (классу 2 отвечали достижения в 10 раз меньше, чем для класса 1). Из физиков нашего века класс 0,5 имел только Эйнштейн, к классу 1 относились Бор, Дирак, Гейзенберг и ряд других…»

Другие ученики великого физика рассказывают о шкале Ландау немного иначе: «Ландау присваивал великим ученым-физикам всего мира «звездные» номера. Вы знаете, что звезда первой величины — это очень яркая звезда, звезда второй величины — менее яркая и т.д. Эйнштейну, Бору и Ньютону Ландау присвоил половинную величину — 0,5. Дирак, Гейзенберг — это звезды первой величины. Себе он присваивал вторую величину».

Остается неясным, логарифм, по какому основанию — 10 или 2,512… — использовал Лев Ландау для определения уровня гениальности физиков-теоретиков. Несомненно, лишь одно: для этих сугубо эмоциональных, субъективных оценок он использовал логарифмическую шкалу.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Назовите, кто является «отцом» создания логарифмов.
2. Расскажите, что представляет собой логарифмическая линейка?
3. Объясните, как измеряется громкость звука? Приведите конкретные примеры.
4. Расскажите о химической шкале кислотности.
5. Объясните, что такое психологическая шкала?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

2. Физика. 11 класс: учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе: базовый и профил. уровни/ Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев, В.М. Чаругин; под ред. Н.А. Парфентьевой. 23 – е изд.- М.: Просвещение, 2014.- 399с.

3. Журнал «Квант» № 2. 2007 г.

4. Г.И. Глейзер. История математики в школе. 7- 8 класс. М. «Просвещение», 2008 г

Раздел 3. Основы тригонометрии.

Тема 3.2. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Цель:

1. Вывести формулы выражения тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента;
2. Научиться применять данные формулы для решения задач.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные примеры

№ 1. Выразить выражение $y = 4\sin x - 2\cos x + 5$, используя функции от $tg\frac{x}{2}$.

№ 2. Найти $\sin\alpha - \cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2} = 6$.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме.
2. Составить краткий конспект данного материала.[1] стр.104, используя вопросы для изучения.
3. Решить предложенные примеры:

Вопросы для изучения:

1. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента.

Из формул двойных углов $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ можно получить формулы для синуса и косинуса половинного угла.

Сначала запишем: $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.Затем в этих формулах подставим $\frac{\alpha}{2}$ вместо α .Получим: $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$

Извлекая корень, получим: $\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$, с $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$.

Для того, чтобы раскрыть модули, надо знать, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.

Обилие тригонометрических формул связано с тем, что между основными тригонометрическими функциями – синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом – есть соотношения, которые позволяют по-разному написать одно и то же выражение. Возникает вопрос: нельзя ли выбрать одну какую-нибудь функцию и через нее выражать все остальные? Если в качестве такой функции мы выберем синус, то во многих формулах появятся квадратные корни. Так, например, выражая $\sin 2\alpha$ через $\sin\alpha$ мы получим

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\left(\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}\right)$. Такие формулы неудобны. Оказывается, что все тригонометрические функции от аргумента x (и от $nx,\ n \in Z$) выражаются через тангенс угла $\frac{x}{2}$ рационально, т.е. без квадратных корней. Выведем эти полезные функции. Напишем формулы двойного угла для исходного угла $\frac{x}{2}$.

$$sin\ x = 2\,sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2},\quad cos\ x = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}.$$

Представим число *1* в виде $1=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}$ и поделим на это выражение правые части последних формул: $\sin x = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$, $\quad \cos x = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}$.

Поделим теперь числитель и знаменатель каждой дроби на $\cos^2\frac{x}{2}$ и заменим дробь $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ на $tg\frac{x}{2}$. $\sin x = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$, $\quad \cos x = \dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$.

Пользуясь этими формулами, можно функцию вида $y=a\sin x+b\cos x$ представить в виде рациональной функции от $tg\frac{x}{2}$.

№ 1. Выразить $y=2\sin x+3\cos x-1$ в виде функции от $tg\frac{x}{2}$

$$2\,sin\ x + 3\,cos\ x - 1 = 2\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + 3\cdot\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{4tg\frac{x}{2}+3-3tg^2\frac{x}{2}-1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{-4tg^2\frac{x}{2}+4tg\frac{x}{2}+2}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

№ 2. Найти $\sin\alpha+\cos\alpha$, если $tg\frac{\alpha}{2}=3$

Решение: $\sin\alpha = \dfrac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6$, $\cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{1-9}{1+9} = -0{,}8$.

$\sin\alpha+\cos\alpha = 0{,}6-0{,}8 = -0{,}2$

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Выведите формулу синуса острого угла через тангенс половинного угла.
2. Выведите формулу косинуса острого угла через тангенс половинного угла.

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

2. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического ана-лиза, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2009.

3. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математиче-ского анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2010.

Тема 3.2. Формулы вспомогательного угла

Цель:

1. Познакомиться с понятием – гармонические колебания
2 Вывести формулы вспомогательного угла.
2. Научиться применять данные формулы для решения задач.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы и представленного материала, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме.
2. Решить предложенный пример

№ 1. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $y = 4\sin x - 3\cos x$, используя формулы вспомогательного угла.

Порядок выполнения задания.

1. Познакомиться с понятием – гармонические колебания [1] стр. 106
2. Преобразование тригонометрических выражений с помощью формул вспомогательного угла
3. Разобрать по предложенным материалам вывод формул.
4. Разобрать решенный пример на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.
5. Составить краткий конспект изученного материала.
6. Решить задание.

Рассмотрим метод введения дополнительного угла на примере решения следующей задачи.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x + \cos x$ (1)

Решение. Заметив, что $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4}$, преобразуем правую часть формулы (1):

$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos x\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Отсюда вытекает, что выражение (1) можно переписать в виде: $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

Т.к. $-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$, причем $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad \sin\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, то $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$. Следовательно, $-\sqrt{2}\le y=\sin x+\cos x\le\sqrt{2}$

Ответ. Наибольшее значение функции (1) равно $\sqrt{2}$, наименьшее значение функции (1) равно -$\sqrt{2}$

Замечание. В рассмотренной задаче угол $\frac{\pi}{4}$ и является **дополнительным углом**.

Теперь докажем **формулу дополнительного угла (вспомогательного аргумента)** в общем виде. Для этого рассмотрим выражение $\boldsymbol{a}$ **sin** $\boldsymbol{x}$ **+** $\boldsymbol{b}$ **cos** $\boldsymbol{x}$ (2), *где a и b* – произвольные, отличные от нуля числа, и преобразуем его:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\qquad(3)$$

Введем **дополнительный угол** ***(вспомогательный аргумент)*** *φ,* у которого*:*

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\[2mm]\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}\qquad(4)$$

В случае, когда *a* и *b* являются положительными числами, в качестве дополнительного угла можно взять, например, угол $\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Тогда выражение (3) принимает вид:

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos x\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi\right)=$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$$

Таким образом, мы получили формулу $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(x+\varphi)$, которую и называют **формулой дополнительного угла (вспомогательного аргумента).**

Если же дополнительный угол, в отличие от формул (4), ввести по формулам:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$, то выражение (3) примет вид

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos x \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin x \sin\varphi + \cos x \cos\varphi\right) =$$ и

$$= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$$

мы получаем **другой вид формулы дополнительного угла**: $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Выведите формулу вспомогательного (дополнительного) угла..
2. Расскажите, что такое гармонические колебания

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

Тема 3.3. Арккотангенс числа.

Цель:

1. Познакомиться с понятием арккотангенс числа;
2. Научиться применять арккотангенс числа для преобразования выражений.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу
2. Решить предложенные примеры.

№1. Вычислите: $1)2\arccos\frac{1}{2} - 3arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$ $2)ctg(\pi + arcctgx)$ $3)arcctg\left(tg\frac{2\pi}{5}\right)$.

№ 2. Решить уравнение: $arcctg(-3x) = \frac{\pi}{4}$.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.

2. Составить краткий конспект данного материала.

3. Разобрать предложенные примеры и записать в конспект.

Вопросы для изучения:

1. Изучите понятие арккотангенса. График функции арккотангенс. [2] стр. 247-249, [4] стр. 154.

2. Метод вспомогательного треугольника [2] стр. 250.

3. Применение арккотангенса для решения выражений. [3] стр. 85.

4. Решить примеры:

№1. Вычислите: $1) 2\arccos\frac{1}{2} - 3arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$ $2) ctg(\pi + arcctgx)$ $3) arcctg\left(tg\frac{2\pi}{5}\right)$.

№ 2. Решить уравнение: $arcctg(-3x) = \frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим некоторые примеры.

№ 1. Вычислить $A = \sin\left(\frac{1}{2}arcctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение: Пусть $arcctg\left(-\frac{3}{4}\right) = \varphi$, тогда $ctg\varphi = -\frac{3}{4}$. Угол φ заключен между 90^0 и 180^0, т.к. главное значение арккотангенса находится между 0^0 и 180^0. Найдем $\sin\frac{\varphi}{2}$ по формуле $\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$, где из двух знаков ± надо взять только знак плюс (т.к. угол $\frac{\varphi}{2}$ принадлежит первой четверти). Сначала найдем $\cos\varphi$ по формуле $\cos\varphi = \frac{ctg\varphi}{\pm\sqrt{1+ctg^2\varphi}}$:

$\cos\varphi = \frac{-\frac{3}{4}}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}$. Перед радикалом берем только знак плюс, т.к. угол принадлежит 2 четверти. Вычислим: $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{5}\right)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $A = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

№ 2. Вычислить: $\sin(arcctg(-3))$.

Решение: $\sin(arcctg(-3)) = \sin(\pi - arcctg3) = \sin(arcctg3)$. Пусть $arcctg3 = \alpha, \alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, $ctg\alpha = 3$. Запишем $1+ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, тогда $\sin^2\alpha = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$.

Т.к. $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

1. Решить примеры:

№1. Вычислите: $1) 2\arccos\frac{1}{2} - 3arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}$ $2) ctg(\pi + arcctgx)$ $3) arcctg\left(tg\frac{2\pi}{5}\right)$.

№ 2. Решить уравнение: $arcctg(-3x) = \frac{\pi}{4}$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Дайте определение арккотангенса.
2. Изобразите график арккотангенса.
3. Перечислите свойства арккотангенса.

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.
2. М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. «Математика. Алгебра и начала анализа. Про-фильный уровень. Учебник 10 класса». М. Бином. Лаборатория знаний. 2007.
3. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического ана-лиза, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2009.
4. Е.П. Нелин. Алгебра и начала анализа: двухуровневый учебник для 10 кл..НМЦ «Мир детства» ООО, 2006 г.

Тема 3.4. Простейшие тригонометрические уравнения вида

Цель:

1. Научиться решать тригонометрические уравнения вида $ctgx = a$.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу.
2. Решить уравнения: $1) ctg(x-3) = 0$ $2) \sqrt{3}ctg\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = 3$ $3) 4ctg\left(\frac{3x}{2} - 1\right) - 3 = 0$.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решить уравнения:

Вопросы для изучения:

1. Графическое решение уравнения $ctgx = a$.

2. Формула для решения уравнения вида $ctgx = a$.[1] стр. 164

3. Решить уравнения: $1)ctg(x-3)=0$ $2)\sqrt{3}ctg\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)=3$ $3)4ctg\left(\frac{3x}{2}-1\right)-3=0$

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Перечислите способы решения уравнения, содержащего функцию котангенса.

Рекомендуемая литература.

1. Е.П. Нелин. Алгебра и начала анализа: двухуровневый учебник для 10 кл. НМЦ «Мир детства» ООО, 2016 г.
2. М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. «Математика. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Учебник 10 класса». М. Бином. Лаборатория знаний. 2013.
3. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2009.
4. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2008г.

Раздел 4. Функции, их свойства и графики. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

Тема 4.1. Область определения и область значений обратной функции.

Цель:

1. Дать определение обратной функции;

2. Изучить свойства обратной функции.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу

2. Выполнить предложенные задания.

№ 1. Найти функцию, обратную к заданной и построить график: а) $y = \frac{x-1}{2}$

б) $y=\sqrt{1-x^2}, x\in[0;1]$ в) $y=\dfrac{1}{1+x^2}, x\in(-\infty;0)$.

№ 2. Найти область определения и область значений для функций: $y=\dfrac{x}{x+1}$, $y=\dfrac{x}{x-1}$.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Определение обратимой функции. [1] стр.197.
2. Понятие обратной функции. Свойства обратной функции [1] стр.129, 132; [2] стр.197, [2] стр.72.
3. Понятие взаимообратной функции. Понятие .композиции. [1] стр.130, [3] стр.75.
4. Решить предложенные примеры.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Дать определение обратной функции.
2. Расскажите, что такое композиция функций.
3. Расскажите, как изменяется область определения и область значения у взаимообратных функций?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.
2. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математического анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2012
3. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2009.

Тема 4.5. Гармонические колебания. Сложение гармонических колебаний

Цель:

1. Познакомиться с понятием гармонические колебания одного направления;
2. Научиться складывать гармонические колебания.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу

Порядок выполнения задания.

1. Изучите теоретические вопросы по данной теме, предложенные в пособии.[1] стр. 128.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Колеблющееся тело может принимать участие в нескольких колебательных процессах, тогда следует найти результирующее колебание, другими словами, колебания необходимо сложить. Будем складывать гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты $\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$. Применим метод вращающегося вектора амплитуды, построим графически векторные диаграммы этих колебаний (рис. 1). Тах как векторы **A₁** и **A₂** вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0, то разность фаз (φ_2 - φ_1) между ними будет оставаться постоянной. Значит, уравнение результирующего колебания будет $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ (1). В формуле (1) амплитуда А и начальная фаза φ соответственно определяются выражениями $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$(2); $tg\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$ Значит, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает при этом также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз (φ_2 - φ_1) складываемых колебаний.

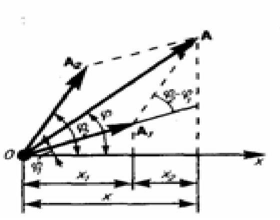


Рис.1

Исследуем выражение (2) в зависимости от разности фаз (φ_2 - φ_1):

1) φ_2 - φ_1 = ± $2m\pi$ (m = 0, 1, 2, ...), тогда $A=A_1+A_2$, т. е. амплитуда результирующего колебания А будет равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2) φ_2 - φ_1 = $\pm(2m+1)\pi$ (m = 0, 1, 2, ...), тогда $A=|A_1-A_2|$, т. е. амплитуда результирующего колебания будет равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики представляет особый интерес случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. После сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, которые возникают при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны А, а частоты равны ω и ω+Δω, причем Δω<<ω. Выберем начало отсчета так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю: $\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega \cdot t \\ x_2 = A_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$.

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором сомножителе Δω/2<<ω, получим $x = \left(2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\omega \cdot t$ (3) Результирующее колебание (3) можно считать как гармоническое с частотой ω , амплитуда A_σ которого изменяется по следующему периодическому закону: $A_\delta = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$ (4). Частота изменения A_σ в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $\omega_\delta = \Delta\omega$. Период биений $T_\delta = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$.Вид зависимости (3) показан на рис. 2, где сплошные жирные линии представляют график результирующего колебания (3), а огибающие их линии - график медленно меняющейся согласно уравнению (4) амплитуды.

