МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информационных систем и программного обеспечения

Методические указания к выполнению работы по темам «Интегральное исчисление функций одной переменной. Дифференциальные уравнения» для обучающихся заочной формы обучения направлений подготовки естественно-технологического института

Мурманск

2020 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии содержатся методические рекомендации к изучению теоретического материала и выполнению работы по темам «Комплексные числа», «Интегральное исчисление функции одной переменной» и «Дифференциальные уравнения», варианты работ и список рекомендуемой литературы.

В результате изучения этих тем обучающиеся должны:

• знать, что такое мнимая единица и комплексное число, уметь производить операции над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах; уметь решать простейшие алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел;

• изучить основные методы интегрирования;

• получить представление об определенном интеграле и его свойствах, научиться вычислять его по формуле Ньютона–Лейбница;

• научиться исследованию несобственных интегралов первого и второго рода на сходимость и расходимость;

• научиться использовать определенный интеграл для решения геометрических задач, таких как вычисление площади плоской фигуры, объема тела вращения, длины дуги плоской кривой.

• знать основные понятия теории дифференциальных уравнений (порядок дифференциального уравнения, его общее и частное решения, начальные условия и др.) и уметь определять тип дифференциального уравнения;

• знать и уметь использовать методы решения основных типов дифференциальных уравнений 1-го порядка а также дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающих понижение порядка;

• уметь решать линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка методом повышения порядка.

Данные методические рекомендации включают справочный материал, необходимый для выполнения работы, решение примерного варианта, в котором имеются ссылки на используемый справочный материал.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ТЕМАМ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА», «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ» И «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

В таблице 1 приведены наименования тем в соответствии с содержанием работы и ссылки на литературу по этим темам. Перед выполнением работы рекомендуется изучить соответствующий теоретический материал и решить указанные в таблице задачи.

Таблица 1.

Содержание (темы)	Литература
1	2
Комплексные числа. Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах. Решение простейших алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел	[1], гл. VI, § 27–28; [3], гл. 14, § 6.1; [6], гл. 9, № 1–52
Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования: метод замены переменной, интегрирование по частям	[1], гл.VII, §29, 30; [3], гл.7, §1-4; [4], гл.IX, №1337-1350, 1368-1371, 1373-1375; 1392-1396; [6], гл.6, № 2-14, 36-50, 102, 103, 108, 109, 114, 118-120
Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых тригонометрических функций	[1], гл.VII, §31, 32; [3], гл.7, §5, 6.3; [4], гл.IX, №1410-1416, 1428-1434, 1489-1490, 1494-1505; [6], гл.6, № 172, 177-180, 193, 194-199, 230-242
Определенный интеграл и его свойства. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона–Лейбница. Несобственные интегралы первого и второго рода	[1], гл.VIII, §35-40; [3], гл.8, §1, 4-9, 11; [4], гл.X, №1552-1554, 1559-1560; 1572 -1578; [6], гл.6, № 255-266, 355-360, 366-369
Приложение определенного интеграла: вычисление пло-	[1], гл.VIII, §41.1, 41.2; [3], гл.8, §10.1, 10.2;

щади плоской фигуры	[4], гл.X, №1596-1601; [6], гл.6, № 290-294,301, 302
Приложение определенного интеграла: вычисление объема тела вращения	[1], гл. VIII, §41.4; [3], гл.8, §10.4; [4], гл.X, №1628-1631; [6], гл.6, № 319-323
Приложение определенного интеграла: вычисление длины дуги плоской кривой	[1], гл. VIII, §41.3; [3], гл.8, §10.3; [4], гл.X, №1613-1618; [6], гл.6, № 307-312
Дифференциальные уравнения 1-го порядка	[2], гл.I, §1.1, 1.2, 2.1-2.4; [3], гл.15, § 1.1- 1.6; [5], гл.IV, № 515-517, 550-556,603-608; [6], гл.14, № 32-38, 43-54, 61-64, 139-140
Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка	[2], гл.I, §3.1, 3.2; [3], гл.15, § 2.1-2.2; [5], гл. IV, № 651, 652, 654, 659-665
Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами	[2], гл.I, §3.4, 4.1, 5.1-5.3; [3], гл.15, § 3-4; [5], гл.IV, № 696-699; 721-726; [6], гл.14, № 98-111, 180, 184, 185
Системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка	[2], гл.I, § 6.1-6.2; [5], гл. IV, № 778-782; [6], гл.14, № 208-213

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА»

1. Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{1}$$

где x, y – действительные числа, а i – *мнимая единица*, т.е. число, для которого выполнено равенство $i^2 = -1$.

Если $x = 0$, то комплексное число $z = 0 + iy$ называется *чисто мнимым*.

Если $y = 0$, то комплексное число $z = x + i0 = x$ является действительным, в частности, если $x = y = 0$, то $z = 0$.

На множестве комплексных чисел алгебраическое уравнение n-й степени вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где a_k – числа, $a_0 \neq 0$, имеет ровно n корней.

Пример. Решим уравнение: $x^2 + 9 = 0$.

$$x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i.$$

Следовательно, уравнение имеет 2 корня: $x_1 = 3i, x_1 = -3i$.

На координатной плоскости Oxy комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x; y)$ или радиус-вектором этой точки $\overline{OM}$ (рис. 12), где $x = \mathrm{Re}z$ – *действительная часть числа* z, $y = \mathrm{Im}z$ – *мнимая часть числа*.

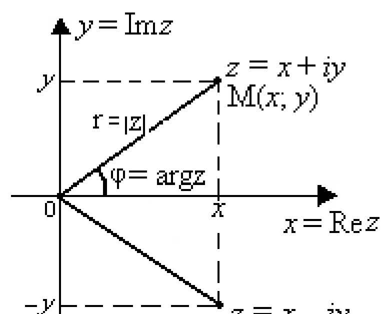

Рис. 12.

Число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$. Геометрически точки z и $\bar{z}$ симметричны относительно оси Ox (рис. 12).

Модулем комплексного числа называется действительное неотрицательное число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Геометрически модуль комплексного числа $|z| = r$ – это модуль вектора $\overline{OM}$ (рис. 12).

Комплексное число можно задать либо парой действительных чисел (декартовы координаты точки $(x; y)$), либо его модулем и величиной угла φ между вектором $\overline{OM}$ и положительным направлением оси Ox (полярные координаты точки $(r;\, \varphi)$). Величина угла φ называется *аргументом* комплексного числа.

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, а с точностью до слагаемого $2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Значение аргумента, заключенное в промежутке $(-\pi;\, \pi]$, называется *главным значением аргумента* и обозначается arg*z*, тогда можно записать:

$$\varphi = \arg z + 2\pi n,\ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

Для комплексного числа $z = 0$ аргумент не определен, его модуль $r = 0$.

Запись комплексного числа в виде (10) называют *алгебраической формой* комплексного числа.

Если использовать формулы связи между декартовыми и полярными координатами $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, то можно записать *тригонометрическую форму* комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\ , \qquad (3)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\ \ \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}\ ,\quad \varphi = \arg z\ . \qquad (4)$$

Для определения главного значения аргумента можно использовать формулы:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если } M \in I \text{ четверти или } M \in IV \text{ четверти,} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{если } M \in II \text{ четверти,} \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{если } M \in III \text{ четверти,} \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x = 0,\ y < 0. \end{cases} \qquad (5)$$

<u>Пример.</u> Получим тригонометрическую форму комплексного числа $z = -2-2i$, используя формулы (4) и (5).

$x = -2,\ y = -2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}\ ,$

$(-2;-2)\in III$ четверти $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\arg z = arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi = arctg1 - \pi = \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{3\pi}{4} \in (-\pi;\pi]$,

следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа z для $\varphi = \arg z$ имеет вид:

$$z = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

2. Действия над комплексными числами

Равенство двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ означает равенство их действительных и мнимых частей: $x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме определяются следующим образом. Если $z_1 = x_1 + iy_1$,
$z_2 = x_2 + iy_2$, то

1) $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$;

2) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$;

3) $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \dfrac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)} = \dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$, если $z_2 \neq 0$.

<u>Пример.</u> Даны числа $z_1 = 4 - i$ и $z_2 = 1 + 3i$. Вычислить $\dfrac{\bar{z}_1}{z_1+z_2}$.

Найдем $\bar{z}_1 = 4 + i,\ z_1 + z_2 = 4 - i + 1 + 3i = 5 + 2i$, затем выполняем деление при помощи домножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю:

$$\frac{\bar{z}_1}{z_1+z_2} = \frac{4+i}{5+2i} = \frac{(4+i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{20-8i+5i-2i^2}{25-4i^2} = \frac{22-3i}{29} = \frac{22}{29} - \frac{3}{29}i$$

(при вычислениях учтено, что $i^2 = -1$).