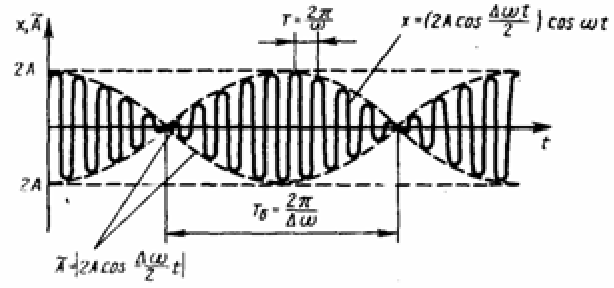


Рис. 2

Нахождение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее часто используемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений применяется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д. При исследовании сложного колебательного процесса нужно знать, что любые сложные периодические колебания $s = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции (наложения) одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, которые кратны циклической частоте ω_0 :

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 (2\omega_0 t + \varphi_2) + ... + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$ (5) Представление в виде (5) любой периодической функции связывают с понятием **гармонического анализа сложного периодического колебания**, или **разложения Фурье**. Слагаемые ряда Фурье, которые определяют гармонические колебания с частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$, ..., называются **первой** (или **основной**), **второй**, **третьей** и т. д. **гармониками** сложного периодического колебания.

3. Составить краткий конспект данного материала.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самоконтроля и проверки:

1. Расскажите, что значит совершить сложение гармонических колебаний.
2. Запишите формулу сложения гармонических колебаний.
3. Дайте определение гармоники.
4. Расскажите, что такое частота колебаний, биение?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.
2. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала анализа, Учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений – Москва: Просвещение, 2015 г.
3. Богомолов Н.В., Самойленко Н.В., Математика, Учебник для ссузов – Москва: Дрофа, 2002 г.
4. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – Ростов н/Д: Феникс, 2008 г.
5. Омельченко В.П., Математика: учебное пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2009 г..

Раздел 6. Векторы и координаты.

Тема 6.2. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Цель:

1. Научиться решать стереометрические задачи координатно- векторным методом.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу
2. Решить предложенные задачи.

№ 1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = 0,5\ AA_1$. Найдите угол между прямыми BD и CD_1.

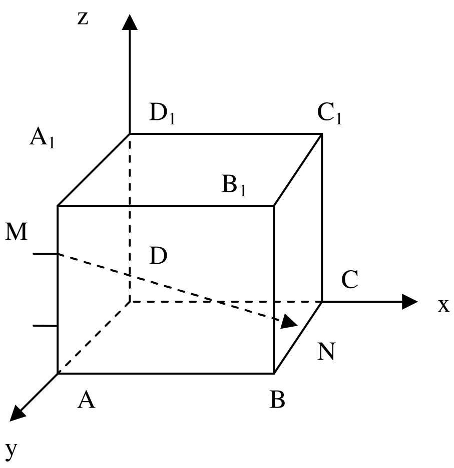
№ 2. В тетраэдре DABC DA= 5 см, AB = 4 см, AC = 3 см, < DAB = 60^0, <BAC = $90^{0.}$ Найдите расстояние от вершины A до точки пересечения медиан треугольника DBC.

Порядок выполнения работы

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.[1] §19п. 169 стр. 51, §20 п. 170 стр. 52-53.
2. Изучить решение задачи
3. Решить предложенные задачи:

Вопросы для изучения:

1. Выпишите формулы для нахождения расстояния между точками и координаты середины отрезка. .[1] §19п. 158, 159 стр. 40 - 41.
2. Запишите формулы для нахождения координат вектора в пространстве. .[1] §19п. 169 стр. 51.
3. Изучите понятие скалярного произведения векторов в пространстве и запишите формулу. .[1] §19п. 170стр. 52.
4. Разберите предложенную задачу: В кубе ABCDA1B1C1D1 точка M лежит на ребре AA1, причем AM:MA1, а точка N- середина ребра BC. Вычислите косинус угла между прямыми MN и DD1.



Решение: Введем систему координат так, как показано на рисунке 1. Рассмотрим направляющие векторы $\vec{DD_1}$ и $\vec{MN}$ прямых DD_1 и MN. Пусть единица измерения отрезков выбрана так, что $AA_1 = 4$, тогда $M(0;\ 4;\ 3)$, $N\ (4;\ 2;\ 0)$, $\vec{MN}(4;-2;-3)$, $\vec{DD_1}(0;0;4)$. .

Используя векторы $\vec{DD_1}$ и $\vec{MN}$, находим косинус угла φ между прямыми DD_1 и MN: $\cos\varphi = \dfrac{|4\cdot 0 - 2\cdot 0 - 3\cdot 4|}{\sqrt{16+4+9}\cdot\sqrt{16}} = \dfrac{3}{\sqrt{29}}$

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = BC = 0,5\ AA_1$. Найдите угол между прямыми BD и CD_1.
2. В тетраэдре DABC DA= 5 см, AB = 4 см, AC = 3 см, $< DAB = 60^0$, $<BAC = 90^0$. Найдите расстояние от вершины А до точки пересечения медиан треугольника DBC.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, в чем заключается применение координатного метод для решения задач на нахождение угла между прямыми.

Рекомендуемая литература:

1. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. Для 7-11 кл. общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 2015г.

2. Богомолов Н.В., Самойленко Н.В., Математика, Учебник для ссузов – Москва: Дрофа, 2010 г.

3. Башмаков М.И., Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования/М.И. Башмаков. – 9 е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 256с.

Тема 6.2. Полярные координаты

Цель:

1. Познакомиться с понятием полярной системы координат.
2. Научиться решать типовые задачи на применение полярной системы координат.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить конспект по изученному материалу.
2. Разобрать типовые задачи.

Порядок выполнения задания.

1. Изучите теоретические вопросы по данной теме, предложенные в пособии. Составить краткий конспект.
2. Записать типовые задачи и составить и решить свою задачу.

Система координат - комплекс определений, реализующий метод координат, то есть способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Совокупность чисел, определяющих положение конкретной точки, называется координатами этой точки.

Основные системы координат:

- Полярная система координат
- Прямоугольная система координат
- Цилиндрическая система координат
- Сферическая система координат

Расположение точки *P* на плоскости определяется **декартовыми координатами** с помощью пары чисел (x, y):

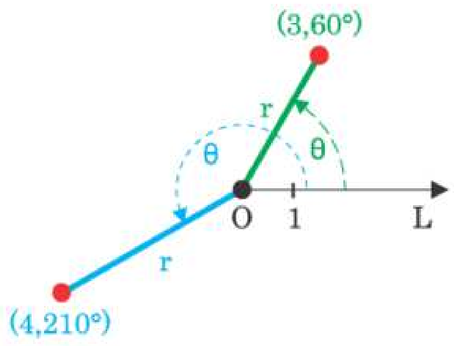
- x — расстояние от точки P до оси y с учетом знака
- y — расстояние от точки P до оси x с учетом знака

В пространстве же необходимо уже 3 координаты (x, y, z):

- x — расстояние от точки P до плоскости yz
- y — расстояние от точки P до плоскости xz

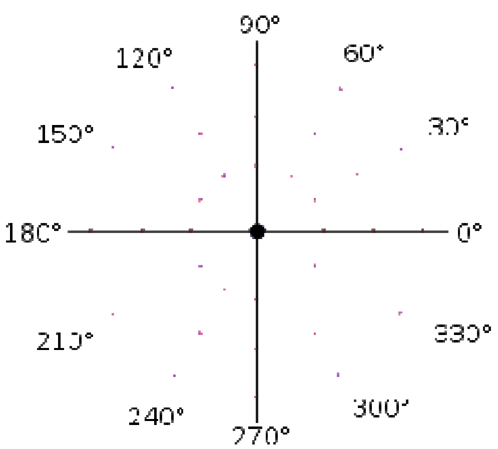
- z — расстояние от точки P до плоскости xy

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.



Полярная система координат особенно полезна в случаях, когда отношения между точками проще изобразить в виде радиусов и углов; в более распространённой, декартовой или прямоугольной системе координат, такие отношения можно установить только путём применения тригонометрических уравнений

Полярная система координат задаётся лучом, который называют нулевым или полярной осью. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или полюсом. Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: радиальной и угловой. Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат. Угловая координата, также называется полярным углом и обозначается φ, равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку. Определённая таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°. Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также разрешить ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.

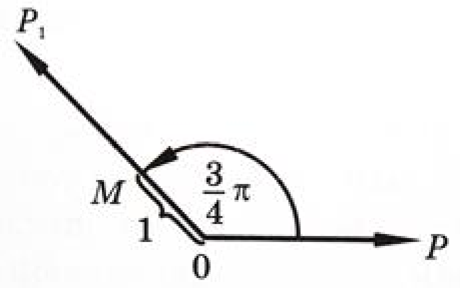


Полярная сетка, на которой отложено несколько углов с пометками в градусах. Пару полярных координат r и φ можно перевести в Декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi,$ в то время как две декартовы координаты x и y могут быть переведены в полярную координату r: $r^2 = y^2 + x^2$ (по теореме Пифагора).

Типовые задачи

Пример 1. Построить в полярной системе координат точку $M(1, 3\pi/4)$.

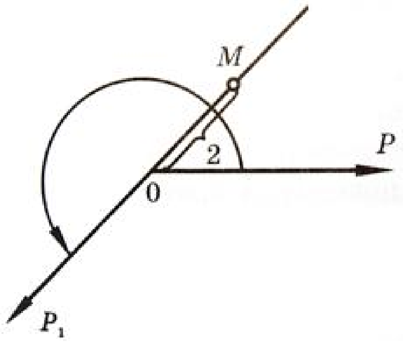
Решение.



Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{3\pi}{4}$ к полярной оси (положительное направление указано стрелкой) и отложим от полюса в положительном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный одной единице. Конец этого отрезка M и будет искомой точкой.

Пример 2. Построить в полярной системе координат точку $M(-2, 5\pi/4)$.

Решение.



Проведем через полюс O ось OP_1 под углом $\frac{5\pi}{4}$ к полярной оси (положительное направление на ней указано стрелкой) и отложим от полюса в отрицательном направлении оси OP_1 отрезок OM, равный двум единицам. Конец этого отрезка и будет искомой точкой.

Пример 3. Прямоугольные координаты точки $A(2, 3)$. Найти ее полярные координаты.

Решение. По формулам

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\cos\varphi = \dfrac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$ получаем $r = \pm\sqrt{13}$. Выбираем по нашему усмотрению знак перед корнем, например, плюс. Тогда $r = +\sqrt{13}$, $\sin\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Так как $\sin\varphi > 0$ и $\cos\varphi > 0$, то угол φ находится в первой четверти. На основании формулы $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ $tg\varphi = \dfrac{3}{2}$;

по таблицам находим, что $\varphi = 0{,}98$. Полярные координаты точки A найдены: $r = \sqrt{13}$, $\varphi = 0{,}98$ или $A(\sqrt{13};\ 0{,}98)$. Постройте точку. Если бы перед корнем был выбран знак минус, то тогда $r = -\sqrt{13}$, $\sin\varphi = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\cos\varphi = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, и так как $\sin\varphi < 0$ и $\cos\varphi < 0$, то угол φ находится в третьей четверти. Зная, что $tg\varphi = \dfrac{3}{2}$, получаем $\varphi = 4{,}12$, а точка A имеет полярные координаты $r = -\sqrt{13}$, $\varphi = 4{,}12$: $A(-\sqrt{13};\ 4{,}12)$.

Пример 4. Найти прямоугольные координаты точки *A*, полярные координаты которой (2, π/4).

Решение.

По формулам перехода $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

получаем $x = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ x = \sqrt{2},\ y = 2\sin\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},\ y = \sqrt{2}.$

Пример 5. Найти прямоугольные координаты точки, полярные координаты которой *A*(-3, 5π/4).

Решение. $x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$

$$x = -3\cos\frac{5}{4}\pi,\ \ y = -3\sin\frac{5}{4}\pi,\ \ x = \frac{3\sqrt{2}}{2},\ \ y = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, что представляет собой полярная система координат.
2. Поясните, как можно полярные координаты перевести в декартовые.

Рекомендованная литература

1. Н.В.Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.

Раздел 7.. Уравнение прямой, окружности и плоскости в пространстве

Тема 7.1. Уравнение плоскости в пространстве

Цель:

1. Познакомиться с понятием полярной системы координат.
2. Научиться решать типовые задачи на применение полярной системы координат.

Оснащение:

1. Данные методические указания, рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучите теоретические вопросы по данной теме, предложенные в пособии. Составить краткий конспект.
2. Разобрать типовые задачи.

Порядок выполнения задания.

1. Общее уравнение плоскости. Особые случаи задания плоскости [1] п.3.5.1. стр. 64
2. Уравнение плоскости в «отрезках» [1] п.3.5.2. стр. 64
3. Нормированное уравнение плоскости [1] п.3.5.3. стр. 65.
4. Разобрать и записать типовые задачи.

Пример 1.. Составьте уравнение плоскости, зная, что точка A (1,-1,3) служит основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости.

Решение. По условию задачи вектор **OA**(1,-1,3) является нормальным вектором плоскости, тогда ее уравнение можно записать в виде x-y+3z+D=0. Подставив координаты точки A (1,-1,3), принадлежащей плоскости, найдем D: $1-(-1)+3\cdot 3+D = 0 \Rightarrow D = -11$. Итак, x-y+3z-11=0.

Пример 2.. Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и образующей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z-7=0$ угол 60^o.

Решение. Плоскость, проходящая через ось Oz, задается уравнением Ax+By=0, где A и B одновременно не обращаются в нуль. Пусть B неравно 0, A/Bx+y=0. По формуле косинуса угла между двумя плоскостями

$$\frac{2m+1}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{10}} = \cos 60^\circ,\ \text{где } m = \frac{A}{B}.$$

Решая квадратное уравнение $3m^2 + 8m - 3 = 0$, находим его корни $m_1 = 1/3$, $m_2 = -3$, откуда получаем две плоскости $1/3x+y = 0$ и $-3x+y = 0$.

Пример 3.. В пучке, определяемом плоскостями $2x-y+5z-3=0$ и $x+y+2z+1=0$, найти две перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку M(1,0,1).

Решение. Уравнение пучка, определяемого данными плоскостями, имеет вид $u(2x-y+5z-3) + v(x+y+2z+1)=0$, где u и v не обращаются в нуль одновременно. Перепишем уравнение пучка следующим образом:

$(2u +v)x + (- u + v)y + (5u +2v)z - 3u + v = 0.$

Для того, чтобы из пучка выделить плоскость, проходящую через точку M, подставим координаты точки M в уравнение пучка. Получим:

$(2u + v)\cdot 1 + (-u + v)\cdot 0 + (5u + 2v)\cdot 1 -3u + v =0$, или $v = - u$.

Тогда уравнение плоскости, содержащей M, найдем, подставив $v = - u$ в уравнение пучка:

$u\,(2x - y + 5\,z - 3) - u\,(x + y + 2\,z + 1) = 0.$

Т.к. $u \neq 0$ (иначе $v = 0$, а это противоречит определению пучка), то имеем уравнение плоскости $x - 2y + 3\,z - 4 = 0$. Вторая плоскость, принадлежащая пучку, должна быть ей перпендикулярна. Запишем условие ортогональности плоскостей:

$(2u + v)\cdot 1 + (v - u)\cdot(-2) + (5u + 2v)\cdot 3 = 0$, или $v = -\,19/5u$.

Значит, уравнение второй плоскости имеет вид:

$u\,(2x - y + 5z - 3) - 19/5\,u(x + y + 2z + 1) = 0$ или $9x + 24y + 13z + 34 = 0$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Запишите общее уравнение плоскости.
2. Перечислите способы задания плоскости.
3. Запишите уравнение плоскости в «отрезках»
4. Расскажите, как составить нормированное уравнение плоскости.

Рекомендованная литература

1. В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики. М.- Издательский центр «Академия» 2014г

Раздел 8. Уравнения и неравенства.

Тема 8.1. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными. Метод Крамера

Цель:

1. Познакомиться с понятием матрица, её элементами, свойствами.
2. Научиться решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными методом Крамера.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу. (Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа». 2008г., стр. 60 – 63.

2. Разобрать решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными методом Крамера.

3. Решить уравнения: 1) $\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 14 \\ 2x - 4y = -20 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{3x - 2}{4} = x + y \\ 5x - 4y = -18 \end{cases}$.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решите предложенные системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными методом Крамера.

Вопросы для изучения:

1. Решение систем двух уравнений с тремя переменными.
2. Матрицы. Элементы матрицы. Понятие строки и столбца матрицы.
3. Квадратная матрица. Главная диагональ матрицы, побочная диагональ.
4. Понятие единичной матрицы.
5. Вектор –столбец, вектор –строка.
6. Определитель матрицы. Свойства определителя.
7. Правило для вычисления определителя второго порядка.
8. Формулы для нахождения решения системы двух линейных уравнений.
9. Правило Крамера для решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
10. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными с помощью правила Крамера.

№1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x - y = 4 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение: 1. Найдем определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ (1)

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -5 \neq 0$, значит, система имеет единственное решение.

2. Используем для нахождения корней формулы:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad (2), \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta} \quad (3).$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{7 \cdot (-1) - 4 \cdot 2}{-5} = \frac{-15}{-5} = 3, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot 7}{-5} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Ответ: (3; -1)

№ 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 2 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение: 1. Найдем определитель системы:

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 6 \cdot (-2) = -12 + 12 = 0$. Свободные члены пропорциональны коэффициентам при переменных: $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$. Поэтому данная система равносильна одному из уравнений, например первому, и, следовательно, имеет бесконечно много решений.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Дайте определение понятию матрица.
2. Объясните, что называется матрицей-строкой? матрицей-столбцом? вектором?
3. Расскажите, какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
4. Объясните, какие матрицы называются равными.
5. Поясните, что называется главной диагональю матрицы.
6. Поясните, какая матрица называется диагональной.
7. Расскажите, какая матрица называется единичной.
8. Расскажите, какая матрица называется треугольной.
9. Дайте определение определителя матрицы.

10. Сформулируйте теорему и запишите формулы Крамера.

Рекомендуемая литература.

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.
2. Е.В. Филимонова. Математика. Р.-на-Д. «Феникс».2008 г.
3. Д.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. В двух частях. М. «Айрис Пресс». 2015г.
4. П.Е. Данко, А.Г.Попов, Т.Я.Кожевникова. В двух частях. М. «Оникс. Мир и Образование». 2015г.

Тема 8.1. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств.

Цель:

1. Научиться изображать на координатной плоскости множество решения неравенств.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

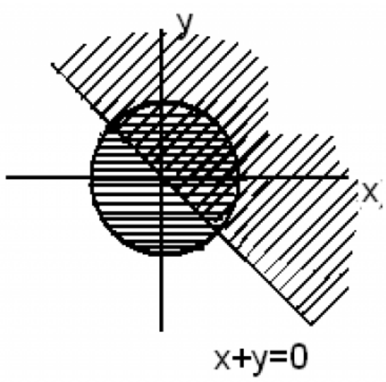
1. Разобрать предложенные задания.
2. Решить неравенства.

№1. Изобразить решение неравенства $9x^2 - 4y^2 \leq 25$

Порядок выполнения задания.

1. Изучите предложенный способ решения неравенств
2. Выполните самостоятельно практическую работу.

Графическое решение неравенства с двумя переменными

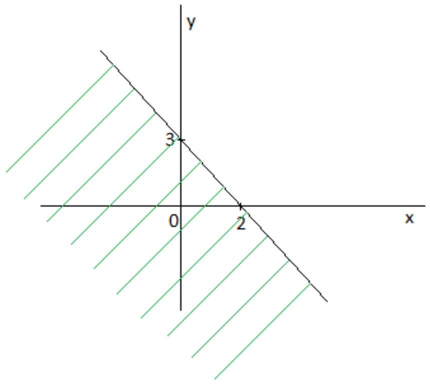


Часто приходится изображать на координатной плоскости множество решений неравенства с двумя переменными. Решением неравенства с двумя переменными называют пару значений этих переменных, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Пример 1. Изобразить на координатной плоскости множество решений неравенства $2y + 3x < 6$.

Решение: Сначала построим прямую. Для этого запишем неравенство в виде уравнения: $2y + 3x = 6$ и выразим y**.** Таким образом, получим: $y=(6-3x)/2$.

Эта прямая разбивает множество всех точек координатной плоскости на точки, расположенные выше ее, и точки, расположенные ниже ее.



Возьмем из каждой области по контрольной точке, например A (1;1) и B (1; 3)

Координаты точки A удовлетворяют данному неравенству $2y + 3x < 6$, т. е. $2 \bullet 1 + 3 \bullet 1 < 6$.

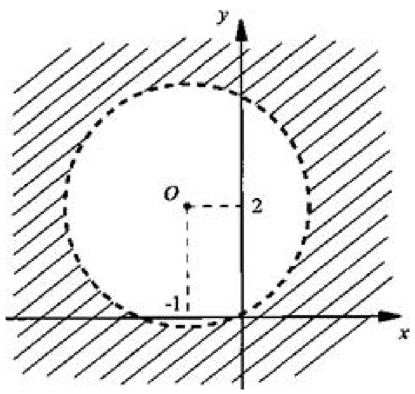
Координаты точки B <u>не</u> удовлетворяют данному неравенству $2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 < 6$.

Так как данное неравенство может изменить знак на прямой $2y + 3x = 6$, то неравенству удовлетворяет множество точек той области, где расположена точка A. Заштрихуем эту область. Таким образом, мы изобразили множество решений неравенства **$2y + 3x < 6$.**

Пример 2. Изобразить множество решений неравенства $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 > 0$ на координатной плоскости.

Решение: Построим сначала график уравнения $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$. Выделим в этом уравнении уравнение окружности: $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4$, или $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$.

Это уравнение окружности с центром в точке 0 (-1; 2) и радиусом R = 2. Построим эту окружность.

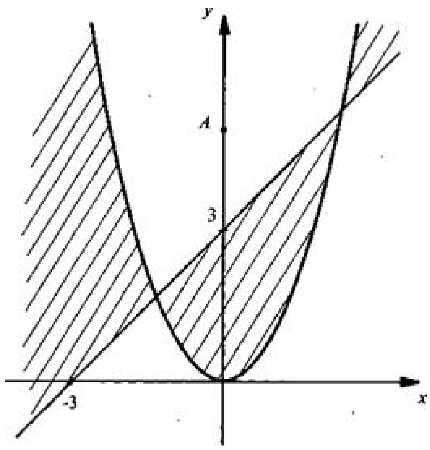


Так как данное неравенство строгое и точки, лежащие на самой окружности, неравенству не удовлетворяют, то строим окружность пунктирной линией.

Легко проверить, что координаты центра O окружности данному неравенству не удовлетворяют. Выражение $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 1$ меняет свой знак на построенной окружности. Тогда неравенству удовлетворяют точки, расположенные вне окружности. Эти точки заштрихованы.

Пример: Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства $(y - x^2)(y - x - 3) < 0$.

Решение: Сначала построим график уравнения $(y - x^2)(y - x - 3) = 0$. Им является парабола $y = x^2$ и прямая $y = x + 3$.



Построим эти линии и отметим, что изменение знака выражения $(y - x^2)(y - x - 3)$ происходит только на этих линиях. Для точки А (0; 5) определим знак этого выражения: (5- 3) > 0 (т. е. данное неравенство не выполняется). Теперь легко отметить множество точек, для которых данное неравенство выполнено (эти области заштрихованы).

Алгоритм решения неравенств с двумя переменными

1. Приведем неравенство к виду $f(x; y) < 0$ ($f(x; y) > 0$; $f(x; y) \leq 0$; $f(x; y) \geq 0$;)
2. Записываем равенство $f(x; y) = 0$
3. Распознаем графики, записанные в левой части.
4. Строим эти графики. Если неравенство строгое ($f(x; y) < 0$ или $f(x; y) > 0$), то - штрихами, если неравенство нестрогое ($f(x; y) \leq 0$ или $f(x; y) \geq 0$), то - сплошной линией.
5. Определяем, на сколько частей графики разбили координатную плоскость
6. Выбираем в одной из этих частей контрольную точку. Определяем знак выражения $f(x; y)$
7. Расставляем знаки в других частях плоскости с учетом чередования (как по методу интервалов)
8. Выбираем нужные нам части в соответствии со знаком неравенства, которое мы решаем, и наносим штриховку

Обучающиеся должны владеть учебным материалом в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите алгоритм изображения решения неравенства
2. Расскажите, чем отличается решение неравенства относительно знаков > и <.

Рекомендуемая литература.

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.
2. Е.В. Филимонова. Математика. Р.-на-Д. «Феникс».2008 г.

Тема 8.2. Решение иррациональных уравнений различными методами.

Цель:

1. Расширить знания по решению иррациональных уравнений, рассмотрев различные способы их решения;

2. Научиться применять данные способы для решения уравнений.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Разобрать предложенные способы решения иррациональных уравнений.

2. Решить иррациональные уравнения указанным способом.

№1. Решите уравнение путем введения новой переменной:

1) $x^2+3x-\sqrt{x^2+3x}-2=0$ 2) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}+x=2\sqrt{x+2}$

№2. Решите уравнения путем разложения на множители: $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12$.

№3. Решите уравнение путем введения нескольких новых переменных: $\sqrt[3]{x+8}-\sqrt[3]{x-8}=2$.

Порядок выполнения задания.

1. Изучите предложенные приёмы решения иррациональных уравнений по данной теме согласно плану.

2. Выполните самостоятельно практическую работу.

Обучающиеся должны владеть учебным материалом в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для изучения:

1. Понятие об иррациональном уравнении.

Иррациональным уравнением называется алгебраическое уравнение, хотя бы один из членов которого иррационален относительно неизвестного, т.е. это есть уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала.

Например: $\sqrt{x+5}+x=4$, $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$.

В элементарной математике иррациональные уравнения рассматриваются в множестве действительных чисел, причем корни четной степени предполагаются арифметическими, а нечетной – алгебраическими (положительными, равными нулю или отрицательными).

2. Решение иррационального уравнения способом введения новой переменной.

Данный способ является универсальным.

№ 1. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$

Решение: Найдем ОДЗ уравнения: $x^2+20\ge 0 \Rightarrow x-$ *любое.* Преобразуем правую часть уравнения, представив 22 в виде разности 42 и 20:

$x^2+\sqrt{x^2+20}=42-20$. Перенесем 20 в правую часть уравнения: $x^2+20+\sqrt{x^2+20}=42$.

Введем новую переменную, обозначив выражение $\sqrt{x^2+20}=t.$ $t\ge 0$. Тогда наше уравнение примет вид: $t^2+t=42.$ Решим его, как квадратное. $t_1=-7 \prec 0,$ $t_2=6$. Вернемся к подстановке: $\sqrt{x^2+20}=6 \Rightarrow x^2+20=36,$ $x=\pm 4$ Ответ: ± 4.

№ 2. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

Решение: Обратим внимание на подкоренные выражения. Данные дроби взаимно-просты.

Пусть $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{3+x}}=a, a \succ 0 \quad \Rightarrow \sqrt[7]{\dfrac{3+x}{5-x}}=\dfrac{1}{a}$. Подставив в первоначальное уравнение, имеем:

$a+\dfrac{1}{a}=2,$ $a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1$. Вернемся к подстановке: $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{3+x}}=1$,

$\dfrac{5-x}{3+x}=1 \Rightarrow 5-x=3+x,$ $x=1$.

Проверка: $\sqrt[7]{\dfrac{5-1}{3+1}}+\sqrt[7]{\dfrac{3+1}{5-1}}=1+1=2$ Ответ: 1.

№ 3. Решить уравнение: $(x+3)(x+2)\sqrt{x^2+5x+2}=4$.

$(x+3)(x+2)\sqrt{x^2+5x+2}=4 \Leftrightarrow x^2+5x+6-4-4\sqrt{x^2+5x+2}=0 \Leftrightarrow$

$x^2+5x+2-4\sqrt{x^2+5x+2}=0$. *Замена* $y=\sqrt{x^2+5x+2}\ge 0$ *приводит к уравнению* $y^2-4y=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=4 \end{array}\right.$. Возвращаясь к замене, получим совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+5x+2}=0 \\ \sqrt{x^2+5x+2}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+2=0=4 \\ x^2+5x+2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}(-5+\sqrt{17}) \\ x=\dfrac{1}{2}(-5-\sqrt{17}) \\ x=2 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Так как были использованы только равносильные переходы, отдельная проверка корней, а также нахождение ОДЗ не требуется.

Ответ: 2; 7; $\dfrac{1}{2}(-5-\sqrt{17});\dfrac{1}{2}(-5+\sqrt{17})$

№ 4. $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$

Решение: Воспользуемся равенством $3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$ *и положим* $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=t$.

Тогда уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=6$, $t^2-6t+1=0$, $t_1=3+\sqrt{8}$ $t_2=3-\sqrt{8}$. Исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=3+\sqrt{8}$$

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$$

Отсюда $x_1=3$ $x_2=-3$. Ответ: 3; -3

3. Решение иррационального уравнения способом разложения на множители.

№ 5. $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x-2$.

Решение: Перенесем выражение, стоящее в правой части в левую: $(x+1)\sqrt{x^2+x-2}-2(x+1)=0$. Вынесем общий множитель за скобки:

$(x+1)(\sqrt{x^2+x-2}-2)=0$. Произведение двух множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

$x+1=0$ *или* $\sqrt{x^2+x-2}-2=0,$ $x^2+x-2\geq 0$.

$x=-1$ *или* $\sqrt{x^2+x-2}=2,$ $x^2+x-2=4,$ $x^2+x-6=0\Rightarrow x_1=-3,$ $x_2=2$.

Проверим, все ли корни удовлетворяют нашему условию: $x^2+x-2\geq 0$.

$x=-1:(-1)^2+(-1)-2=-2 \pi 0$ - посторонний корень; $x=-3:$ $9-3-2=4\geq 0$,

$x=2:$ $4-2-2=0\geq 0$. Ответ: -3; 2.

4. Решение иррационального уравнения способом введения двух переменных.

Данные уравнения решаются путем введения двух переменных.

$$\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1, \quad \begin{cases}\sqrt[3]{x+34}=a\\ \sqrt[3]{x-3}=b\\ a-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^3=x+34\\ b^3=x-3\\ a=b+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^3-b^3=37\\ a=b+1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(a-b)(a^2+ab+b^2)=37\\ a-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+ab+b^2=37\\ a=b+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=b+1\\ 3b^2+3b-36=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=b+1\\ \left[\begin{array}{l}b=3\\ b=-4\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\\ \begin{cases}a=-3\\ b=-4\end{cases}\end{array}\right.. \quad 1)\sqrt[3]{x-3}=3, \quad x=30 \quad 2)\sqrt[3]{x-3}=-4, \quad x=-61$$

5. Решение иррационального уравнения способом нахождения и исследования ОДЗ.

Если уравнение кажется на первый взгляд достаточно сложным, то следует начать его решения с нахождения ОДЗ.

Решить уравнение: $3\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}-4\sqrt[3]{x+7}=-2-\sqrt{1-x}$.

ОДЗ: $\begin{cases}3x+1\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1/3\\ x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Область допустимых значений состоит из единственного значения. Проверим, является ли это значение корнем уравнения.

$3\sqrt{4}-\sqrt{0}-4\sqrt[3]{8}=-2-\sqrt{0};6-8=-2;-2=-2$. Следовательно, x=1 корень нашего уравнения.

Ответ: 1.

Обучающиеся должны владеть учебным материалом в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, в чем заключается смысл метода введения новой переменной.
2. Расскажите алгоритм решения уравнения путем введения нескольких переменных.
3. Расскажите, что такое ОДЗ уравнения. Как влияет нахождение ОДЗ на корни уравнения?

Рекомендуемая литература.

1. М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. «Математика. Алгебра и начала анализа. Профильный уровень. Учебник 10 класса»М. Бином. Лаборатория знаний. 2013.
2. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математического анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2013.

Тема 8.2. Решение иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)}\ \phi\ g(x)\quad(\sqrt{f(x)}\ge g(x))$ и вида $\sqrt{f(x)}\ \pi\ g(x)\quad(\sqrt{f(x)}\le g(x))$.