Умножение, деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме определяются следующим образом:

если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

1) $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$, если $r_2\neq 0$;

если $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $n\in N$, то

3) $z^n=r^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$; (6)

4) $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=0,1,2,..n-1$.

В ответ записываются главные значения аргумента полученного результата, заключенные в промежутке $(-\pi;\pi]$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для всех x из этого интервала выполняется равенство

$$F'(x)=f(x). \tag{7}$$

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется множество всех первообразных этой функции, то есть неопределенный интеграл – это выражение вида $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$.

Процедуру нахождения неопределенного интеграла называют *интегрированием*. При интегрировании используют: таблицу интегралов (таблица 2), свойства интегралов и специальные методы интегрирования, основные из которых – замена переменной и интегрирование по частям.

Таблица 2.

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \ (\alpha \neq -1)$;	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$;	11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert + C$;
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;	12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;
5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm \alpha}\right\rvert + C$;
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;	15. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$;
7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$;	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$.
8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$;	
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;	

2. Свойства неопределенного интеграла. Замена переменной под знаком неопределенного интеграла

При интегрировании функций наиболее часто используются следующие его свойства:

$$1)\ \int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int (f_1(x) + f_2(x))dx;$$

$$2)\ \int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx;$$

$$3)\ \int dz = z + C.$$

<u>Пример 1</u>. Найти $\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx$.

Решение. Воспользуемся свойствами 1-3, а также таблицей интегралов:

$$\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx = \int \cos x\, dx + 3\int \operatorname{ctg} x\, dx - 5\int dx = \sin x + 3\ln\lvert\sin x\rvert - 5x + C.$$

Ответ: $\int (\cos x + 3\operatorname{ctg} x - 5)dx = \sin x + 3\ln\lvert\sin x\rvert - 5x + C$.

Одним из основных методов интегрирования является *метод замены переменной* (метод подстановки), который в некоторых случаях позволяет свести заданный интеграл к табличному интегралу.

Замена переменной под знаком неопределенного интеграла осуществляется по формулам:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$$

или

$$\int f(z(x))\,z'(x)dx = \int f(z)dz\,. \tag{8}$$

Пример 2. Найти $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$.

Решение. Воспользуемся формулой (8) и таблицей интегралов:

$$\int \cos x\ e^{\sin x}\ dx = \left|\begin{matrix}\text{замена}\\ \sin x = z;\ \cos x dx = dz\end{matrix}\right| = \int e^z dz = e^z + C = \left|\begin{matrix}\text{обратная замена}\\ z = \sin x\end{matrix}\right| = e^{\sin x} + C.$$

Ответ: $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx = e^{\sin x} + C$.

Этот интеграл можно взять, используя подведение под знак дифференциала части подинтегральной функции (не прописывая замену переменной)

$$\int \cos x\ e^{\sin x}\ dx = \int e^{\sin x}\ (\sin x)' dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C\,.$$

Наиболее часто прием подведения под знак дифференциала используется при линейной замене переменной интегрирования:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b)\,, \tag{9}$$

так как $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$.

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}}$.

Решение. Согласно формуле (9) можно записать:

$$dx = \frac{1}{3}d(3x-5) \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}} = \int \frac{\frac{1}{3}d(3x-5)}{(3x-5)^{2/3}}\,.$$

Теперь воспользуемся свойством 2, а также таблицей интегралов:

$$\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}} = \frac{1}{3}\int (3x-5)^{-2/3} d(3x-5) = \frac{1}{3}\frac{(3x-5)^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{1}{3}\frac{(3x-5)^{1/3}}{1/3} + C = (3x-5)^{1/3} + C.$$

Ответ: $\int \frac{dx}{(3x-5)^{2/3}} = (3x-5)^{1/3} + C$.

3. Интегрирование по частям

Формулой *интегрирования по частям* называют следующую формулу:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{10}$$

Обычно за dv принимают такое выражение, интегрирование которого не вызывало бы трудностей, а за u – функцию, дифференцирование которой приводит к ее упрощению.

Можно выделить два основных класса интегралов, берущихся по частям:

1) $\int P_n(x)\sin bx\,dx$; $\int P_n(x)\cos bx\,dx$; $\int P_n(x)e^{bx}dx$; $\int P_n(x)a^{bx}\,dx$

– здесь за u принимают целый многочлен $P_n(x)$, за dv – оставшееся выражение, то есть, например $\sin bx\,dx$.

2) $\int P_n(x)\arcsin bx\,dx$; $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,bx\,dx$; $\int P_n(x)\ln bx\,dx$

– здесь за u принимают обратную функцию, например, $\arcsin bx$, за dv – оставшееся выражение, то есть $P_n(x)dx$.

4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью $R(x)$ называют отношение двух целых многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. Для интегрирования рациональной дроби необходимо предварительно разложить ее, т.е. представить $R(x)$ в виде суммы простейших дробей видов:

$$\frac{A}{x-\alpha},\quad \frac{B}{(x-\alpha)^k},\quad \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r},$$

где k, r – целые положительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

Если дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильная ($k \ge r$), то необходимо предварительно выделить целую часть дроби.

5. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Для нахождения интегралов видов $\int \sin^2 x\,dx$ и $\int \cos^2 x\,dx$ используют тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x). \tag{11}$$

Для нахождения интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R – рациональная функция (не содержащая sin$x$ и cos$x$ под знаком корней), используют универсальную подстановку: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, которая сводит $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ к интегралу от рациональной функции, т.к.

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t \;\Rightarrow\; x = 2\mathrm{arctg}\, t \;\Rightarrow\; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{и} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{12}$$

5. Формула Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{13}$$

если $F'(x) = f(x)$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$.

Пример 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{\pi/2} (12x+3)\cos(13x)dx$.

Решение. Это определенный интеграл, берущийся по частям, поэтому, применяя формулу (10), а затем формулу Ньютона–Лейбница, получаем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (12x+3)\cos(13x)dx = \left| \begin{matrix} u = 12x+3; & du = 12dx; \\ dv = \cos 13dx; & v = \int dv = \int \cos 13x dx = \frac{1}{13}\int \cos(13x)d(13x) = \frac{1}{13}\sin 13x \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{13}(12x+3)\sin 13x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(13x)12dx = \left(\frac{1}{13}(12x+3)\sin 13x + \frac{12}{13\cdot 13}\cos 13x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{6\pi+3}{13} - \frac{12}{169} = \frac{78\pi+27}{169} \approx 1{,}6.$$

Ответ: $\int_0^{\pi/2} (12x+3)\cos(13x)dx = \frac{78\pi+27}{169} \approx 1{,}6$.

7. Несобственные интегралы первого и второго рода

Примером *несобственного интеграла первого рода* является интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx \tag{14}$$

Интегралы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx\,, \tag{15}$$

где a – точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\,, \tag{16}$$

где b – точка бесконечного разрыва функции $f(x)$, относятся к *несобственным интегралам второго рода*.

Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует конечный предел в правой части равенства. Если же предел не существует или равен бесконечности, то интеграл называется *расходящимся*.

Пример 5. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

Решение. Это несобственный интеграл первого рода, поэтому

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+2x+2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+1)^2+1} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}(x+1)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}(b+1)-\operatorname{arctg}1) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Ответ: интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ сходится и равен $\frac{\pi}{4}\approx 0{,}8$.

Пример 6. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^4}$.

Решение. Это несобственный интеграл второго рода, так как $x = 1$ – точка разрыва второго рода подинтегральной функции, поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{(x-1)^4} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{(x-1)^3}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = -\frac{1}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{1^3}-\frac{1}{\varepsilon^3}\right)\Bigg| = \infty,$$

следовательно, интеграл расходится.

Ответ: интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^4}$ расходится.

8. Вычисление площади плоской фигуры в декартовой системе координат (ДСК)

Криволинейной трапецией в ДСК называется фигура, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x) \ge 0$ для $x \in [a; b]$ (рис. 1).

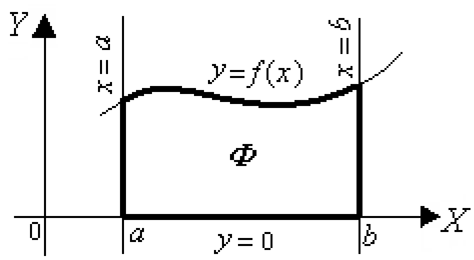

Рис. 1.