Цель:

1. Знать различные способы решения неравенств вида $\sqrt{f(x)}\ \phi\ g(x)\quad(\sqrt{f(x)}\ \pi\ g(x))$.
2. Научиться решать иррациональные неравенства графическим и аналитическим способом.

Оснащение:

1. данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.

2. Решить задания:

№ 1. Решить неравенства аналитическим способом:

1) $\sqrt{x^2-3x-10}\ \pi\ 8-x$ 2) $\sqrt{x^2+4x}\ \phi\ 2-x$.

№ 2. Решить неравенства графическим способом: $\sqrt{2x+9}\ \pi\ 3-x$

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал по решению неравенств данного вида.

2. Составить краткий конспект.

3. Выполните задания по данной теме.

4. Решить предложенные неравенства.

1. Понятие иррационального неравенства.

Неравенства называются иррациональными, если они содержат неизвестное под знаком радикала, причем каждый радикал четной степени принимает арифметическое, а радикал нечетной степени – единственное его действительное значение.

Иррациональные неравенства рассматриваются на множестве действительных чисел и при решении находятся их действительные решения.

При решении иррациональных неравенств используются те же приёмы, что и при решении иррациональных уравнений: возведение обеих частей неравенства в одну и ту же натуральную степень, введение новых (вспомогательных переменных) и т.д. Осуществлять решение можно, придерживаясь, например, следующего плана:

1. Найти область допустимых значений (О.Д.З.) заданного неравенства.

2. Решить заданное неравенство, возводя обе его части в одну и ту же степень.

3. Из найденных решений отобрать значения переменной, принадлежащие О.Д.З. заданного неравенства.

Другой путь - это переход к равносильной системе (или совокупности систем), содержащийся в теоретических материалах к данной теме.

Будьте внимательны, поскольку при решении неравенства проверку сделать, как правило, невозможно.

2. Способы решения неравенств вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

1способ.

Рассмотрим первый способ решения неравенств вида: $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$.

Первый способ. Для решения неравенств обязательно придется найти ОДЗ: $f(x) \geq 0$. Рассмотрим разность $\sqrt{f(x)} - g(x)$. Квадратный корень, если он существует, т.е. если $x \in$ ОДЗ, принимает неотрицательные значения. Поэтому,

а) если $g(x) < 0$, то разность положительна в ОДЗ и неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ выполнено в ОДЗ, а неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ не имеет решений;

б) если же $g(x) \geq 0$, то знак разности может быть любым, но сумма $\sqrt{f(x)} + g(x) \geq 0$ (неотрицательна), и умножение разности на эту сумму не меняет знака разности в ОДЗ. Поэтому если $g(x) \geq 0$, то $\sqrt{f(x)} - g(x) \leq 0 (\geq 0) \Leftrightarrow f(x) - g^2(x) \leq 0 (\geq 0)$. Отсюда следует правило.

Правило: Если $g(x) \geq 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)} - g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g^2(x)$ в ОДЗ.

Этот же результат получим, если учтем, что обе части неравенств неотрицательны и возведение в квадрат приводит к равносильным в ОДЗ неравенствам $f(x) > g^2(x)$ и $f(x) < g^2(x)$ соответственно. Отсюда следуют условия равносильности

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \end{array} \right. ; \quad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}.$$

Рассмотрим решение иррациональных неравенств на следующих примерах.

Примеры.

№ 1.Решить иррациональное неравенство: $\sqrt{x+2} < x$.

Решение: $\sqrt{x+2} < x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x > 0 \\ x+2 < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ x^2 - x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$.

Ответ: $x \in (2;+\infty)$

№ 2. Решить иррациональное неравенство: $\sqrt{2x^2 - 7x - 4} > -x - 0{,}25$

Решение: Найдем сначала ОДЗ: $2x^2 - 7x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -0{,}5] \cup [4;+\infty)$. Теперь рассмотрим два случая:

1) если $-x - 0{,}25 < 0 \Leftrightarrow x > -0{,}25$, то неравенство выполнено в ОДЗ, т.е. $x \in [4;+\infty)$;

2) если $-x - 0{,}25 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -0{,}25$, то

$$\sqrt{2x^2 - 7x - 4} > -x - 0{,}25 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 4 > x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow 16x^2 - 120x - 65 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{15 - \sqrt{290}}{4}\right).$$

Объединяя оба случая, получим окончательный ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{15 - \sqrt{290}}{4}\right) \cup [4;+\infty)$.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{15 - \sqrt{290}}{4}\right) \cup [4;+\infty)$.

№ 3. Решить иррациональное неравенство: $\sqrt{2x - x^2 + 1} \geq 2x - 3$.

Решение: $\sqrt{2x - x^2 + 1} \geq 2x - 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 2x - x^2 + 1 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geq 0 \\ 2x - x^2 + 1 \geq 0 \\ 2x - x^2 + 1 \geq (2x-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x < 3 \\ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \geq 3 \\ x^2 - 2x - 1 \leq 0 \\ 5x^2 - 14x + 8 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 1,5 \\ 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 1,5 \\ 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2} \\ \frac{4}{5} \le x \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2} \\ \begin{cases} x \ge 1,5 \\ \frac{4}{5} \le x \le 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-\sqrt{2} \le x \le 1+\sqrt{2} \\ 1,5 \le x \le 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} \le x \le 2$$

Ответ: $x \in \left[1-\sqrt{2};2\right]$.

Неравенства вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ и $\sqrt{f(x)} < g(x)$ можно решить ещё одним способом.

Второй способ.

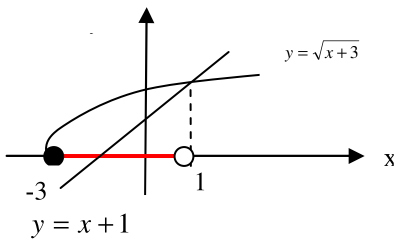
Это графический способ. Рассмотрев две функции $y=\sqrt{f(x)}$ и $y=g(x)$, построим графики данных функций. Найдем точку пересечения данных графиков.

№ 4. Решить неравенство $\sqrt{x+3} > x+1$ графически.

Решение: Зададим две функции $y=\sqrt{x+3}$ и $y=x+1$. Построим графики данных функций, посмотрим, где первый график расположен выше второго.

$y=\sqrt{x+3}$ - степенная функция, где $x \ge -3$, полученный движением графика $y=\sqrt{x}$ по оси OX влево на 3 единицы. График – «ветвь параболы»

$y=x+1$ - линейная функция, график прямая.



Для нахождения решения надо решить уравнение $\sqrt{x+3}=x+1$.

$\sqrt{x+3}=x+$ у $\rightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ x+3 = x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (x+2)(x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$

Решением неравенства будет промежуток $[-3;1)$.

Ответ: $[-3;1)$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Дайте определение иррационального неравенства.
2. Сформулируйте общий план решения иррациональных неравенств.
3. Сформулируйте правило решения иррациональных неравенств вида $\sqrt{f(x)}\ \phi\ g(x)$ и $\sqrt{f(x)}\ \pi\ g(x)$.
4. Запишите равносильные переходы для решения данных неравенств.
5. Сформулируйте алгоритм решения данных неравенств графическим способом.

Рекомендуемая литература.

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2015г.
2. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2013.
3. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математического анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2013.

Тема 8.3. Решение показательно-степенных уравнений.

Цель:

1. Ввести определение показательно – степенного уравнения;
2. Рассмотреть способы решения данных уравнений.

Оснащение:

1. данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.
2. Решить задания: Решить показательно-степенные уравнения:

1) $(x+2)^{x^2-5x+6}=(x+2)^2$ 2) $(x-7)^{x^2-9x+8}=1$ 3) $(x-3)^{x^2-x}=(x-3)^2$

4) $(x^2-x-1)^{x^2-x}=1$ 5) $x^{\log_2 x}=64x$

Порядок выполнения задания.

1. Изучите предложенные приемы решения показательно – степенных уравнений.

1. Понятие о показательно-степенном уравнении. Вид уравнения.

Показательно-степенная функция имеет вид $y = f(x)^{\phi(x)}$, то есть уравнения вида $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{m}$ (основанием степеней, стоящих в левой и правой частях показательно-степенного уравнения, является $f(x)$ – выражение с переменно й).

2. Основные способы решения уравнения вида $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} = \left(f(x)\right)^{m}$

1. $f(x) > 0$

1) Для решения используем (если возможно) основное логарифмическое тождество в виде: $a^{\log_a N} = N, \left(a > 0, a \neq 1, N > 0\right)$.

№1. $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1$.

Решение: $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x_1 = -1, x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

2) Для решения используем способ логарифмирования (если возможно) обеих частей уравнения по числовому основанию или представляем все степени как степени с одним и тем же числовым основанием по формуле $U(x) = a^{\log_a U(x)}, a > 0, a \neq 1, U(x) > 0$

№ 2. $x^{2\lg x + 1} = 100x$.

Решение: На ОДЗ $(x > 0)$ обе части уравнения положительны, поэтому после логарифмирования по основанию 10 получаем уравнение, равносильное данному:

$\lg(x^{2\lg x + 1}) = \lg(100x) \Rightarrow \left(2\lg x + 1\right)\lg x = \lg 100 + \lg x$. Введем замену: $\lg x = t$. Тогда наше уравнение примет вид: $\left(2t + 1\right)t = 2 + t$, $t^2 = 1$, $t = \pm 1$. Тогда $\lg x = 1 \Rightarrow x = 10$, $\lg x = -1 \Rightarrow x = 0{,}1$ (оба корня входят в ОДЗ). Ответ: 10, 0,1.

2. $f(x)$ **- произвольное выражение.**

Чтобы найти область определения такой функции, рассмотрим три случая:

1. $f(x) > 0, \phi(x)$ - произвольное число;
2. $f(x) < 0, \phi(x)$ - целое число;
3. $f(x) = 0, \phi(x)$ - целое положительное число.

Тогда можно сказать, что -1 является корнем уравнения $x^{2x} = 1$, но не является корнем уравнения $x^{\frac{2x}{3}} = 1$, так как выражение $\left(-1\right)^{-\frac{2}{3}}$ не определено, то есть не имеет смысла. Число -8 не является корнем уравнения $x^{\frac{x}{3}} = x^{\frac{-8}{3}}$, так как выражение $\left(-8\right)^{-\frac{8}{3}}$ тоже не имеет смысла.

Числа 0 и $-\dfrac{1}{2}$ являются корнями уравнения $x^{2x+5} = x^4$.

Число 0 не является корнем уравнения $x^{x+\frac{5}{2}}=x^2$, так как выражение $0^{\frac{5}{2}}$ не имеет смысла.

Число $-\dfrac{1}{2}$ является корнем этого уравнения.

Числа 0 и $-\dfrac{1}{2}$ не являются корнями уравнения $x^{\frac{2x+5}{3}}=x^{\frac{4}{3}}$. В соответствии с этим делаем вывод,

что решение уравнения вида $\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left(f(x)\right)^m$ сводятся к таким случаям: $\begin{cases} f(x)=1, \\ f(x)=-1, \\ f(x)=0, \\ \varphi(x)=m \end{cases}$.

Проверка корней, найденных в 2, 3 и 4 случаях, обязательна.

№1. Решить уравнение: $(x+5)^{x^2-x-1}=x+5$

Решение: Рассмотрим случаи: 1. $x+5=1,\quad x_1=-4$

2. $x+5=-1,\quad x_2=-6$ 3. $x+5=0,\quad x_3=-5$

4 $x^2-x-1=1,\quad x_4=2, x_5=-1$. Проверкой убеждаемся, что все найденные корни удовлетворяют уравнению.

Ответ: -4; -6; -5; 2; -1.

№ 2. Решить уравнение: $(x+4)^{x^2+9x+8}=1$.

Решение: Рассмотрим случаи: 1. $x+4=1,\quad x_1=-3$

2. $x+4=-1,\quad x_2=-5$ 3. $x^2+9x+8=0,\quad x_3=-8, x_4=-1$.

Проверкой убеждаемся, что все найденные корни удовлетворяют уравнению.

Ответ: -3; -5; -8; -1.

№3. Решить уравнение: $\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}}=\sqrt[5]{|x-4|^{x-3}}$

$$\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}}=\sqrt{|x-4|^{x-3}}$$

$$\left(\sqrt[5]{|x-4|^{x+2}}\right)^{10}=\left(\sqrt{|x-4|^{x-3}}\right)^{10}\Leftrightarrow |x-4|^{2(x+2)}=|x-4|^{5(x-3)}\Leftrightarrow$$

$$1)|x-4|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=1 \\ x-4=-1 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ x_2=3 \end{array}\right.$$

$2)|x-4|=-1$ *нет решения* $\quad 3)|x-4|=0\Leftrightarrow x_3=4$

$$4)\quad 2(x+2)=5(x-3)\Leftrightarrow 2x-5x=-15-4\Leftrightarrow x_4=\frac{19}{3}$$

Проверка показывает, что корнями уравнения являются $x = 5$ и $x = 19/3$.

Ответ: 5; 19/3.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Объясните на примерах способы решения показательно-степенных уравнений.
2. Объясните, почему при переходе от уравнения $x^{\lg x} = x^2$ к уравнению $\lg x = 2$ теряется корень данного уравнения.

Рекомендуемая литература.

1. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2013.
2. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математического анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2013.

Тема 8.5. Решение трансцендентных логарифмических уравнений, тригонометрических уравнений, применяя свойства функций (ограниченности и монотонности), неравенство Коши.

Цель:

1. Ввести понятие трансцендентных уравнений.
2. Раскрыть сущность функционально-графического метода для решения данных уравнений.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.
2. Решить задания: 1) $\sin x = x^2 + 2x + 2$ 2) $2^{x+1} + x = -1.5$.

Порядок выполнения задания.

1. Изучить теоретический материал по данной теме.
2. Разобрать решение трансцендентных уравнений различными методами.
3. Выполнить самостоятельно решения предложенных уравнений.

Понятие трансцендентное уравнение.

Все уравнения можно разделить на два класса: алгебраические и трансцендентные. Трансцендентный (лат. *transendo* – переступать): в философии – термин, означающий то, что запредельно по отношению к миру явлений и недоступно теоретическому познанию; в математике – термин, обозначающий то, что не может быть вычислено алгебраическим путем или выражено алгебраически.

Если функция $f(x)$ содержит тригонометрические, показательные, логарифмические и другие функции, не являющиеся алгебраическими, то уравнение называется ***трансцендентным.*** Примерами трансцендентных уравнений являются: $4\cos x + 0{,}3x = 0, \quad 2^x - 2\cos x = 0, \quad \lg(x+5) = \cos x.$

Для решения таких уравнений используется несколько функционально-графических методов.

2. Использование ограниченности функций при решении уравнения.

Если при решении уравнения $f(x) = g(x)$ удастся показать, что для всех $x \in X$ справедливы

Неравенства $f(x) \le A$ *и* $g(x) \ge A$, то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$

равносильно системе $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Другими словами: если на множестве X наибольшее значение одной функции

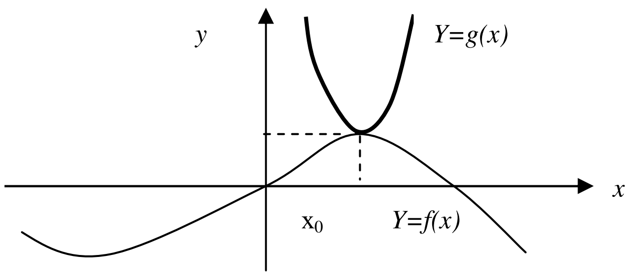
равно наименьшему значению другой функции, то $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

Графическая иллюстрация теоремы:

а – наименьшее значение функции *Y=g(x)*

и наибольшее значение функции *Y=f(x).*

Графики пересекаются только в одной точке с ординатой равной *а*. Решением уравнения является абсцисса этой точки.



Алгоритм решения уравнения:

1. Привести уравнение к виду $f(x) = g(x)$.

2. Оценить множество значений функции $E(f)$ *и* $E(g)$. Если $E(f) \cap E(g) = a$, то применяем теорему.

3. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$.

№1. Решить уравнение: $2\sin x = 5x^2 + 2x + 3$.

Решение: Рассмотрим две функции.

$y = 2\sin x$ - тригонометрическую (синусоиду) и $y = 5x^2 + 2x + 3$ - квадратичную (парабола).

Множество значений функции $y = 2\sin x$: $-1 \le \sin x \le 1, \quad -2 \le 2\sin x \le 2$, т.е. левая часть не превосходит 2. В правой части квадратичная функция, графиком является парабола, ветви которой направлены вверх, т.е. в вершине функция принимает минимальное значение. $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{10} = -\dfrac{1}{5} \Rightarrow y = 5 \cdot \dfrac{1}{25} - \dfrac{2}{5} + 3 = 2\dfrac{3}{5} \text{ ф } 2$.

Мы доказали, что левая часть уравнения при любом *x* строго меньше правой, т.е. решений нет.

№2. $\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}=2-x^2$.

Решение: Заметим, что $x^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+1 \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} \ge 1$ Аналогично, $\sqrt[4]{x^4+1} \ge 1$.

Следовательно, левая часть уравнения $\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1} \ge 2$.

Рассмотрим правую часть уравнения: $-x^2 \le 0 \Leftrightarrow 2-x^2 \le 2$.

Таким образом, равенство двух частей возможно тогда и только тогда, когда они одновременно равны 2, т.е.

$$\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}=2-x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x^2=2 \\ \sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: 0

№3. $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5{}^2\sqrt{x^2+x+1}$

Так как $\cos^2(x\cdot\sin x)\le 1 \le 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}$, *то исходное уравнение равносильно системе* $\begin{cases} \cos^2(x\cdot\sin x)=1 \\ 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x\cdot\sin x)=\pm 1 \\ \log_5\sqrt{x^2+x+1}=0 \end{cases}$

Решения второго уравнения системы x = -1 и x = 0. Первому уравнению системы удовлетворяет только x = 0. Ответ: 0

№4. $\sqrt[4]{x^3+2x-33}+\ln^2(x^2-4x+4)=0$

Решение: Левая часть уравнения представляет собой сумму двух неотрицательных функций. Равенство возможно только в том случае, когда каждое из слагаемых равно нулю.

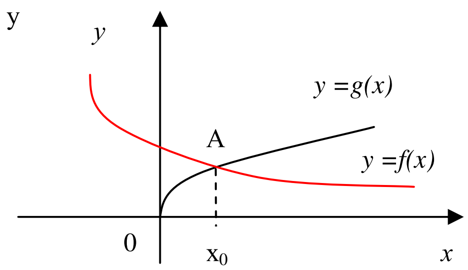
$\ln^2(x^2-4x+4)=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4=1 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow x_1=1, \quad x_2=3$

$\sqrt{x^3+2x-33}=0 \Rightarrow x=3$. Ответ: 3

3. Использование монотонности при решении уравнения.

Утверждение 1. Если функция *f* возрастает (убывает) на множестве X, то уравнение *f*(x) = A на множестве X имеет не более одного корня.

Утверждение 2. Если функция *f* возрастает (убывает) на множестве X, а функция *g* убывает (возрастает) на множестве X, то уравнение *f(x)=g(x)* на множестве X имеет не более одного корня.



Графическая иллюстрация теоремы.

Функция y =f(x) – убывает, y =g(x) – возрастает.

Графики пересекаются в одной точке А, абсцисса этой точки x_0 является решением уравнения.

Алгоритм решения уравнения.

1. Привести уравнение к виду *f(x)=g(x),* где одна функция возрастает, а другая убывает на всей области определения уравнения.
2. Воспользоваться теоремой.
3. Решить уравнение или методом подбора корней, или построить графики функций, определив абсциссу точки пересечения.

№1 $x^2-6x+5=-3\sqrt{x-3}$

Решение: На ОДЗ уравнения (x ≥3) функция $y=x^2-6x+5$ возрастает, а функция $y=-3\sqrt{x-3}$ убывает. Уравнение может иметь не более одного корня. Подбором находим $x=4$.

№2. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)=\sqrt{x-3}$

Решение: Так как 0 < 1/3 < 1, то функция $y=\log_{\frac{1}{3}}(2x-5)$ убывает на (2,5; +∞), а функция $y=\sqrt{x-3}$ возрастает. Уравнение может иметь не более одного корня

Ответ: 3

№ 3. $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Решение: Область допустимых значений уравнения состоит из всех $x\geq\frac{1}{2}$.

При данных x имеют место равенства $\sqrt{(x+2)(2x-1)}=\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2x-1}$ *и* $\sqrt{(x+6)(2x-1)}=\sqrt{x+6}\cdot\sqrt{2x-1}$. Это позволяет после очевидных преобразований переписать исходное уравнение в виде $\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1}-3\right)=4 \quad (2)$. Левая часть уравнения (2) есть возрастающая функция от x, будучи произведением возрастающих функций. Значит, она может принимать значение 4 не более чем в одной точке. Несложным подбором можно убедиться, что годится x = 7.

4. *Использование Неравенства Коши:* $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \quad (a\geq 0 \quad b\geq 0)$ ***при решении уравнений.***

Неравенство Коши для случая трех неотрицательных чисел: $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, где равенство достигается при $a = b = c$.

Для случая двух неотрицательных чисел: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (a \geq 0 \quad b \geq 0)$, где равенство достигается при $a = b$.

Отметим частные случаи неравенств Коши для двух неотрицательных чисел: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \, при \quad \frac{a}{b} \succ 0, \quad a + \frac{1}{a} \geq 2 \, при \quad a \succ 0, \quad \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2 \, при \quad a \neq 0$.

№1. $\frac{x^2 + 13x + 4}{x+2} = 6\sqrt{x}$

Преобразуем левую часть уравнения: $\frac{x^2 + 13x + 4}{x+2} = \frac{(x+2)^2 + 9x}{x+2} = x + 2 + \frac{9x}{x+2}$.

В силу неравенства Коши имеем (x ≥ 0) $x + 2 + \frac{9x}{x+2} \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{9x}{x+2}} = 6x$

Итак, $\frac{x^2 + 13x + 4}{x+2} \geq 6\sqrt{x} \quad при \quad x \geq 0$, и знак равенства имеет место при $x + 2 = \frac{9x}{x+2}, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 4$. Проверкой убеждаемся, что оба корня удовлетворяют уравнению. Ответ: 1; 4.

№2. $\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1} = x^2 + x + 1$

Область допустимых значений есть промежуток [1;+∞). Применим неравенство Коши:

$$\sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq \frac{x + 1 + x^2 - x + 1}{2} = \frac{x^2 + 2}{2}$$

$$\sqrt{x^3 - 1} = \sqrt{(x-1)(x^2 + x + 1)} \leq \frac{x - 1 + x^2 + x + 1}{2} = \frac{x^2 + 2x}{2}.$$

Следовательно $\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x^3 - 1} \leq x^2 + x + 1$. Неравенство Коши обращается в равенство при a = b, поэтому корень данного уравнения удовлетворяет системе

$\begin{cases} x + 1 = x^2 - x + 1 \\ x - 1 = x^2 + x + 1 \end{cases}$, которая решений не имеет. Следовательно, корней не имеет и данное уравнение. Ответ: нет корней.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Поясните, что такое трансцендентное уравнение? Приведите примеры.

2. Расскажите, в чем заключается функционально-графический метод решения уравнений, основанный на ограниченности функций?

3. Расскажите, в чем заключается функционально-графический метод решения уравнений, основанный на использовании свойств монотонности функций?

Рекомендуемая литература.

1. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2013.

2. М.Я. Пратусевич, К.М. Столбов, А.Н.Головин. Алгебра и начала математического анализа, 11класс. М.-«Просвещение». 2013.

Раздел 9. Производная и её приложения.

Тема 9.1. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функций и их классификация

Цель:

1. Познакомиться с понятием – непрерывная функция.

2. Рассмотреть понятие непрерывности функции в точке и на множестве.

3. Научиться находить промежутки непрерывности функции.

4. Научиться определять характер точек разрыва функции, уметь их классифицировать.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.

2. Решить задания:

№1. Исследовать функцию на непрерывность: $y = x^2 + 4x + 3$ в точке $x = 2$.

№ 2. Найдите точки разрыва и исследуйте их характер: 1) $y = \dfrac{1}{2x-1}$ 2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал о понятии непрерывности функции, о непрерывности функции на множестве, отрезке, о точках разрыва.

2. Составить краткий конспект.

Вопросы для изучения.

1. Непрерывность функции в точке. [4] стр. 40, [1] стр. 208, [3] стр. 181, [5] стр 137

2. Точки разрыва функции. Виды точек разрыва. [2] стр. 208 – 211, [3] стр. 182 .

3. Понятие об элементарных функциях. Свойства элементарных функций. [2] стр. 208 – 211, [3] стр. 186..

4. Непрерывность функции в промежутке. [2] стр. 208 – 211, [3] стр. 187 .

5. Рассмотреть предложенные примеры.

№1. Исследовать функцию на непрерывность: $y = x^2 - 2$ в точке $x = 3$.

Решение: Для исследования используем следующее определение:

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если предел функции при $x \to a$ равен значению функции при $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 2) = \left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7;$ $f(3) = 3^2 - 2 = 7$. Имеем: $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2 - 2\right) = f(3)$. Предел функции при $x \to 3$ равен значению функции при $x = 3$, следовательно, данная функция непрерывна в точке $x = 3$.

№ 2. Для заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер.

1) $y = \dfrac{x}{x-3}$. 2) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$.

Решение: 1) Данная функция определена при всех значениях *x*, кроме $x = 3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения. Таким образом, единственной точкой разрыва служит точка $x = 3$. Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы функции при $x \to 3$:

$\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{x}{x-3} = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{x}{x-3} = +\infty$. Следовательно, функция в точке $x = 3$ имеет бесконечный разрыв, т.е. $x = 3$ - точка разрыва II рода.

2) Рассуждая аналогично, найдем, что точками разрыва данной функции служат точки $x = 2$ и $x = 4$, в которых знаменатель дроби обращается в нуль. Очевидно, что в этих точках функция имеет бесконечный разрыв, т.е. $x = 2$ и $x = 4$ - точки разрыва II рода.

6. Решить предложенные задания.

№1. Исследуйте функцию на непрерывность: $y = x - 3x^2$.

№ 2. Найдите точки разрыва и исследуйте их характер: $y = \dfrac{3}{x^2 - 2x + 1}$

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Поясните, как прочитать запись $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$? Дайте определение предела функции в точке.
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Определите интервалы непрерывности функции $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.
4. Расскажите, что называется точкой разрыва функции?
5. Приведите примеры функций, имеющих разрыв.
6. Назовите классификацию точек разрыва. Покажите их геометрическую интерпретацию.

Рекомендованная литература

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».20013г.
2. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010 г. стр. 208 – 211.
3. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода: Полный курс математического анализа. Т.!: Начала анализа. Язык анализа. Предел последовательности. Предел функции и непрерывность. Производная. Осно.вные теоремы дифференциального исчисления. Применение производной. Изд. 2-е, испр.- М.: ЛЕНАНД, 2015. – 368с
4. Математика: учебник/М.И. Башмаков.- М.: КНОРУС, 2017.- 394с.- (Начальное и среднее профессиональное образование).
5. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.

Тема 9.1. Асимптоты. Использование асимптот при построении графиков функций

Цель:

1. Вести понятие асимптота кривой.
2. Научиться классифицировать асимптоты по их виду.

3. Выяснить значение асимптот при построении графика кривой.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.

2. Найти асимптоты графика функции:

1) $y = 1 - \dfrac{4}{x^2}$ 2) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x}$ 3) $y = \dfrac{4x - x^3}{x^2 + 4}$.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал. [2] стр. 88-89, [1] стр. 144-150, [3] ст. 138

2. Решить предложенные задания: Найти асимптоты графика функции:

1) $y = 1 - \dfrac{4}{x^2}$ 2) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x}$ 3) $y = \dfrac{4x - x^3}{x^2 + 4}$.

Вопросы для изучения.

1. Понятие асимптоты.

2. Виды асимптот.

3. Нахождение горизонтальных и наклонных асимптот.

4. Рассмотреть предложенные примеры.

№1. Найти асимптоты графика функции $y = 4 + \dfrac{1}{x}$.

Решение: Находим: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(4 + \dfrac{1}{x}\right) = 4$, поэтому $y = 4$ - горизонтальная асимптота графика функции.

Далее, так как $\lim\limits_{x \to 0+} \left(4 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \left(4 + \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$, то $x = 0$ - вертикальная асимптота.

№2. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение: Точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода, поэтому вертикальных асимптот нет. Горизонтальной асимптотой является прямая $y = 0$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$. Наклонных асимптот нет.

№ 3. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{2x^2 + 5}$.

Решение: Положим $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}$. Вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}=\infty$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+3}{x(2x^2+5)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-6x^2+3}{2x^3+5x}=\dfrac{1}{2}=k$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-6x^2+3}{2x^2+5}-\dfrac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-12x^2-5x+6}{4x^2+10}=\dfrac{-12}{4}=-3=b$.

3. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y=\dfrac{1}{2}x-3$.

1. Решить задания:

Найти асимптоты графика функции:

1) $y=1-\dfrac{4}{x^2}$ 2) $y=\dfrac{x^2+2x\ \ -3}{x}$ 3) $y=\dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Сформулируйте определение асимптоты графика функции. Запишите формулу для асимптоты.
2. Объясните, какое условие должно выполняться, для того чтобы определить, что данная асимптота вертикальная?
3. Сформулируйте определение наклонной асимптоты.
4. Расскажите, при каком значении *k* наклонная асимптота называется горизонтальной?
5. Подумайте, может ли асимптота пересекать график функции?

Рекомендуемая литература.

1. .В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики.10-е изд., стереотипное.М. – Издательский Центр «Академия», 2014г. 319с
2. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г. стр. 87 – 89 .
3. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.

Раздел 10. Интеграл и его приложения.

Тема 10.1 Приложение дифференциала к приближенным вычислениям

Цель:

1. Рассмотреть приложение дифференциала к приближенным вычислениям.
2. Научиться вычислять значения корня, степени, тригонометрических функций, используя дифференциал.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала. [2] стр. 185
2. Найти приближенные значения: 1)$2{,}005^4$ 2)$\sqrt{0{,}84}$ 3)$\cos 61^0$.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал.

1. Понятие дифференциала функции. Геометрическая интерпретация.

Пример 1: Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y = x^3 - 7x^2 + 80$ при изменении аргумента *x* от 5 до 5,01.

Решение: Находим $\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = (3x^2 - 14x)\Delta x$. При *x*=5, Δx =5,01-5=0,01 получим

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=5\\ \Delta x=0,01}} = (3\cdot 5^2 - 14\cdot 5)\cdot 0{,}01 = 0{,}05$$

2. Вычисление погрешности приближенного приращения функции.

Пример 2: Найти приближенно приращение функции $y = 3x^2 + 2$ при *x=2 и* Δ*x=0,001*. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Решение: Так как приращение аргумента - величина малая, то приращение функции можно заменить ее дифференциалом: $\Delta y \approx dy = y' \cdot \Delta x = (6x)\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0,001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012$.

Точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 - (3x^2+2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2 - 3x^2 - 2$$

$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2\,\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 + 3\cdot 0{,}000001 = 0{,}012003.$$

Абсолютная погрешность: $\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003$

Относительная погрешность: $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%$

3. Вычисление приращения функции с заданной точностью.

Пример 3: С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = x \cdot \sqrt{x^2+5}\ при \quad x = 2, \quad \Delta x = 0{,}2$

Решение:

$$dy = y' \cdot dx = (\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}})dx$$

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0,2}} = (\sqrt{4+5} + \frac{4}{\sqrt{4+5}}) \cdot 0{,}2 \approx 0{,}866 \approx 0{,}87.$$

4) Применение дифференциала для установления ошибок в вычислениях.