Формула для вычисления площади криволинейной трапеции:

$$S_\phi = \int_a^b f(x)dx. \qquad (17)$$

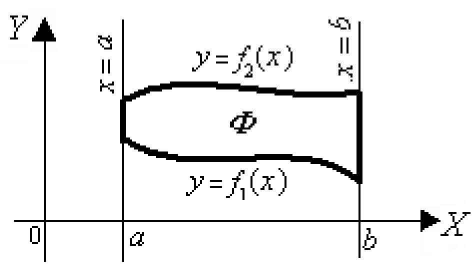

Рис. 2.

Если фигура Φ ограничена в ДСК линиями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ где $f_2(x) \ge f_1(x)$ для $x \in [a; b]$ (рис. 2), то площадь Φ можно вычислить по формуле:

$$S_\phi = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx. \qquad (18)$$

9. Вычисление площади плоской фигуры в полярной системе координат (ПСК)

Криволинейным сектором в ПСК называется фигура, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$ (рис. 3).

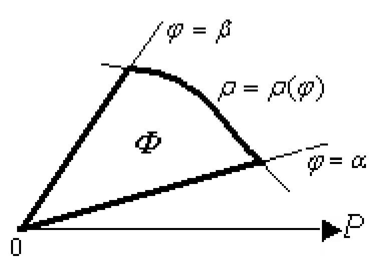

Рис. 3.

Формула для вычисления площади криволинейного сектора:

$$S_\phi = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi. \qquad (19)$$

10. Вычисление объема тела вращения

Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и непрерывной кривой $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для $x \in [a; b]$, вращается вокруг оси OX. Объем полученного при этом тела вращения (рис. 4) вычисляется по формуле:

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (20)$$

Если плоская фигура ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для $x \in [a; b]$, то объем полученного при ее вращении вокруг OX тела (рис. 5) можно вычислить по формуле:

$$V_x = V_2 - V_1 = \pi \int_a^b f_2{}^2(x)dx - \pi \int_a^b f_1{}^2(x)dx = \pi \int_a^b (f_2{}^2(x) - f_1{}^2(x))dx. \qquad (21)$$

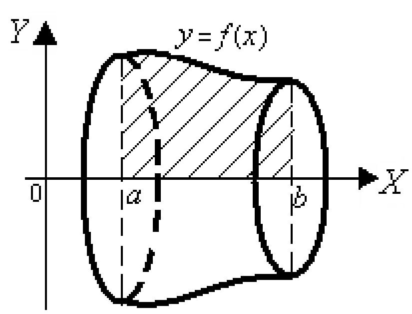

Рис. 4.

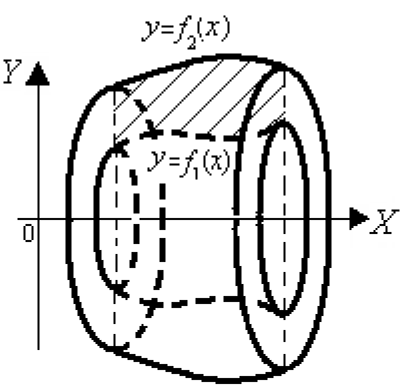

Рис. 5.

11. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть плоская кривая AB задана уравнением $y = f(x)$, где $x \in [a; b]$. Если функция $f'(x)$ и ее производная $f\cdot'(x)$ непрерывны на промежутке $[a; b]$, то длина кривой AB вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \qquad (22)$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0\,, \tag{23}$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ – неизвестная функция этой переменной, $y'(x)$ – ее первая производная.

Часто дифференциальное уравнение первого порядка встречается в разрешенной относительно y' форме:

$$y' = f(x, y)\,,$$

или в дифференциальной форме (в дифференциалах):

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Решением дифференциального уравнения называется функция $y = g(x)$, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его интегрированием. В результате интегрирования дифференциального уравнения первого порядка получают не одно решение, а семейство решений, зависящих от одной произвольной постоянной C:

$$y = g(x, C)$$

– *общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка*.

Если решение получено в виде, не разрешенном относительно y:

$$G(x, y, C) = 0,$$

то его называют *общим интегралом дифференциального уравнения 1-го порядка*.

Всякое решение, получающееся из общего при конкретном числовом значении произвольной постоянной $C = C^0$, называется *частным решением*:

$$y = g(x, C^0).$$

Чтобы найти частное решение дифференциального уравнения (23), удовлетворяющее некоторому *начальному условию*

$$y(x_0) = y_0, \tag{24}$$

нужно в общее решение уравнения $y = g(x, C)$ подставить $x = x_0$, $y = y_0$:

$$y_0 = g(x_0, C), \tag{25}$$

из полученного уравнения (25) найти $C = C^0$, затем найденное значение C^0 подставить в общее решение. В результате получим частное решение

$$y = g(x, C^0).$$

Задача нахождения частного решения уравнения (23), удовлетворяющего начальному условию (24), называется *задачей Коши*.

Общее решение $y = g(x, C)$ задает на плоскости XOY *семейство интегральных кривых* данного дифференциального уравнения, поскольку каждому значению $C = \overline{C}$ соответствует кривая с уравнением $y = g(x, \overline{C})$. Решению задачи Коши $y = g(x, C^0)$ соответствует одна интегральная кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0; y_0)$.

2. Методы решения основных типов дифференциальных уравнений 1-го порядка

2.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x)g(y) \tag{26}$$

называется *дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*. Отличительной особенностью уравнений этого типа является то, что в правой их части находится произведение функций $f(x) \cdot g(y)$, одна из которых зависит только от x, другая только от y.

Для того, чтобы найти решение уравнения (26), нужно разделить переменные x и y, собрав в левой и правой его частях функции, зависящие только от одной переменной.

Для разделения переменных в уравнении (26) заменим производную y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на $\dfrac{dx}{g(y)}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Общий интеграл этого уравнения, а следовательно, и уравнения (26) находится почленным интегрированием его левой и правой частей:

$$\int \frac{dy}{g(y)} + C_1 = \int f(x)dx + C_2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C,$$

где C – произвольная постоянная, $C = C_2 - C_1$.

Таким образом, чтобы найти общее решение или общий интеграл уравнения (26), нужно разделить переменные x и y и почленно проинтегрировать полученное равенство с добавлением произвольной постоянной C.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение: $y' = \dfrac{\cos x}{y^2}$

Решение. Сравнивая данное уравнение с уравнением (26), замечаем, что оно является уравнением с разделяющимися переменными. Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и разделим переменные, умножая обе части уравнения на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2} \quad \Rightarrow \quad y^2 dy = \cos x\, dx.$$

Интегрируя полученное равенство, получим:

$$\int y^2 dy = \int \cos x dx + C.$$

Отсюда $\dfrac{1}{3} y^3 = \sin x + C$ – общий интеграл данного уравнения (константы интегрирования включены в общую константу C). Разрешая его относительно y, можно записать общее решение данного уравнения в виде

$$y = \sqrt[3]{3(\sin x + C)}.$$

Ответ: $y = \sqrt[3]{3(\sin x + C)}.$

З а м е ч а н и е. Уравнение вида

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \tag{27}$$

также является уравнением с разделяющимися переменными, т.к. здесь коэффициенты при dx и dy являются произведениями функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Уравнение вида (27) решается тем же способом, что и уравнение (26).

2.2. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{28}$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка*.

Отличительной особенностью линейного уравнения (28) является то, что искомая функция y и ее первая производная y' входят в уравнение линейно – в первых степенях и не перемножаются между собой.

Для решения уравнения (28) воспользуемся способом подстановки. Будем искать неизвестную функцию y в виде произведения двух тоже пока неизвестных функций: положим $y = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив значения y и y' в уравнение (28), получим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x) \tag{29}$$

Если выбрать $v(x)$ так, чтобы выражение, стоящее в скобках, обратилось в нуль, т.е.

$$v' + p(x)v = 0, \tag{30}$$

то для второй функции $u(x)$ из равенства (23) получится уравнение

$$u'v(x) = q(x). \tag{31}$$

Таким образом, решение линейного дифференциального уравнения (28) сводится к решению двух уравнений (30) и (31), каждое из которых является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Общее решение уравнения (28) есть произведение какого-либо частного решения уравнения (30) и общего решения уравнения (31):

$$y = v(x) \cdot u(x, C). \tag{32}$$

<u>Пример 2</u>. Найти решение дифференциального уравнения $xy' = e^x - y$,

которое удовлетворяет условию $y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}$ (задача Коши).

Решение. Разделив все члены уравнения на x, перепишем уравнение в виде

$y' + \frac{1}{x}y = \frac{e^x}{x}$. Сравнивая его с уравнением (28), убеждаемся, что оно является линейным дифференциальным уравнением.

Положим $y = u(x)v(x)$, тогда $y' = u'v + uv'$. Подставив y и y' в уравнение, получим: $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{e^x}{x} \quad \Leftrightarrow$

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = \frac{e^x}{x}. \qquad (*)$$

Найдем функцию *v*, решая уравнение $v' + \frac{1}{x}v = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x}v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} + C \;\Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| + \ln|C_1|$$

(в данном случае удобно использовать логарифмическую константу интегрирования, положив $C = \ln|C_1|$).

Из последнего уравнения следует: $\ln|v| = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right| \;\Rightarrow\; v = \pm\frac{C_1}{x}$ – общее решение, а при соответствующем подборе $C_1 = \pm 1$ получаем $v = \frac{1}{x}$ – частное решение уравнения $v' + \frac{1}{x}v = 0$.

Подставив найденную функцию $v = \frac{1}{x}$ в уравнение (*), получим уравнение для функции *u*: $u'\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x}$. Найдем функцию $u(x, C)$ – общее решение этого уравнения:

$$u'\frac{1}{x} = \frac{e^x}{x} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x dx \;\Rightarrow\; \int du = \int e^x dx \;\Rightarrow\; u(x,C) = e^x + C.$$

Общим решением исходного уравнения является функция

$$y = v(x)\cdot u(x, C) = \frac{1}{x}(e^x + C).$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию $y\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e}.$ Для этого подставим в общее решение вместо *x*, *y* числа $\frac{1}{2}$, $\sqrt{e}$ соответственно: $\sqrt{e} = \frac{1}{1/2}(e^{\frac{1}{2}} + C) \;\Rightarrow\; \sqrt{e} = 2(\sqrt{e} + C) \;\Rightarrow\; C = -\frac{1}{2}\sqrt{e}.$

Подставляя найденное значение C в общее решение, получим искомое частное решение (решение задачи Коши): $y=\frac{1}{x}\left(e^{x}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$.

Ответ: $y=\frac{1}{x}\left(e^{x}-\frac{1}{2}\sqrt{e}\right)$.

2.3. Уравнения Бернулли.

Дифференциальное уравнение вида

$$y'+p(x)y=q(x)y^{n}, \tag{33}$$

где n – действительное число, $n\neq 0, n\neq 1$, называется *уравнением Бернулли*.

Уравнение Бернулли является обобщением линейного дифференциального уравнения (28) и может быть решено тем же способом.

Пример решения уравнения Бернулли приведен в образце выполнения контрольной работы.

2.4.Однородные уравнения.

Функция *f(x,y)* называется *однородной функцией m-го порядка (измерения)*, если $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{m} f(x,y)$.

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0 \tag{34}$$

называется *однородным*, если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одного порядка.

Однородное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{35}$$

С помощью подстановки $t=\frac{y}{x}$, т.е. $t(x)=x\cdot t(x)$ однородное дифференциальное уравнение (35) приводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $t(x)$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение: $(x^{2}+2xy)dx+xydy=0$.

Решение. Здесь $P(x,y)=x^{2}+2xy,\quad Q(x,y)=xy$, обе функции – однородные, 2-го порядка, так как выполнено

$$(\lambda x)^{2}+2(\lambda x\lambda y)=\lambda^{2}(x^{2}+2xy);\quad \lambda x\lambda y=\lambda^{2}(xy).$$

Разрешим данное уравнение относительно y'. Для этого запишем его в виде

$xydy = -(x^2 + 2xy)dx$ и разделим обе части на $xydx$, заменяя при этом $\frac{dy}{dx}$ на y'; в результате получим исходное уравнение в виде (35): $y' = -\left(\frac{x}{y} + 2\right)$.

Введем подстановку $y = tx$, откуда $y' = t'x + t$. Тогда уравнение примет вид:

$$t'x + t = -\left(\frac{x}{tx} + 2\right) \quad \Rightarrow \quad t'x + t = -\frac{1}{t} - 2 \quad \Rightarrow \quad t'x = \frac{-1 - 2t - t^2}{t}.$$

Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно новой неизвестной функции $t(x)$.

Разделяем переменные t и x:

$$\frac{dt}{dx}x = \frac{-1 - 2t - t^2}{t} \quad \Rightarrow \quad \frac{tdt}{-1 - 2t - t^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{tdt}{t^2 + 2t + 1} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{tdt}{(t+1)^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Переходим к интегрированию:

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^2} = -\int \frac{dx}{x} + C \quad \Rightarrow \quad \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = -\ln|x| + C.$$

Здесь использовано:

$$\int \frac{tdt}{(t+1)^2} = \int \frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt = \int\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \int \frac{d(t+1)}{t+1} - \int \frac{dt}{(t+1)^2} =$$

$$= \ln|t+1| - \frac{(t+1)^{-1}}{-1} + C = \ln|t+1| - \frac{1}{t+1} + C.$$

Заменяя t на $\frac{y}{x}$ и упрощая результат, получаем:

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{y/x + 1} = -\ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{x+y}{x}\right| + \ln|x| + \frac{x}{x+y} = C \quad \Rightarrow \quad \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

Поскольку функцию $y(x)$ сложно выразить явным образом через x и C, запишем решение в форме общего интеграла уравнения.

Ответ: $\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$ – общий интеграл уравнения.

Для определения типа дифференциального уравнения 1-го порядка и выбора метода его решения можно использовать таблицу 3.

Таблица 3.

Тип дифференциального уравнения	Вид, к которому приводится уравнение	Метод решения
Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными	$y' = f(x)g(y)$	Разделение переменных: $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$
Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка	$y' + p(x)y = q(x)$	Замена: $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$
Уравнение Бернулли	$y' + p(x)y = q(x)y^n$, $n \neq 0, n \neq 1$	Замена: $y = u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$
Однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка	$y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$	Замена: $y = tx$, $y' = t'x + t$.

3. Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Дифференциальным уравнением 2-*го порядка* называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'') = 0, \qquad (36)$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ – неизвестная функция этой переменной, $y'(x)$ и $y''(x)$ – ее первая и вторая производные.

Иногда уравнение 2-го порядка встречается в форме, разрешенной относительно второй производной:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Общее решение уравнения 2-*го порядка* имеет вид:

$$y = g(x, C_1, C_2), \qquad (37)$$

где C_1 и C_2 – две произвольные постоянные.

Решение, полученное в неявном виде $G(x, y, C_1, C_2) = 0$, называется *общим интегралом уравнения 2-го порядка*.

Всякое решение, получающееся из общего решения при конкретных числовых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2, является его частным решением.

Задача Коши для дифференциального уравнения 2-го порядка (36) состоит в нахождении частного решения уравнения, удовлетворяющего двум начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ \ y'(x_0) = y_1, \tag{38}$$

где x_0, y_0, y_1 – заданные числа.

Для решения задачи Коши нужно подставить в общее решение (37) и его производную заданные начальные условия

$$g(x_0, C_1, C_2) = y_0,\ \ g'(x_0, C_1, C_2) = y_1,$$

решить полученную систему двух уравнений относительно неизвестных C_1 и C_2 и подставить найденные значения постоянных C_1^0, C_2^0 в общее решение:

$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ – решение задачи Коши.

4. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка, допускающих понижение порядка

В некоторых случаях дифференциальное уравнение 2-го порядка можно решить *методом понижения порядка*. Использование этого метода позволяет свести решение уравнения 2-го порядка к решению уравнения 1-го порядка.

<u>4.1. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, не содержащие искомой функции.</u>

Уравнение такого типа имеет вид:

$$F(x,\ y', y'') = 0\,. \tag{39}$$

Отличительной особенностью этого уравнения является то, что в него не входит явно искомая функция y, а входят только ее производные y' и y''.