Пример: Непосредственным измерением нашли, что диаметр круга равен 6,4см, причем максимальная ошибка не превышает 0,05см. Найти приближенно максимальную ошибку в оценке площади, вычисляемой по формуле $S = \frac{1}{4}\pi \cdot x^2$ (x - диаметр)

Решение: Максимальная ошибка есть соответствующий дифференциал dS

$$dS = S'(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot x \cdot dx\Big|_{\substack{x=6,4\\ dx=0,05}} = \frac{1}{2}\pi \cdot 6{,}4 \cdot 0{,}05 = 0{,}5024(см^2)$$

Относительная ошибка в оценке площади составляет $\dfrac{dS}{S} = \dfrac{2dx}{x} = \dfrac{2 \cdot 0{,}05}{6{,}4} \approx 0{,}015 = 1{,}5\%$

5. Нахождение приближенного значения функции.

Пример 5: Найти приближенное значение функции $y = \sqrt{3x^2+1}\ при \quad x = 1{,}02$

Решение: Формула для приближенного вычисления функции: $\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy}$

$$\Delta x = 1{,}02 - 1 = 0{,}02, \qquad f(1) = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$$

$$dy = (\sqrt{3x^2+1})' dx = \frac{6xdx}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$$

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,02}} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 0{,}02}{\sqrt{3 \cdot 1^2+1}} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \Rightarrow \quad f(1{,}02) \approx f(1) + 0{,}03 = 2 + 0{,}03 = 2{,}03$$

Пример 6: Вычислить tg46^0, исходя из значения функции $y = tg\ x$ при $x=45^0$ и заменяя ее приращение дифференциалом.

Решение: $x = 45^0, \quad \Delta x = 46^0 - 45^0 = 1^0$.

Выразим углы в радианах: $x = \dfrac{\pi}{4}, \quad \Delta x = 46^0 - 45^0 = 1^0 = 0{,}0175 = dx$

$$dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Bigg|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ dx=0{,}0175}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot 0{,}0175=0{,}0350.\Rightarrow\quad \Delta y\approx 0{,}0350$$

$$tg46^0=y+\Delta y\Bigg|_{\substack{x=\frac{\pi}{4}\\ dx=0{,}0175}}\approx tg45^0+0{,}0350=1{,}0350.\quad \textit{По таблицам}\quad tg46^0=1{,}0355.$$

Пример 7: Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.

Решение: Рассмотрим функцию $y=\sqrt[5]{x}$. $\quad dy=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}dx$.

Вычислит приращение функции Δy при изменении x от 32 до 31, т.е.Δx = -1.

$$\Delta y\approx dy=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{x^4}}dx\Bigg|_{\substack{x=32\\ dx=-1}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot(-1)=-0{,}025\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt[5]{31}=y+\Delta y\Big|_{\substack{x=32\\ dx=-1}}\approx y+dy=\sqrt[5]{32}-0{,}025=1{,}975$$

Пример 8: Вычислить приближенно $1{,}998^5$.

Решение: Рассмотрим функцию $y=x^5$. $\quad x_1=1{,}998,\quad x_0=2,\quad \Delta x=-0{,}002$.

$f(x_1)=f(1{,}998)=1{,}998^5.\quad f(x_0)=f(2)=2^5=32$

$f'(x_0)\Delta x=5\cdot 2^4(-0{,}002)=5\cdot 16(-0{,}002)=-0{,}16.$

$1{,}998^5\approx 32-0{,}16=31{,}84.$

Пример 9: Найти приближенно $\sin 31^0$.

Решение: *функция* $y=\sin x$ *при* $x=31^0$ при точном значении x=30^0. $\quad$ *sin30⁰=0,5*,

$dx\approx dx=31^0-30^0=1^0\ (dx=0{,}0175)\quad dy=\cos 30^0\cdot 0{,}0175=0{,}866\cdot 0{,}0175=0{,}015$

$\sin 31^0\approx\sin 30^0+dy=0{,}5+0{,}015=0{,}515$

Найти приближенные значения: $1)2{,}005^4\quad 2)\sqrt{0{,}84}\quad 3)\cos 61^0$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Напишите, как обозначается дифференциал функции.
3. Объясните геометрический смысл дифференциала функции.
4. Дайте определение абсолютной и относительной погрешностей.
5. Выпишите формулу для вычисления приближенного числового значения функции.
6. Выпишите формулы для вычисления степени, корня, обратной величины.
7. Выпишите формулы для вычисления границ относительной погрешности алгебраической суммы, произведения, частного, степени и корня.

Рекомендуемая литература.

1. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М.«Высшая шко ла».2013г.
2. В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский. Элементы высшей математики.10-е изд., стереотипное. М. – Издательский Центр «Академия», 2014г. 319с

Тема 10.2. Вычисление неопределённого интеграла некоторых тригонометрических функций.

Цель:

1. Познакомиться с различными правилами вычисления неопределенного интеграла некоторых тригонометрических функций.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить материал по заданной теме.
2. Вычислить неопределенные интегралы, воспользовавшись конспектом: а) $\int \cos^5 x \cdot \sin x\, dx$

   $\acute{a})\int \sin\ x \cos x dx$

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал, предложенный в пособии.
2. Составить краткий конспект теоретического материала.
3. Решить предложенные задания. Вычислить: 1) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx$

   2) $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx$

Вопросы для изучения.

1. Познакомиться с правилами интегрирования синусов и косинусов кратных дуг. [1] стр.149, 205
2. Познакомиться с методом понижения степени подынтегральной функции (по предложенным материалам).
3. Познакомиться с методом замены переменных (по предложенным материалам).
4. Познакомиться с методом универсальной подстановки (по предложенным материалам).

1. Использование тригонометрических формул

Пример 1. Найти неопределенный интеграл. $\int \sin 5x \sin 7x dx$

Решение: $\int \sin 5x \sin 7x dx \overset{(1)}{=} (*)$. Используем формулу: $\sin\alpha \sin\beta = \dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$

$$(*) = \int \frac{\cos(5x-7x)-\cos(5x+7x)}{2}dx \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int \cos 2x dx - \frac{1}{2}\int \cos 12x dx \overset{(3)}{=}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 2x d(2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\int \cos 12x d(12x) \overset{(4)}{=}$$
$$= \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 12x}{24} + C, \text{ где } C = const$$

(1) Мы видим, что в подынтегральном выражении находится произведение двух функций. В интегральном исчислении нет удобной формулы для интегрирования произведения:, поэтому приходится прибегать к различным ухищрениям. В данном случае прерываем решение значком $(*)$ и поясняем, что используется тригонометрическая формула. Данная формула превращает произведение в сумму.

(2) Используем свойства линейности неопределенного интеграла – интеграл от суммы равен сумме интегралов; константу можно (и нужно) вынести за знак интеграла.

<u>! Справка:</u> При работе с тригонометрическими функциями следует помнить, что:

Косинус – это четная функция, то есть $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Поэтому: $\cos(5x-7x) = \cos(-2x) = \cos 2x$. Синус – функция нечетная: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(3) Под интегралами у нас сложные функции (косинусы не просто от x, а от сложного аргумента). Это простейшие из сложных функций, интегралы от них удобнее найти методом подведения под знак дифференциала.

(4) Используем табличную формулу $\int \cos x dx = \sin x + C$, единственное отличие, вместо «икса» у нас сложное выражение.

.Пример 2. Найти неопределенный интеграл. $\int tgx dx$

В таблице интегралов нет интеграла от тангенса и котангенса, но, тем не менее, такие интегралы найти можно.

$$\int tgx dx \overset{(1)}{=} \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \overset{(2)}{=} -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \overset{(3)}{=} -\ln|\cos x| + C, \text{ где } C = const$$

(1) Используем тригонометрическую формулу $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

(2) Подводим функцию под знак дифференциала.

(3) Используем табличный интеграл $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Пример 3. Найти неопределенный интеграл. $\int ctg^2 x dx$

Степени у нас будут потихоньку повышаться =). Сначала решение:

$$\int ctg^2 x dx \overset{(1)}{=} \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} \overset{(2)}{=} \int \frac{(1-\sin^2 x)dx}{\sin^2 x} \overset{(3)}{=} \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right) dx \overset{(4)}{=}$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx \overset{(5)}{=} -ctgx - x + C, \text{ где } C = const$$

(1) Используем формулу $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(2) Используем основное тригонометрическое тождеств $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, из которого следует, что $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

(3) Почленно делим числитель на знаменатель.

(4) Используем свойство линейности неопределенного интеграла.

(5) Интегрируем с помощью таблицы.

2. Понижение степени подынтегральной функции

Данный приём работает, когда подынтегральные функции нафаршированы синусами и косинусами в **чётных** степенях. Для понижения степени используют тригонометрические формулы $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, причем последняя формула чаще используется в обратном направлении: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$.

Пример 4. Найти неопределенный интеграл. $\int \cos^2 x dx$

Решение: $\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C$, где $C = const$

В данном примере применена формула $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ (понижения степени подынтегральной функции).

Пример 5. Найти неопределенный интеграл. $\int \sin^4 x dx$

Сначала решение, потом комментарии:

$$\int \sin^4 x dx \overset{(1)}{=} \int (\sin^2 x)^2 dx \overset{(2)}{=} \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx \overset{(3)}{=} \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx \overset{(4)}{=}$$
$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \overset{(5)}{=} \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \overset{(6)}{=}$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2}\right) dx \overset{(7)}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - 2\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4\cdot 2}\right) + C \overset{(8)}{=}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right) + C, \text{ где } C = const$$

(1) Готовим подынтегральную функцию для применения формулы $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

(2) Собственно применяем формулу.

(3) Возводим знаменатель в квадрат и выносим константу за знак интеграла.

(4) Используем формулу $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(5) В третьем слагаемом снова понижаем степень, но уже с помощью формулы $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

(6) Приводим подобные слагаемые (почленно разделим $\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2}$ и выполним сложение $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$).

(7) Собственно берём интеграл, правило линейности $\int (u \pm v)dx = \int u dx \pm \int v dx$ и метод подведения функции под знак дифференциала выполняем устно.

(8) Записываем ответ.

! В неопределенном интеграле нередко ответ можно записать несколькими способами

В только что рассмотренном примере окончательный ответ $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right)+C$, где $C=const$

Можно было записать иначе – раскрыть скобки и даже это сделать еще до интегрирования выражения, то есть вполне допустима следующая концовка примера:

$$...=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{\cos 4x}{2}\right)dx=\int\left(\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{\cos 4x}{8}\right)dx=$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8\cdot 4}+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{\sin 4x}{32}+C,\text{ где } C=const$$

Пример 10 Найти неопределенный интеграл. $\int\sin^2 x\cos^2 x dx$

Этот пример решается двумя способами, и у Вас могут получиться **два совершенно разных ответа** (точнее говоря, они будут выглядеть совершенно по-разному, а с математической точки зрения являться эквивалентными).

Любой интеграл вида $\int\sin^n(ax)\cos^m(ax)dx$, где n и m – **чётные** числа, решается методом понижения степени подынтегральной функции.

3. Метод замены переменной

Основной предпосылкой для использования метода замены является тот факт, что в подынтегральном выражении есть некоторая функция $\varphi(x)$ и её производная $\varphi'(x)$: $\int\varphi(x)\cdot\varphi'(x)dx$ (функции $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ не обязательно находятся в произведении)

Пример 6. Найти неопределенный интеграл. $\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^3 2x}$

Общий ориентир: в похожих случаях за t нужно обозначить функцию, которая находится в знаменателе.

$$\int\frac{\cos 2x dx}{\sin^3 2x}=(*)$$

Прерываем решение и проводим замену $t = \sin 2x$

Найдем новый дифференциал: $dt = (\sin 2x)'dx = \cos 2x \cdot (2x)'dx = 2\cos 2xdx$

Или, если короче $dt = 2\cos 2xdx$ Из полученного равенства по правилу пропорции выражаем нужное нам выражение: $\cos 2xdx = \dfrac{dt}{2}$

Теперь всё подынтегральное выражение у нас зависит только от t и можно продолжать решение

$$(*) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-2)}t^{-2} + C \overset{t=\sin 2x}{=}$$
$$= -\frac{1}{4\sin^2 2x} + C \text{ где } C = const$$

Цель замены – упростить подынтегральное выражение, в данном случае всё свелось к интегрированию степенной функции по таблице.

Пример 7. Найти неопределенный интеграл. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{tg 5x}dx}{\cos^2 5x}$

Пример 8. Найти неопределенный интеграл. $\displaystyle\int \cos^7 2x \sin 2xdx = (*)$

Здесь опять в подынтегральном выражении находятся синус с косинусом (функция с производной), но уже в произведении, и возникает дилемма – что, же обозначать за t, синус или косинус? **Общий ориентир: за t нужно обозначить ту функцию, которая, образно говоря, находится в «неудобном положении»**. Поэтому проведем замену: $t = \cos 2x$

$$dt = -2\sin 2xdx \Rightarrow \sin 2xdx = -\frac{dt}{2} \quad (*) = -\frac{1}{2}\int t^7 dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8} + C = -\frac{\cos^8 2x}{16} + C, \text{ где } C = const$$

Пример 9. Найти неопределенный интеграл. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 xdx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$

1) Функция, скорее всего, находится в знаменателе; 2) Функция находится в «неудобном положении».

Кстати, эти ориентиры справедливы не только для тригонометрических функций.

Под оба критерия (особенно под второй) подходит синус, поэтому напрашивается замена $t = \sin x$. В принципе, замену можно уже проводить, но сначала неплохо было бы разобраться, а что делать $\cos^3 x$? Во-первых, «отщипываем» один косинус:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$$

$\cos x dx$ мы резервируем под наш «будущий» дифференциал dt

А $\cos^2 x$ выражаем через синус с помощью основного тригонометрического тождества: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = \int \frac{(1-\sin^2 x) \cdot \cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}} = (*)$$

Вот теперь замена: $t = \sin x \quad dt = \cos x dx$

$$(*) = \int \frac{(1-t^2) \cdot dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int \left(t^{-\frac{4}{3}} - t^{\frac{2}{3}} \right) dt = -3t^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C \overset{t=\sin x}{=}$$
$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x} + C, \text{ где } C = const$$

Общее правило: Если в подынтегральной функции одна из тригонометрических функций (синус или косинус) находится в <u>нечетной</u> степени, то нужно от нечетной степени «откусить» одну функцию, а за t – обозначить другую функцию. Речь идет только об интегралах, где есть косинусы и синусы.

В рассмотренном примере в нечетной степени у нас находился косинус, поэтому мы отщипнули от степени один косинус, а за t обозначили синус.

4. Универсальная тригонометрическая подстановка

Универсальная тригонометрическая подстановка – это частый случай метода замены переменной. Её можно попробовать применить, когда «не знаешь, что делать». Но на самом деле есть некоторые ориентиры для ее применения. Типичными интегралами, где нужно применить универсальную тригонометрическую подстановку, являются следующие интегралы: $\int \frac{dx}{3+2\cos x - \sin x}$, $\int \frac{dx}{3-\sin x}$, $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$, $\int \frac{(7+\cos x)dx}{3+2\cos x - \sin x}$ и т.д.

Пример 10. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x} = (*)$

Универсальная тригонометрическая подстановка в данном случае реализуется следующим способом. Проведем замену: $z = tg\frac{x}{2}$.

Здесь удобнее находить дифференциал dx, для этого из равенства $z = tg\frac{x}{2}$, я выражаю x

$$arctgz = arctg\left(tg\frac{x}{2}\right) \quad arctgz = \frac{x}{2} \quad x = 2arctgz$$

$$dx = (2arctgz)'dz = \frac{2dz}{1+z^2}$$

На практике можно не расписывать так подробно, а просто пользоваться готовым результатом: $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$

! Выражение $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ справедливо только в том случае, если под синусами и косинусами у нас просто «иксы», для интеграла $\int \frac{dx}{3+2\cos 2x-\sin 2x}$ всё будет несколько иначе!