Для решения уравнения (39) используется способ подстановки. Вместо производной y' введем новую неизвестную функцию $y' = z(x)$, тогда $y'' = z'(x)$. Подставляя в (39) вместо y' и y'' соответственно z и z', получим дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно новой неизвестной функции $z(x)$:

$$F(x,\ z,z')=0\,.$$

Определив тип этого уравнения и решив его, следует записать его общее решение в виде $z=\varphi(x,C_1)$, а затем вернуться к функции y: $y'=\varphi(x,C_1)$. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением 1-го порядка. Решая его, получаем общее решение уравнения (39):

$$y=\int y'dx=\int \varphi(x,C_1)dx+C_2\ .$$

Таким образом, решение уравнения 2-го порядка (39) сводится к последовательному решению двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пример 4. Найти частное решение уравнения $y''+2y'\mathrm{ctg}\,x=\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$

Решение. Данное дифференциальное уравнение – это дифференциальное уравнение 2-го порядка, не содержащее явно y. Полагаем $y'=z(x)$, $y''=z'(x)$, тогда уравнение примет вид:

$$z'+2z\,\mathrm{ctg}\,x=\cos x\,.$$

Это линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно функции $z(x)$. Положим $z=uv,\quad z'=u'v+uv'$. Подставив z и z' в уравнение, получим $u'v+uv'+2uv\,\mathrm{ctg}x=\cos x$, или

$$u'v+u(v'+2v\mathrm{ctg}x)=\cos x \qquad (**)$$

Найдем функцию $v(x)$ решая уравнение $v'+2v\mathrm{ctg}x=0$:

$$\frac{dv}{dx}=-2v\mathrm{ctg}x \quad\Rightarrow\quad \frac{dv}{v}=-2\,\mathrm{ctg}x dx \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x}+C \quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{dv}{v}=-2\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}+C \quad\Rightarrow\quad \ln|v|=-2\ln|\sin x|+\ln|C_1| \quad \begin{pmatrix}\text{переобозначение}\\ C=\ln|C_1|\end{pmatrix} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \ln|v|=\ln\left|\frac{C_1}{\sin^2 x}\right| \quad\Rightarrow v=\pm\frac{C_1}{\sin^2 x}.$$

Из последнего уравнения, полагая $\pm C_1=1$ получаем: $v(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ – частное решение уравнения $v'+2v\mathrm{ctg}x=0$.

Подставим найденную функцию $v(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ в уравнение (**) и найдем общее решение этого уравнения:

$$u'\frac{1}{\sin^2 x}=\cos x \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{dx}=\sin^2 x\cos x \quad\Rightarrow\quad du=\sin^2 x\cos x \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \int du=\int \sin^2 x d(\sin x)+C \quad\Rightarrow\quad u(x,C)=\frac{\sin^3 x}{3}+C$$

– общее решение уравнения $u'\dfrac{1}{\sin^2 x}=\cos x$.

Запишем общее решение уравнения $z'+2z\,\mathrm{ctg}\,x=\cos x$:

$$z=v(x)\cdot u(x+C)=\left(\frac{\sin^3 x}{3}+C\right)\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin x}{3}+\frac{C}{\sin^2 x}.$$

Так как $z=y'$, то получаем дифференциальное уравнение для функции $y(x)$:

$$y'=\frac{\sin x}{3}+\frac{C}{\sin^2 x}. \qquad (***)$$

Прежде чем интегрировать это уравнение, целесообразно определить значение постоянной C, используя начальное условие $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$:

$$1=\frac{\sin(\pi/2)}{3}+\frac{C}{\sin^2(\pi/2)} \quad\Rightarrow\quad 1=\frac{1}{3}+C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{2}{3}.$$

Подставив значение $C=2/3$ в дифференциальное уравнение (***), получим:

$$y'=\frac{\sin x}{3}+\frac{2}{3\sin^2 x}.$$

Проинтегрируем:

$$y'=\frac{\sin x}{3}+\frac{2}{3\sin^2 x} \quad\Rightarrow\quad \int y'dx=\int\left(\frac{\sin x}{3}+\frac{2}{3\sin^2 x}\right)dx+C_1 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad y=-\frac{1}{3}(\cos x+2\mathrm{ctg}x)+C_1$$

Найдем значение постоянной C_1, используя начальное условие $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$:

$$0=-\frac{1}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\right)+C_1 \quad\Rightarrow\quad C_1=0.$$

Запишем частное решение исходного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y=-\frac{1}{3}(\cos x+2\operatorname{ctg}x)$.

Ответ: $y=-\frac{1}{3}(\cos x+2\operatorname{ctg}x)$.

<u>4.2. Дифференциальные уравнения 2-го порядка, не содержащие независимой переменной.</u>

Уравнение такого типа имеет вид:

$$F(y,y',y'')=0. \tag{40}$$

Отличительной особенностью этого уравнения является то, что в него не входит явно независимая переменная x.

Способ решения уравнения (40) состоит в следующем. Примем переменную y за новую независимую переменную, вместо неизвестной функции $y(x)$ введем новую неизвестную функцию $p(y)$ по формуле $y' = p(y)$. Тогда, пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$y''=(y'_x)'_x=(p(y))'_x=p'_y y'_x=p'_y p\text{, где } p'_y=\frac{dp}{dy}.$$

Подставляя в (40) выражения для y' и y'', получим дифференциальное уравнение 1-го порядка относительно неизвестной функции $p(y)$:

$$F(y,\ p,\ p'_y)=0.$$

Определив тип этого уравнения и решив его, следует записать его общее решение в виде $p=\varphi(y,C_1)$. Так как $p = y'$, полученное выражение является дифференциальным уравнением 1-го порядка относительно искомой функции $y(x)$:

$$y'=\varphi(y,C_1).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, которое следует решать по обычной схеме (см. п.2.1).

Таким образом, решение уравнения 2-го порядка (40) сводится к последовательному решению двух дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пример решения уравнения 2-го порядка, не содержащего независимой переменной, приведен в образце выполнения контрольной работы.

5. Решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами

5.1. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка.

Уравнение вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{41}$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением 2-го порядка*.

Отличительной его особенностью является то, что искомая функция y, и ее производные y' и y'' входят в уравнение линейно – в первых степенях и не перемножаются между собой.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (41) называется *линейным однородным дифференциальным уравнением* и имеет вид:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{42}$$

если же $f(x) \neq 0$, то уравнение (41) называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка*.

Общее решение линейного однородного уравнения 2-го порядка (42) имеет вид:

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

где y_1 и y_2 – два линейно независимых частных решения этого уравнения $\left(\dfrac{y_1}{y_2} \neq const\right)$, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (41) имеет вид:

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (42), $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения (41).

5.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Если коэффициенты при $y,\ y'$ и y'' – постоянные, то уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (43)$$

где p и q – вещественные числа, *называется линейным однородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение уравнения (43) имеет вид: $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$,

где y_1 и y_2 – два линейно независимых частных решения этого уравнения, C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Для нахождения линейно независимых частных решений y_1 и y_2 уравнения (43) используется квадратное уравнение вида

$$k^2 + pk + q = 0,$$

которое называется *характеристическим уравнением* для уравнения (43).

В таблице 4 приведены виды функций y_1 и y_2 и вид общего решения уравнения (43) в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

Таблица 4.

Корни характеристического уравнения	Вид функций y_1 и y_2	Вид общего решения уравнения
Вещественные различные $k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Вещественные равные $k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
Комплексно-сопряженные $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

<u>Пример 5.</u> Найти общее решение уравнения $y'' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение для данного однородного уравнения имеет вид $k^2 + 16 = 0$ (коэффициент при y' равен нулю). Его корнями являются комплексные числа $k_1 = 4i,\ k_2 = -4i.$ Здесь $\alpha = 0,\ \beta = 4$. Тогда $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x = \cos 4x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x = \sin 4x$ и общее решение данного уравнения: $y_0 = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x.$

Ответ: $y_0 = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x.$

<u>5.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.</u>

Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{44}$$

где p и q – вещественные числа, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами*.

Общее решение линейного неоднородного уравнения (44) имеет вид:

$$y = y_0 + \tilde{y} \tag{45}$$

где y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения (43), а $\tilde{y}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения (44).

Построение общего решения неоднородного уравнения состоит из двух этапов. Сначала нужно найти общее решение соответствующего однородного уравнения y_0, затем найти частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения.

Решение y_0 для линейного однородного дифференциального уравнения (43) находят, используя характеристическое уравнение (п. 5.1), а для нахождения частного решения $\tilde{y}$ уравнения (44) можно использовать либо метод вариации произвольных постоянных, либо метод неопределенных коэффициентов.

<u>Метод вариации произвольных постоянных.</u>

Метод вариации произвольных постоянных применяется для нахождения частного решения $\tilde{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения в тех случаях, когда известно общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения.

Если известно $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$, то функция $\tilde{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$ будет частным решением уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, если функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ удовлетворяют так называемым «условиям вариации»:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0, \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \tag{46}$$

Для нахождения частного решения $\tilde{y}$ необходимо решить систему уравнений (46), затем проинтегрировать полученные функции:

$$c_1(x) = \int c_1'(x) dx, \quad c_2(x) = \int c_2'(x) dx, \tag{47}$$

и записать частное решение: $\tilde{y} = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$. Константы интегрирования в (47) можно взять равными нулю, так как мы находим частное решение.

Пример использования метода вариации произвольных постоянных приведен в образце выполнения контрольной работы.

Метод неопределенных коэффициентов.

Метод неопределенных коэффициентов применяется для нахождения частного решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами в тех случаях, когда функция $f(x)$, стоящая в правой части этого уравнения, имеет один из двух «специальных» видов:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x), \tag{48}$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$,
или

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (M \cos \beta x + N \sin \beta x), \tag{49}$$

где M и N – числа.

1) Если $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$, то частное решение можно искать в виде:

$$\tilde{y} = \left[\begin{array}{ll} e^{\alpha x} \cdot Q_n(x), & \text{если } \alpha \neq k_1,\ \alpha \neq k_2, \\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x), & \text{если } \alpha = k_1, \text{ но } \alpha \neq k_2, \\ x^2 \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_n(x), & \text{если } \alpha = k_1 = k_2, \end{array} \right. \tag{50}$$

где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения, $Q_n(x)$ – многочлен степени n, записанный с неопределенными коэффициентами, подлежащими определению, например,

$$Q_0(x) = A, \quad Q_1(x) = Ax + B, \quad Q_2(x) = Ax^2 + Bx + C\text{, и т.д.}$$

2) Если $f(x) = e^{\alpha x} \cdot (M\cos\beta x + N\sin\beta x)$, то частное решение $\tilde{y}$ можно искать в виде:

$$\tilde{y} = \left[\begin{array}{l} e^{\alpha x} \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x), \quad \text{если} \quad \alpha \pm \beta i \neq k_{1,2}, \\ x \cdot e^{\alpha x} \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x), \quad \text{если} \quad \alpha \pm \beta i = k_{1,2}, \end{array}\right. \tag{51}$$

где k_1, k_2 – корни характеристического уравнения, A и B – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' - 8y = 12xe^{2x}$.

Решение.

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y'' + 2y' - 8y = 0$. Составим для него характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 8 = 0$ и найдем корни: $k_1 = -4$, $k_2 = 2$ – корни вещественные и различные. По таблице 4 определим вид линейно независимых частных решений однородного уравнения: $y_1 = e^{-4x}$, $y_2 = e^{2x}$ и запишем его общее решение:
$y_0 = C_1e^{-4x} + C_2e^{2x}$.

2 этап. Построим частное решение данного неоднородного уравнения $\tilde{y}$. В заданном уравнении $f(x) = 12xe^{2x}$ – правая часть 1-го специального вида: $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Здесь $\alpha = 2$, $P_n(x) = 12x$, т.е. многочлен в правой части – 1-й степени ($n = 1$). Число $\alpha = 2$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения $k_2 = 2$. Следовательно, согласно (50) частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде:

$$\tilde{y} = x \cdot e^{\alpha x} \cdot Q_1(x) = xe^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(Ax^2 + Bx),$$

где A, B – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Найдем производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ и подставим $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в данное неоднородное уравнение $y'' + 2y' - 8y = 12xe^{2x}$, при этом для простоты используем следующую форму записи:

$$\begin{array}{r|l} -8 & \tilde{y} = e^{2x}(Ax^2 + Bx) \\ 2 & \tilde{y}' = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B) \\ 1 & \tilde{y}'' = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x}2A \end{array}$$

$$(-8 + 4 + 4)e^{2x}(Ax^2 + Bx) + (2 + 2 + 2)e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x}2A \equiv 12xe^{2x}.$$

Здесь слева от черты записаны коэффициенты, с которыми $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ входят в уравнение, а под чертой приравниваются (тождественно) левая и правая части уравнения после подстановки в него $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ с группировкой подобных членов.

После сокращения обеих частей тождества на $e^{2x} \neq 0$, получаем: $6(2Ax + B) + 2A \equiv 12x$, откуда, приравнивая коэффициенты при x^1 и при x^0 в обеих частях тождества, получаем: $\begin{cases} 12A = 12, \\ 6B + 2A = 0. \end{cases}$

Решая систему, находим $A = 1,\ B = -\dfrac{1}{3}$. Подставляя найденные значения в $\tilde{y}$, получим: $\tilde{y} = e^{2x}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}x\right)$.

Объединяя результаты 2-х этапов, получаем общее решение уравнения:

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + e^{2x}\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right).$$

Ответ: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{2x} + e^{2x}\left(x^2 - \dfrac{1}{3}x\right)$.

Пример использования метода неопределенных коэффициентов для случая, когда функция, стоящая в правой части уравнения, имеет 2-й специальный вид, приведен в образце выполнения контрольной работы.

6. Системы двух линейных дифференциальных уравнений и их решение порядка методом повышения порядка

Нормальная система двух линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_1 y + b_1 z + f_1(x), \\ \dfrac{dz}{dx} = a_2 y + b_2 z + f_2(x), \end{cases} \qquad (52)$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ и $z(x)$ – неизвестные функции, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ – известные функции a_1, a_2, b_1, b_2 – коэффициенты. Общее решение системы (46) имеет вид:

$$y = \varphi_1(x, C_1, C_2), \quad z = \varphi_2(x, C_1, C_2),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Для решения системы (46) методом повышения порядка необходимо исключить одну из неизвестных функций. Для этого можно выразить одну из функций, например, $z(x)$, из одного уравнения системы:

$$z = z(y, y'), \qquad (53)$$

продифференцировать ее и подставить z и z' во второе уравнение системы. После упрощения получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. После получения его решения $y = \varphi_1(x, C_1, C_2)$, следует, используя (47), найти вторую неизвестную функцию: $z = \varphi_2(x, C_1, C_2)$ и записать ответ.

Если в системе (52) коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 – постоянные, то в результате применения метода повышения порядка получается линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

решение которого рассмотрено в п.5.

Пример использования метода повышения порядка для решения системы двух линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка приведен в образце выполнения контрольной работы.

ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ И ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ.

Задача 1. Даны уравнение $z^2 - 4z + 20 = 0$, комплексное число $z_0 = 1 - \sqrt{3}i$ и натуральное число n = 6. Требуется:

1) найти корни уравнения $z_{1,} z_2$ на множестве комплексных чисел;
2) найти комплексное число $w = \dfrac{z_0 \cdot \bar{z}_0 - z_1}{z_1 + 2z_2}$ в алгебраической форме;
3) получить тригонометрическую форму числа z_0 и вычислить с ее помощью z_0^n. Ответ записать в тригонометрической и в алгебраической формах.

Задача 2. Найти неопределенные интегралы:

$$a)\int \frac{15x^{18}}{x^{19}+6}dx, \quad б)\int (13x+1)\ln(14x)dx, \quad в)\int \frac{x+11}{x^3+12x}dx$$

Правильность полученных результатов проверить дифференцированием.

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$а)\ \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+169}$$

Задача 4. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры:

а) ограниченной в ДСК линиями l_1: $y = x^2 + 1$ и l_2: $y = 2x + 4$;

б) ограниченной в ПСК линией l: $\rho = 12 + \cos\varphi$.

Сделать чертежи.

Задача 5. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка: $\mathrm{ctg}x \cdot y' + y = 0$ и точка $M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку M и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

Задача 6. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка:

$y'' + 3y' - 4y = e^{-x}(\cos 3x + 8\sin 3x)$. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

<u>Задача 7.</u> Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка $\begin{cases} x' = -4x - 6y \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$ Найти общее решение методом повышения порядка.

<u>Решение задачи 1</u>.

1) Найдем корни уравнения $z^2 - 4z + 20 = 0$ на множестве комплексных чисел:

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-80}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} z_1 = 2+4i, \\ z_1 = 2-4i \end{array}\right.$$

(здесь использовано: $\sqrt{-64} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{-1} = 8 \cdot i$).

2) Чтобы найти комплексное число $w = \dfrac{z_0 \cdot \bar{z}_0 - z_1}{z_1 + 2z_2}$, вычислим сначала $z_0\bar{z}_0$:

$z_0\bar{z}_0 = (1-\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i) = 1^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 1 - 3i^2 = 1 - 3(-1) = 4$ ($\bar{z}_0$ – это число, сопряженное числу $z_0 = 1 - \sqrt{3}\,i$, т.е. $\bar{z}_0 = 1 + \sqrt{3}\,i$).

Затем находим числитель $z_0\bar{z}_0 - z_1 = 4 - (2+4i) = 2 - 4i$ и знаменатель $z_1 + 2z_2 = 2 + 4i + 2(2-4i) = 6 - 4i$.