При замене $z = tg\frac{x}{2}$ синусы и косинусы у нас превращаются в следующие дроби: $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, эти равенства основаны на известных тригонометрических формулах: $\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$, $\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$

Итак, чистовое оформление может быть таким:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x} = (*)$$

Проведем универсальную тригонометрическую подстановку: $z = tg\frac{x}{2}$

$$x = 2arctgz \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1+z^2} \quad \sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$(*)\overset{(1)}{=}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3+\frac{2(1-z^2)}{1+z^2}-\frac{2z}{1+z^2}}\overset{(2)}{=}\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{3(1+z^2)+2(1-z^2)-2z}{1+z^2}}\overset{(3)}{=}$$

$$=2\int\frac{dz}{3+3z^2+2-2z^2-2z}\overset{(4)}{=}2\int\frac{dz}{z^2-2z+5}\overset{(5)}{=}2\int\frac{dz}{z^2-2z+1+4}\overset{(6)}{=}$$

$$=2\int\frac{d(z-1)}{(z-1)^2+2^2}\overset{(7)}{=}\frac{2}{2}arctg\left(\frac{z-1}{2}\right)+C\overset{(8)}{=}arctg\left(\frac{tg\frac{x}{2}-1}{2}\right)+C,$$

где $C=const$

(1) Производим в исходный интеграл подстановку: $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\sin x=\frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$.

(2) Приводим знаменатель к общему знаменателю.

(3) Избавляемся от четырехэтажности дроби, при этом $1+z^2$ у нас сокращается. Раскрываем скобки в знаменателе, двойку в числителе выносим за знак интеграла.

(4) Приводим подобные слагаемые в знаменателе.

(5) Интеграл $\int\frac{dz}{z^2-2z+5}$ решается *методом выделения полного квадрата.* Разложение $\int\frac{dz}{z^2-2z+1+4}$ является подготовкой для осуществления вышеуказанного приёма

(6) Выделяем полный квадрат и готовим интеграл для интегрирования.

(7) Интегрируем по табличной формуле $\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

(8) Проводим обратную замену, вспоминая, что $z=tg\frac{x}{2}$.

Рассмотрим похожий интеграл: $\int\frac{dx}{3+2\cos 2x-\sin 2x}$, а просто поймем, как проводить замену.

Здесь тоже проводится универсальная тригонометрическая подстановка: $z=tgx$. Обратите внимание, что аргумент под тангенсом **должен быть в два раза меньше**, чем под синусом и косинусом. Формулы $\sin 2x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos 2x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ сохраняют статус-кво, а вот дифференциал будет немного другой (я не зря недавно так подробно его расписал):

$$z = tgx$$

$$x = arctgz \Rightarrow dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

Интеграл $\int \frac{dx}{3+2\cos 3x - \sin 3x}$ решается путем замены $z = tg\frac{3x}{2}$ и т.д., всё точно так же, единственное отличие, дифференциал будет опять немного другой.

С помощью универсальной тригонометрической подстановки решаются и интегралы вроде такого:

Пример 11. Найти неопределенный интеграл. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$

Здесь перед применением универсальной тригонометрической подстановки необходимо понизить степени в знаменателе при помощи формул $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Объясните, в каких случаях удобно использовать при нахождении неопределенного интеграла метод замены переменных.

2. Объясните, в каких случаях удобно использовать при нахождении неопределенного интеграла метод универсальной подстановки.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.

2. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.

3. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010г.

Тема 10.5. Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла

Цель:

1. Научиться решать прикладные задачи на применение определенного интеграла, в частности: находить объёмы тел вращения с помощью определенного интеграла.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.
2. Вычислить объёмы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями: 1) $y = x^2 - 1, \quad y = 0$ 2) $x + 2y - 4 = 0, x = 0, \quad y = 0$ вокруг оси ОХ. 3) $y^2 = 9x, \quad y = 3x$ вокруг оси ОХ

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал, предложенный в пособии.
2. Составить краткий конспект теоретического материала.
3. Решить предложенные задания.

Вопросы для изучения.

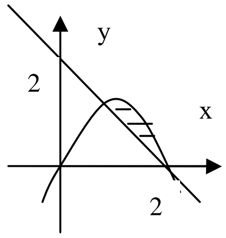
1. Познакомиться с понятием тела вращения, площади поперечного сечения фигуры. [1] стр.149, 205
2. Познакомиться с понятием конус, усеченный конус, шар, шаровой слой, шаровой сегмент. [1] стр.150
3. Познакомиться с понятием объёма фигуры. [1] стр.208, [2] стр.378 – 381
4. Формула для вычисления объёма тела вращения вокруг оси ОУ. [2] стр.378
5. Формула для вычисления объёма тела вращения вокруг оси ОХ. [2] стр. 379
6. Понятие параболоида вращения, эллипсоида, гиперболоида. Вывести формулы объёма для данных фигур. [2] стр.378 – 381
7. Составить краткий конспект.
8. Разобрать предложенные примеры:

Пример 1: Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2$ и прямой $y = 2x$ и $x \in [0;2]$.

Решение: $V = \pi\int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}\pi$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi$ (куб.ед.).

Пример 2: Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращении Ox. $y = 2x - x^2$, $y = -x + 2$.



$$V = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

$$V = \pi\int_1^2 (2x - x^2 + x - 2)^2 dx = \pi\int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)^2 dx =$$

$$= \pi\int_1^2 (x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4)dx =$$

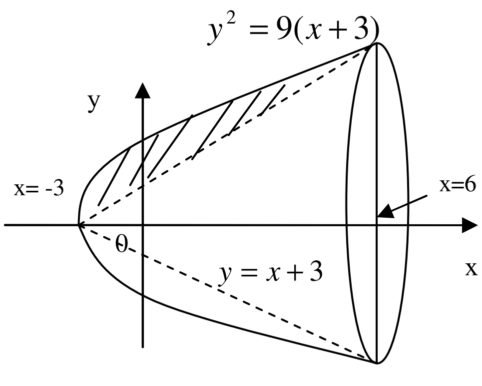
$$= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 6x^2 + 4x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \pi\left(\frac{32}{5} - 24 + \frac{104}{3} - 24 + 8 - \frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{13}{3} + 6 - 4\right) = \frac{\pi}{30}.$$

Ответ: $\frac{1}{30}\pi$ (куб.ед.).

Пример 3: Вычислить объемы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций, относительно оси вращения Ox. $y^2 = 9(x+3), x - y + 3 = 0$.

Решение: Построим данную фигуру. $y^2 = 9(x+3)$ - парабола, $y = x + 3$ - прямая.



Решив систему $\begin{cases} y^2 = 9(x+3) \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$, найдем точки пересечения параболы и прямой: A(-3; 0) и B (6; 9). Значит, пределами интегрирования будут *a = -3, в = 6.*

Искомый объем равен разности объёма V_1 параболоида, образованного вращением кривой $y^2 = 9(x+3)$, и объёма V_2 конуса, образованного вращением прямой $y = x + 3$:

$$V_1 = \pi\int_{-3}^{6} 9(x+3)dx = 9\pi\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{6} = 364{,}5\pi$$

$$V_2 = \pi\int_{-3}^{6} (x+3)^2\,dx = \frac{\pi}{3}(x+3)^3\Big|_{-3}^{6} = 243\pi$$

Ответ: $121{,}5\pi$ куб.ед.

$$V = V_1 - V_2 = 364{,}5\pi - 243\pi = 121{,}5\pi(\text{куб.ед.})$$

4. Решить задания:

Вычислить объёмы фигур, образованных вращением площадей, ограниченных указанными линиями:

1) $y = x^2 - 1,\quad y = 0$

2) $x + 2y - 4 = 0, x = 0,\quad y = 0$ вокруг оси ОХ

3) $y^2 = 9x,\quad y = 3x$ вокруг оси ОХ.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Объясните, как используется формула для вычисления объёма тела по площади его поперечного сечения.
2. Запишите формулы для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси ОХ.
3. Запишите формулы для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси ОУ.
4. Запишите формулу для вычисления объема параболоида вращения.
5. Запишите формулу для вычисления объема эллипсоида.
6. Запишите формулу для вычисления объема гиперболоида.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.
2. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.
3. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010г.

Раздел 11. Дифференциальные уравнения.

Тема 11.2. Решение задач естественнонаучного цикла на составление дифференциальных уравнений

Цель

1. Научиться составлять и решать дифференциальные уравнения для задач естественнонаучного цикла.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект изученного материала.
2. Решить задачи:

№1. Найти закон движения тела по оси ОХ, если оно начало двигаться из точки М (4; 0) со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

№ 2. Скорость растворения лекарственного вещества в таблетках пропорциональна количеству лекарства в таблетке. Известно, что при $t = 0$, $m = m_0$. Найти закон растворения таблетки (т.е. закон изменения массы), если период полурастворения таблетки равен Т.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал:

— Область применения дифференциальных уравнений и алгоритм решения задач, содержащих дифференциальные уравнения.

— Определение закона прироста численности населения.

— Определение зависимости концентрации вещества от времени.

— Задача на скорость охлаждения тела.

— Задача на нахождение закона движения тела.

2. Составить краткий конспект.
3. Решить предложенные задания:

Вопросы для изучения.

1. Область применения дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения являются одним из самых мощных средств математического решения практических задач. Особенно широко они используются для решения задач естественнонаучного цикла: механики, физики, химии и биологии. Во многих задачах геометрической оптики, геодезии, картографии и других областей естествознания возникает необходимость нахождения кривых по заданным свойствам проведенных к ним касательным. Обычно такие геометрические задачи решаются так же с помощью дифференциальных уравнений.

2. Алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений.

1) Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и её производной. Затем, используя известные сведения из физики, механики, электротехники и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, её производной и аргументом, т.е. составляют дифференциальное уравнение.
2) Определяют, к какому типу относится составленное уравнение и находят его общее решение.
3) Если в задаче даны начальные условия, то получают частное решение.

Пример 1: Точка движется с начальной скоростью *v_0 =4 м/с*. Найти закон движения, если ускорение точки задается уравнением $a(t) = 5v(t) - 6s(t)$, причём при *t=0 s=0*.

Решение: используя механический смысл первой и второй производной, перейдём к уравнению $s'' = 5s' - 6s$. Для его решения необходимо составить и решить характеристическое уравнение: $k^2 = 5k - 6, \quad k^2 - 5k + 6 = 0, \quad k_1 = 2, k_2 = 3.$

Запишем частные решения уравнения в виде $s_1 = e^{2t}$, $s_2 = e^{3t}$, тогда общее решение записано следующим образом: $s = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$. Найдём *v(t)*. $v(t) = s'(t) = 2C_1e^{2t} + 3C_2e^{3t}$. Используя начальные условия, составим систему:

$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = 4, \\ C_1 + C_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 4, \\ C_1 = -4. \end{cases}$ Закон движения имеет вид $s = 4e^{3t} - 4e^{2t} = 4e^{2t}(e^t - 1)$.

Ответ: $s = 4e^{2t}(e^t - 1)$.

3. Рост популяции бактерий.

Пример 2: Определить во сколько раз увеличится количество бактерий за 9 часов, если в течение 3 часов их количество изменилось от 100 до 200.

Решение. Опытным путём установлено, что скорость размножения бактерий, если для них имеется достаточный запас пищи и созданы другие необходимые внешние условия (например, отсутствие подавления бактерий другими видами), пропорциональна их количеству. Пусть *x* – количество бактерий в данный момент, тогда скорость изменения их количества равна производной $\dfrac{dx}{dt}$. Так как скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству, то существует k, что $\frac{dx}{dt} = kx$. Разделяем в дифференциальном уравнении переменные: $\frac{dx}{x} = kdt$.

Интегрируя, получаем: $\int \frac{dx}{x} = \int k\ dt$,

$\ln x = kt + \ln C$,

что после потенцирования даёт $x = Ce^{kt}$. Для нахождения C используем начальное условие: при $t=0$, $x=100$. Имеем: $Ce=100$, $C=100$, и, значит, $x=100\ e^{kt}$. Коэффициент e^k находим из условия: при $t=3$, $x=200$. Имеем: $200 = 100e^{3k}$, $e^k = \sqrt[3]{2}$. Искомая функция: $x = 100 \cdot 2^{t/3}$. При $t=9$, $x=800$.

Ответ: количество бактерий за 9 часов увеличится в 8 раз.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, каков порядок решения задач на составление дифференциальных уравнений?
2. Расскажите, где используются дифференциальные уравнения?
3. Объясните, всегда ли можно составить и решить дифференциальное уравнение?

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.
2. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2013г.
3. Н.В. Богомолов. Математика. СПО. М.- «Дрофа». 2010г.

Раздел 13. Тела и поверхности вращения

Тема 13.1. Вписанная и описанная призма в цилиндр, конус, шар.

Цель:

1. Ввести понятие вписанная и описанная фигура;
2. Рассмотреть правила для вписанных в призму цилиндра, конуса, шара;
3. Рассмотреть правила описания в призму цилиндра, конуса, шара.

Оснащение:

1. Данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить данную тему по материалам, предложенным в пособии и составить конспект по данной теме.

2. Выполнить практические задания:

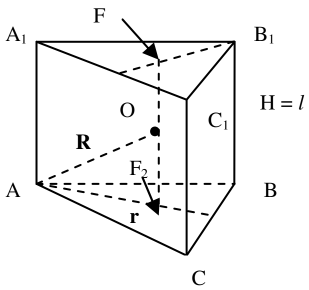
1)В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю её боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен
высоте цилиндра.

Порядок выполнения задания.

1. Разобрать теоретический материал.

1. Вписанная и описанная призма в цилиндр, конус, шар.

1) Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда она прямая и около ее основания можно описать окружность

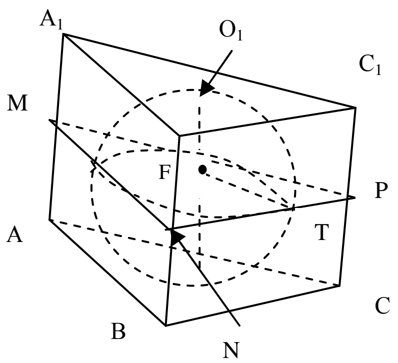


$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1$; $OF_1 = OF_2 = \frac{1}{2}H$;

$AA_1 \perp (ABC)$. $R^2 = r^2 + 0{,}25H^2$, где R –радиус описанного шара, r - радиус описанной окружности.

Около призмы можно описать шар тогда и только тогда, когда она прямая и около ее основания можно описать окружность.

2). В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в её перпендикулярное сечение можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы.

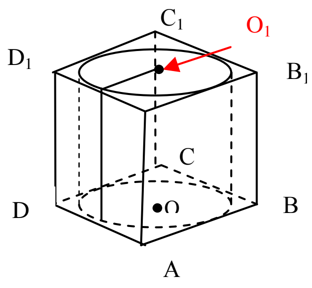


$(MNP) \perp AA_1$; $FO_1 = FT = R$; $O_1O = H$.

$R = r = 0{,}5\ H$, $R = \frac{2S_1}{P_1}$, где R - радиус вписанного шара, r – радиус вписанной окружности, S_1 площадь перпендикулярного сечения, P_1 – периметр перпендикулярного сечения.

В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в её перпендикулярное сечение можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте призмы.

3).

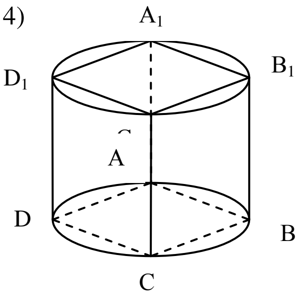


Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

Призмой, описанной около цилиндра, называется призма, у которой плоскостями оснований являются плоскости оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра.

В прямую призму можно вписать цилиндр, если в её основание можно вписать окружность.