Теперь вычисляем *w*, используя домножение числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю:

$$w = \frac{2-4i}{6-4i} = \frac{(2-4i)(6+4i)}{(6-4i)(6+4i)} = \frac{12+8i-24i-16(i)^2}{6^2-(4i)^2} = \frac{12-16i+16}{36+16} = \frac{28-16i}{52} = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}i$$

– получили число *w* в алгебраической форме.

3) Комплексное число $z_0 = 1 - \sqrt{3}\,i$ задано в алгебраической форме $z_0 = x + yi$, где $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$. Получим тригонометрическую форму этого числа $z_0 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, используя формулы (4) и (5). Вычислим модуль комплексного числа $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ и его аргумент:

$$tg\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3},\ z_0 \in IV \text{ четверти} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = -\mathrm{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Таким образом, $z_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – тригонометрическая форма числа z_0.

Для вычисления z_0^6 используем формулу (6) возведения комплексного числа в натуральную степень:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \Rightarrow \quad z_0^6 = 2^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{6\pi}{3}\right)\right) = 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi).$$

Здесь аргумент $2\pi \notin (-\pi;\pi]$. Выбираем главное значение аргумента, принадлежащее промежутку $(-\pi;\pi]$, используя формулу (2): $\varphi = \arg z + 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \Rightarrow 2\pi = \arg\left(z^n\right) + 2\pi n \Rightarrow$ при $n = -1$ получаем $\arg\left(z^n\right) = 0$. Тригонометрическая форма комплексного числа z_0^6 для $\varphi = \arg z$ имеет вид:

$$z_0^6 = 64(\cos 0 + i\sin 0).$$

Подставив значения cos0 = 1, sin0 = 0, получим алгебраическую форму этого числа: $z_0^6 = 64(\cos 0 + i\sin 0) = 64(1 + 0i) = 64.$

Ответы: 1) $z_{1,2} = 2 \pm 4i$; 2) $w = \frac{7}{13} - \frac{4}{13}i$; 3) $z_0 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; $z_0^6 = 64(\cos 0 + i\sin 0) = 64.$

Решение задачи 2.

а) Так как $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, то используя формулу (9), получим:

$$\int \frac{15x^{18}}{x^{19}+6}\,dx = \frac{15}{19}\int \frac{19x^{18}}{x^{19}+6}\,dx = \frac{15}{19}\int \frac{(x^{19}+6)'dx}{x^{19}+6} = \frac{15}{19}\int \frac{d(x^{19}+6)}{x^{19}+6} = \frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right| + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right|\right)' = \frac{15}{19}\frac{1}{x^{19}+6}\cdot(19\,x^{18}) = \frac{15x^{18}}{x^{19}+6},$$

следовательно, выполнено условие (7).

Ответ: $\int \frac{15x^{18}}{x^{19}+6}\,dx = \frac{15}{19}\ln\left|x^{19}+6\right| + C.$

б) Интеграл $\int(13x+1)\ln(14x)dx$ относится к типу интегралов, берущихся по частям; это интеграл так называемого второго типа. Используя формулу (10), получим:

$$\int(13x+1)\ln(14x)\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\ln(14x);\ du=\dfrac{1}{14x}\cdot 14dx=\dfrac{dx}{x};\\ dv=(13x+1)dx;\ v=\dfrac{13}{2}x^2+x \end{array}\right|=\left(\frac{13}{2}x^2+x\right)\ln(14x)-\int\left(\frac{13}{2}x^2+x\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-\int(6{,}5x+1)dx=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x+C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left((6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x\right)'=(13x+1)\ln(14x)+\frac{(6{,}5x^2+x)14}{14x}-6{,}5x-1=$$

$$=(13x+1)\ln(14x)+6{,}5x+1-6{,}5x-1=(13x+1)\ln(14x).$$

Ответ: $\int(13x+1)\ln(14x)dx=(6{,}5x^2+x)\ln(14x)-3{,}25x^2-x+\mathrm{C}$.

в) Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{x+11}{x^3+12x}=\frac{x+11}{x(x^2+12)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+12},\ \text{отсюда}$$

$$x+11\equiv A(x^2+12)+(Bx+C)x,\ \text{или}\ \ x+11\equiv(A+B)x^2+Cx+12A.$$

Неопределенные коэффициенты A, B, C найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества:

$$\begin{array}{llll} \text{при } x^0: & 11=12A & \Rightarrow & A=11/12;\\ \text{при } x^1: & 1=C & \Rightarrow & C=1;\\ \text{при } x^2: & 0=A+B & \Rightarrow & B=-A=-11/12. \end{array}$$

Коэффициенты A, B, C можно найти другим способом – подставляя в тождество «удобные» значения x (метод частных значений):

$$\begin{array}{ll} x=0: & 11=12A,\\ x=1: & 12=A+B+C+12A,\\ x=\text{-}1: & 10=A+B-C+12A. \end{array}$$

Из первого уравнения получим: $A=11/12$. Почленно вычитая два последних равенства, получим: $2C=2\Rightarrow C=1$, и из последнего уравнения

$$B=10-A+C-12A=-A=-11/12.$$

Таким образом, $A=11/12$, $B=-11/12$, $C=1$.

Переходим к интегрированию:

$$\int \frac{x+11}{x^3+12x}dx = \int\left(\frac{11/12}{x} + \frac{(-11/12)x+1}{x^2+12}\right)dx = \frac{11}{12}\int\frac{dx}{x} - \frac{11}{12}\int\frac{x}{x^2+12}dx + \int\frac{dx}{x^2+12} =$$

$$= \frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C\,.$$

Здесь использовано: $\int\frac{x}{x^2+12}dx = \frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+12}dx = \int\frac{d(x^2+12)}{x^2+12} = \ln\left|x^2+12\right| + C$,

$$\int\frac{dx}{x^2+12} = \int\frac{dx}{x^2+(2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C\,.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left(\frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)' = \frac{11}{12x} - \frac{11(2x)}{24(x^2+12)} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{11}{12x} - \frac{11x}{12(x^2+12)} + \frac{1}{12+x^2} = \frac{11(x^2+12) - 11x^2 + 12x}{12x(x^2+12)} = \frac{12(11+x)}{12x(x^2+12)} = \frac{x+11}{x^3+12x}\,.$$

Ответ: $\int\frac{x+11}{x^3+12x}dx = \frac{11}{12}\ln|x| - \frac{11}{24}\ln(x^2+12) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{2\sqrt{3}} + C$.

Решение задачи 3.

Данный интеграл является несобственным интегралом первого рода, поэтому

$$\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+169} = \lim_{b\to+\infty}\int_{13}^{b}\frac{dx}{x^2+169} = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{13}arctg\,\frac{b}{13} - \frac{1}{13}arctg 1\right) = \frac{1}{13}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{52}\,.$$

следовательно, интеграл сходится и равен $\frac{\pi}{52}\approx 0{,}06$.

Ответ: интеграл $\int_{13}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+169}$ сходится и равен $\frac{\pi}{52}\approx 0{,}06$

Решение задачи 4.

а) Найдем точки пересечения кривых, для чего соста-

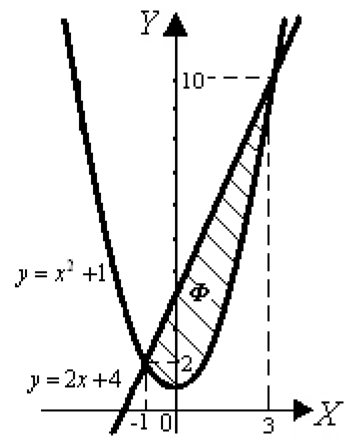

Рис. 6.

вим и решим систему $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$. Приравнивая правые части, получаем уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$, решив которое, найдем абсциссы точек пересечения: $x = -1$, $x = 3$.

Построим чертеж (рис. 6). На рисунке видно, что $f_2(x) = 2x + 4 > x^2 + 1 = f_1(x)$ на промежутке [–1; 3].

Используя формулу (18), вычислим площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$S_Ф = \int_{-1}^{3} (2x + 4 - x^2 - 1)dx = \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)dx = \left(x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{3} =$$

$$= (9 + 9 - 9) - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3} = 10\frac{2}{3} \approx 10{,}7 .$$

Ответ: $S_ф = 10\frac{2}{3} \approx 10{,}7$ единиц площади.

б) Для построения кривой $\rho = 12 + \cos\varphi$ в ПСК составим таблицу значений функции на промежутке $[0; 2\pi]$.