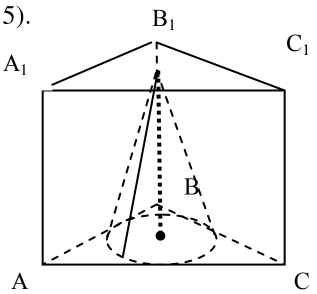
4)



Призмой, вписанной в цилиндр, называется такая призма, у которой плоскостями являются плоскости оснований цилиндра, а боковыми ребрами – образующие цилиндра.

Около прямой призмы можно описать цилиндр, если около её основания можно описать окружность.

5).



Прямой круговой конус можно вписать в призму, если в многоугольник основания призмы можно вписать окружность, а прямая, проходящая через центр этой окружности и перпендикулярная к плоскости основания, пересекает верхнее основание призмы (эта прямая является осью симметрии конуса). Высота конуса равна высоте призмы.

6. Прямой круговой конус описан около призмы, если все вершины верхнего основания призмы лежат на боковой поверхности конуса, а нижнее основание призмы лежит в плоскости основания конуса, следовательно, около основания призмы можно описать окружность; нижнее основание призмы не вписано в основание конуса.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Перечислите условия, при которых в шар можно вписать в призму.
2. Покажите, где расположен центр вписанного в призму шара?
3. Сформулируйте признак описанной около шара призмы.
4. Сформулируйте условия, при которых можно в призму вписать цилиндр.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.
2. Геометрия 10 – 11: учеб. для общеобразоват. учреждений/Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.- 17 изд.-М.: Просвещение, 2014. – 206с.

Тема 13. 1.. Вписанная и описанная пирамида в цилиндр, конус, шар.

Цель:

1. Ввести понятие вписанная и описанная фигура;
2. Рассмотреть правила для вписанных в пирамиду цилиндра, конуса, шара;
3. Рассмотреть правила описания в пирамиду цилиндра, конуса, шара.

Задания:

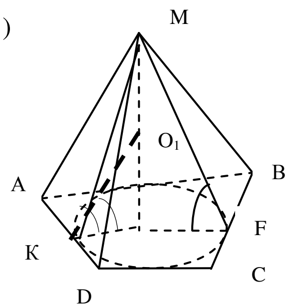
1. Составить конспект по данной теме.
2. .Выполнить практические задания:

У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

Порядок выполнения.

1. Разобрать теоретический материал.

1)



Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар. Центр шара лежит в точке пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла любого двугранного при основании.

MO_|_(ABCD), OF = r – радиус вписанной в основание окружности. KO_1 – биссектриса ∟MKO; OO_1 = R - радиус вписанного в пирамиду шара.

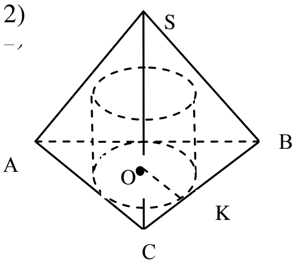
В правильную пирамиду всегда можно вписать шар. Проекция шара на основание – круг, не вписанный в многоугольник основания, но лежащий в плоскости оси.

Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около её основания можно описать окружность (треугольная пирамида, четырехугольная, у которой сумма противолежащих углов основания равна 180^0).

Центр описанного шара лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр окружности, описанной около основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру и проведенной через середину этого ребра.

Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равнонаклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар. Центр шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты пирамиды (или её продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

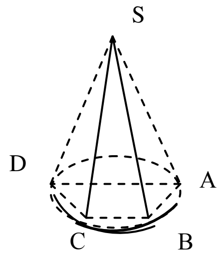
2)



В пирамиду можно вписать прямой круговой цилиндр, причем окружность одного из оснований цилиндра касается всех боковых граней пирамиды, другое основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, не является вписанным в многоугольник основания; если в многоугольник основания пирамиды можно вписать окружность.

3). Пирамиды считается вписанной в цилиндр, если её основание лежит в плоскости одного из оснований цилиндра и является многоугольником, вписанным в окружность основания цилиндра, а вершина пирамиды находится в плоскости другого основания цилиндра.

4)



Пирамидой, вписанной в конус, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Перечислите условия, при которых в шар можно вписать в пирамиду, призму.
2. Покажите, где расположен центр вписанного в пирамиду шара?
3. Сформулируйте признак описанной около шара пирамиды.
4. Сформулируйте условия, при которых можно в пирамиду вписать цилиндр.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.

2. Геометрия 10 – 11: учеб. для общеобразоват. учреждений/Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.- 17 изд.-М.: Просвещение, 2014. – 206с.

.

Раздел 14. Измерения в геометрии.

Тема 14.5. Нахождение площади и объёма вписанной и описанной призмы в цилиндр, конус, шар.

Цель:

1. Научиться решать задачи на нахождение площади и объёма на комбинацию тел: призмы, цилиндра, конуса и шара.

Задания:

1. Выписать формулы для нахождения площади и объема призмы, цилиндра, конуса, шара, сферы.
2. Выписать формулы для нахождения радиуса вписанной и описанной окружности в треугольники, четырехугольники.
3. Выписать формулы для нахождения площадей плоских фигур.
4. Выполнить практические задания:

1) Дана правильная четырехугольная призма, О – центр описанного шара, ребро призмы равно 2 см, высота призмы – 1 см. Найдите объём шара.
2) Дана правильная треугольная призма. О – центр описанного шара. Ребра основания равно 3 см, высота призмы – 2 см. O_1, O_2 – центры вписанной в основания окружностей. $O_1O_2 \perp (ABC)$. Найти площадь шара.

Порядок выполнения.

1. Составить краткий конспект.

Вопросы для изучения.

1. Площадь боковой, полной поверхности призмы. Объём призмы.
2. Площадь боковой, полной поверхности цилиндра. Объём цилиндра.
3. Площадь боковой, полной поверхности конуса. Объём конуса.
4. Площадь сферы. Объём шара.

5. Площади треугольников: прямоугольного, равностороннего, остроугольного (через полупериметр и радиус вписанной окружности; формула Герона; через радиус описанной окружности).
6. Площади четырехугольников: прямоугольника, квадрата, ромба,
7. параллелограмма, трапеции.
8. Решить практическое задание:

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, что такое призма, вписанная в цилиндр (описанная около цилиндра)?
2. Расскажите, что такое касательная плоскость к цилиндру?
3. Поясните, что такое призма, вписанная в конус (описанная около конуса)?
4. Запишите формулы для нахождения площади и объёма призмы, цилиндра, конуса.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.
2. Геометрия 10 – 11: учеб. для общеобразоват. учреждений/Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.- 17 изд.-М.: Просвещение, 2014. – 206с.

14.5. Нахождение площади и объёма вписанной и описанной пирамиды в цилиндр, конус, шар.

Цель:

1. Научиться решать задачи на нахождение площади и объёма на комбинацию тел: пирамиды, цилиндра, конуса и шара.

Задания:

1. Выписать формулы для нахождения площади и объема пирамиды, цилиндра, конуса, шара, сферы.
2. Выписать формулы для нахождения радиуса вписанной и описанной окружности в треугольники, четырехугольники.

3. Выписать формулы для нахождения площадей плоских фигур.

4. Выполнить практические задания:

1) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, боковое ребро равно 12 см. Найдите объем описанного шара.

2) Площадь поверхности правильного тетраэдра равна $30\sqrt{3}$ см^2. Найдите площадь поверхности конуса, вписанного в этот тетраэдр.

Порядок выполнения.

1. Составить краткий конспект.

Вопросы для изучения.

1. Площадь боковой, полной поверхности пирамиды. Объём пирамиды.
2. Площадь боковой, полной поверхности цилиндра. Объём цилиндра.
3. Площадь боковой, полной поверхности конуса. Объём конуса.
4. Площадь сферы. Объём шара.
5. Площади круга.
6. Решить практическое задание:

Обучающиеся должны владеть учебной информацией в объеме, указанном в рабочей программе дисциплины, и быть готовыми отвечать по всем вопросам, приведенным ниже.

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Назовите формулы для нахождения объёма пирамиды, конуса, шара, цилиндра.
2. Покажите, где расположен шара, вписанного в пирамиду?
3. Запишите формулу для нахождения площади круга.

Рекомендуемая литература

1. Математика: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования. М.И. Башмаков. – 9-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014.- 256с.
2. Геометрия 10 – 11: учеб. для общеобразоват. учреждений/Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.- 17 изд.-М.: Просвещение, 2014. – 206с.

Раздел 15. Элементы теории вероятности и математической статистики.

Тема 15.1. Формула бинома Ньютона. Свойства биноминальных коэффициентов. Треугольник Паскаля.

Цель:

1. Расширение знаний курсантов по комбинаторике и формулам сокращенного умножения.

Задания:

1. Изучить понятие бинома Ньютона
2. Изучить свойства бинома и биномиальных коэффициентов. Типовые примеры.
3. Составить конспект изученного материала.
4. Решить практические задания:

1) Разложить по формуле бином $(a-\sqrt{2})^6$

2) Найти номер члена разложения бинома $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})^6$, не содержащего x.

Порядок выполнения.

1. Понятие бинома Ньютона.

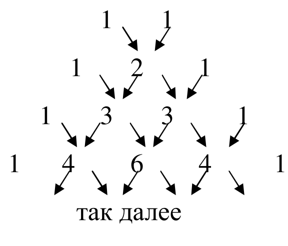
Биномом Ньютона называют разложение вида:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n =$$
$$= a^n + n a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \ldots + \frac{n!}{(n-m)!\,m!} a^{n-m} b^m + \ldots + b^n,\ где\ m < n$$

Но, строго говоря, всю формулу нельзя назвать биномом, так как «бином» переводится как «двучлен». Кроме того, формула разложения была известна еще до Ньютона, Исаак Ньютон распространил это разложение на случай n<0 и n – дробного.

Цель изучения бинома Ньютона – упрощение вычислительных действий.

Компоненты формулы «бином Ньютона»: правая часть формулы – разложение бинома;



$C_n^0;\ C_n^1;\ \ldots\ C_n^n$ – биномиальные коэффициенты, их можно получить с помощью ***треугольника Паскаля*** (пользуясь операцией сложения).

Практическая значимость треугольника Паскаля заключается в том, что с его помощью можно запросто восстанавливать по памяти не только известные формулы квадратов суммы и разности, но и формулы куба суммы (разности), четвертой степени и выше.

Например, четвертая строчка треугольника как раз наглядно демонстрирует биномиальные коэффициенты для бинома четвертой степени:

$$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3 b + 6\cdot a^2 b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$$

Альтернатива треугольнику Паскаля:

1) перемножить почленно четыре скобки:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b) = a^4 + \ldots;$$

2) вспомнить разложение бинома Ньютона четвертой степени:

$$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^3 b^1 + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 a^1 b^3 + C_4^4 a^0 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4a^1 b^3 + 1$$

общий член разложения бинома n-й степени: $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$, $m = 0,1,2,\ldots n$,

где T – член разложения; $(m+1)$ – порядковый номер члена разложения.

2. Свойства бинома и биномиальных коэффициентов.

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$

2. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома, то есть равно $(n+1)$

3. Сумма показателей степеней a и b каждого члена разложения равна показателю степени бинома, то есть n

Доказательство

Рассмотрим $(m+1)$-й член разложения: $T_{m+1} = C_n^m a^{n-m} b^m$

Сумма показателей степеней a и b: $(n-m)+m = n$ Ч.т.д.

4. Биномиальные коэффициенты членов разложения, равноотстоящих от концов разложения, равны между собой: $C_n^m = C_n^{n-m}$ (правило симметрии)

5. Сумма биномиальных коэффициентов всех членов разложения равна 2^n

Доказательство

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n$$

Пусть $a = 1, b = 1$, тогда: левая часть равна 2^n;правая часть равна $C_n^0 1^n 1^0 + C_n^1 1^{n-1} 1^1 + C_n^2 1^{n-2} 1^2 + \ldots + C_n^m 1^{n-m} 1^m + \ldots + C_n^n 1^0 1^n$

Тогда: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots C_n^n$ Ч.т.д.

6. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах и равна 2^{n-1}

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1}$$

7. Правило Паскаля: $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

8. Любой биномиальный коэффициент, начиная со второго, равен произведению предшествующего биномиального коэффициента и дроби $\frac{n-(m-1)}{m}$

$$C_n^m = C_n^{m-1} \cdot \frac{n-(m-1)}{m}.$$

3. Типовые задачи по теме «Бином Ньютона».

К типовым (стандартным) заданиям по данной теме можно отнести задачи на вычисление, среди которых:

1. Найти член (номер члена) разложения бинома
2. Вывести бином по известным членам разложения (по известной сумме)
3. Вычислить сумму биномиальных коэффициентов разложения бинома

и другие.

Пример 1: В биномиальном разложении $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$ найти член разложения, не содержащий x

Решение

$$T_{m+1} = C_{18}^m \left(x^3\right)^{18-m} \left(\frac{1}{x^3}\right)^m = C_{18}^m \; x^{54-3m-3m} = C_{18}^m \; x^{54-6m}$$

Так как в разложении мы ищем член не содержащий x, то $54 - 6m = 0 \Rightarrow m = 9$

Тогда $T_{9+1} = C_{18}^9 = \frac{18!}{(18-9)!\,9!} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} = 48620$

Ответ: 48620

Пример2: Доказать, что при любом натуральном n число $\left(4^n + 15n - 1\right)$ делится на 9

Доказательство

1 способ:

$$4^n = (3+1)^n = 3^n + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + ... + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1$$

$$4^n + 15n - 1 = \left(3^n + C_n^{n-1} \cdot 3^{n-1} + C_n^{n-2} \cdot 3^{n-2} + ... + C_n^2 \cdot 3^2 + C_n^1 \cdot 3^1 + 1\right) + 15n - 1 =$$

$$= 3 \cdot \left(3^{n-1} + n \cdot 3^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-3} + ... + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^1 + 6n\right) =$$

Ч.т.д.

$$= 3 \cdot 3 \cdot \left(3^{n-2} + n \cdot 3^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-4} + ... + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^0 + 2n\right) \vdots 9$$

2 способ:

Начнем рассматривать бином в общем виде:

$$(x+1)^n = x^n + n\cdot x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^2 + n\cdot x + 1 =$$

$$= x^2 \cdot \underbrace{\left(x^{n-2} + n\cdot x^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-4} + \ldots + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^0 \right)}_{\text{обозначим выражение в скобках за } A} + n\cdot x + 1 = A\cdot x^2 + n\cdot x + 1$$

Тогда $4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = A\cdot 3^2 + n\cdot 3 + 1 + 15n - 1 = 9A + 18n = 9(A+2n) \,\vdots\, 9$ Ч.т.д

Пример 3. Решить уравнение $(x-2)^6 + (x-4)^6 = 64$

Решение

Осуществим замену: $x - 3 = y$

Тогда уравнение перепишем: $(y+1)^6 + (y-1)^6 = 64$

Применим формулу бинома к левой части уравнения:

$$(y+1)^6 + (y-1)^6 = y^6 + 6y^5 + 15y^4 + 20y^3 + 15y^2 + 6y + 1 +$$
$$+ y^6 - 6y^5 + 15y^4 - 20y^3 + 15y^2 - 6y + 1 = 2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2$$

В итоге $2y^6 + 30y^4 + 30y^2 + 2 = 64 \iff \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Ответ: $x = 2;\ x = 4$.

Пример4: Раскрыть скобки и привести подобные члены в выражении $(x + y)^5$.

Решение.

Пятая строка треугольника Паскаля имеет вид: 1 5 10 10 5 1. Поэтому

$(x + y)^5 = 1x^0y^5 + 5x^1y^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y^1 + 1x^5y^0$.

4. Решить практические задания: Решить практические задания:

Вопросы для самопроверки и контроля.

1. Расскажите, для чего необходима формула бинома Ньютона?
2. Запишите формулы бинома Ньютона.
3. Расскажите, что представляет из себя треугольник Паскаля.

Рекомендуемая литература.

1. С.М. Никольский, М.К. Потапов и др. Алгебра и начала математического анализа, 11 класс, 8-е издание. М.-«Просвещение». 2013.