φ_k	0	$\pi/4$	$2\pi/4$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$6\pi/4$	$7\pi/4$	2π
$r(\varphi_k) = 12 + \cos\varphi_k$	13	12,7	12	11,3	11	11,3	12	12,7	13

Построим чертеж в ПСК (рис. 7). Так как фигура ограничена кривой, заданной в полярной системе координат, то площадь фигуры, ограниченной заданной линией, вычислим по формуле (19): $S_ф = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Для $\rho = 12 + \cos\varphi$ получаем:

$$S_ф = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (12 + \cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (144 + 24\cos\varphi -$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi)d\varphi = 144\pi + \frac{1}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 144$$

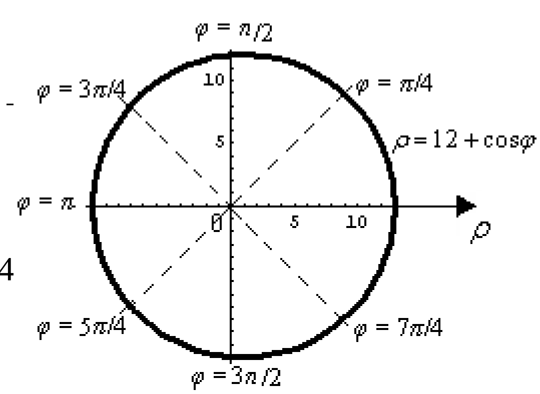

Рис. 7.

Ответ: $S_ф = 144{,}5\pi \approx 454$ единицы площади.

<u>Решение задачи 5.</u> Данное дифференциальное уравнение $\mathrm{ctg}x \cdot y' + y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными. Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделим переменные, умножая обе части уравнения на $\frac{\mathrm{tg}x\,dx}{y}$:

$$\mathrm{ctg}x \frac{dy}{dx} = -y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\mathrm{tg}x\,dx.$$

Интегрируя полученное равенство, получим:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x}dx + C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C_1|,$$

откуда $\ln|y| = \ln|C_1 \cdot \cos x| \quad \Rightarrow \quad y = \pm C_1 \cos x$. Заменяя $\pm C_1 = C$, запишем общее решение данного уравнения: $y = C\cos x$.

Найдем уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M\left(\frac{\pi}{3};1\right)$, т.е. частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию: $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$. Для этого подставим в общее решение вместо x, y числа $\frac{\pi}{3}$, 1 соответственно: $1 = C\cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{2}C \quad \Rightarrow \quad C = 2$. Подставляя найденное значение C в общее решение, получим искомое частное решение (уравнение интегральной кривой, проходящей через точку M): $y_1 = 2\cos x$.

Найдем уравнения еще нескольких интегральных кривых.

$$C = 0 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 0; \qquad C = 1 \quad \Rightarrow \quad y_3 = \cos x;$$
$$C = -1 \quad \Rightarrow \quad y_4 = -\cos x; \qquad C = -2 \quad \Rightarrow \quad y_5 = -2\cos x.$$

Построим все эти кривые в системе координат (рис. 9).

Ответы: $y = C\cos x$;

$y_1 = 2\cos x$, $y_2 = 0$,

$y_3 = \cos x$, $y_4 = -\cos x$,

$y_5 = -2\cos x$.

Интегральные кривые изображены на рис. 9.

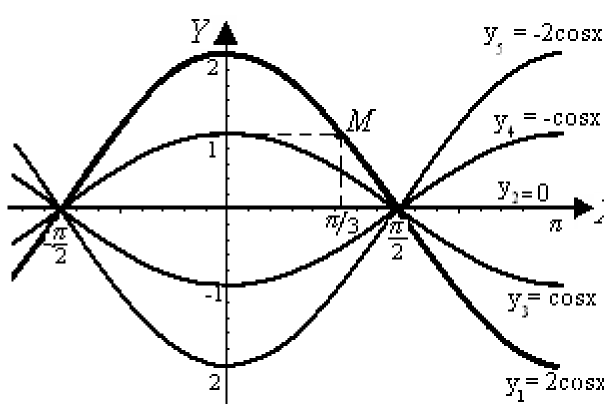

Рис. 9.

<u>Решение задачи 6.</u> Уравнение $y''+3y'-4y=e^{-x}(\cos 3x+8\sin 3x)$ – это линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами (см. (44)). Его общее решение имеет вид $y=y_0+\tilde{y}$. Найдем его в 2 этапа.

1 этап. Построим общее решение y_0 соответствующего однородного уравнения $y''+3y'-4y=0.$ Составим для него характеристическое уравнение $k^2+3k-4=0$ и найдем его корни: $k_1=-4,\quad k_2=1.$ По таблице 4 определим вид его общего решения $y_0=C_1e^{-4x}+C_2e^{x}.$

2 этап. Построим частное решение $\tilde{y}$ данного неоднородного уравнения при помощи метода неопределенных коэффициентов. В заданном уравнении $f(x)=e^{-x}(\cos 3x+8\sin 3x)$ – правая часть 2-го специального вида: $f(x)=e^{\alpha x}\cdot(M\cos\beta x+N\sin\beta x)$, где $\alpha=-1,\ \beta=3,\ M=1,\ N=8$. Числа $\alpha\pm\beta i=-1\pm 3i\neq k_{1,2}$, тогда, согласно (51), частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде:

$$\tilde{y}=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

где A и B – неизвестные постоянные. Подставим $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в данное неоднородное уравнение:

$$\begin{array}{r|l}
-4 & \tilde{y}=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x),\\
3 & \tilde{y}'=-e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x),\\
1 & \tilde{y}''=e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)-e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)-\\
 & \quad -e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)+e^{-x}(-9A\cos 3x-9B\sin 3x),\\
\hline
\multicolumn{2}{c}{-15e^{-x}(A\cos 3x+B\sin 3x)+e^{-x}(-3A\sin 3x+3B\cos 3x)\equiv e^{-x}(\cos 3x+8\sin 3x).}
\end{array}$$

Сократим обе части тождества на e^{-x} $(e^{-x}\neq 0)$ и приравняем коэффициенты при $\cos 3x$ и при $\sin 3x$ в левой и правой частях тождества.

$$\begin{array}{l|l}
\text{При } \cos 3x & \multirow{2}{*}{} \begin{cases}-15A+3B=1,\\ -15B-3A=8.\end{cases}\\
\text{при } \sin 3x &
\end{array}$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными, находим $A=-\frac{1}{6},\quad B=-\frac{1}{2}.$ Подставив найденные значения A и B в выражение $\tilde{y}$, получим частное решение неоднородного уравнения:

$$\tilde{y} = e^{-x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right).$$

Объединяя результаты 2-х этапов, запишем ответ – общее решение данного уравнения.

Ответ: $y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x} + e^{-x}\left(-\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x\right).$

Решение задачи 7. Для решения системы $\begin{cases} x' = -4x - 6y \\ y' = -4x - 2y \end{cases}$ методом повышения порядка исключим из нее одну из функций – y(t).

Выразим $y(t)$ из первого уравнения системы: $y = \frac{1}{6}(-4x - x')$, продифференцируем ее: $y' = \frac{1}{6}(-4x' - x'')$ и подставим y и y' во второе уравнение системы:

$$\frac{1}{6}(-4x' - x'') = -4x - \frac{2}{6}(-4x - x').$$

$$4x' + x'' = 24x + 2(-4x - x')$$

После упрощения получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно функции $y(x)$: $x'' + 6x' - 16x = 0$.

Это линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Найдем его общее решение, составив характеристическое уравнение

$k^2 + 6k - 16 = 0$ и найдем корни: $k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2}$, $k_1=2$, $k_2=-8$ – корни действительные различные, определим вид общего решения однородного уравнения: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-8t}$. Найдем вторую неизвестную функцию:

$$y = \frac{1}{6}(-4x - x') = \frac{1}{6}\left(-4C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{-8t} - 2C_1 e^{2t} + 8C_2 e^{-8t}\right) = -C_1 e^{2t} + \frac{2}{3}C_2 e^{-8t}$$

Ответ: $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-8t}$; $y = -C_1 e^{2t} + \frac{2}{3}C_2 e^{-8t}$

ВАРИАНТЫ РАБОТ.

Каждый вариант содержит 7 задач, охватывающих материал по темам «Комплексные числа», «Интегральное исчисление функции одной переменной», «Дифференциальные уравнения».

Перед выполнением обучающемуся необходимо изучить теоретический материал по данной теме и закрепить его решением рекомендованных задач в соответствии с методическими указаниями, затем ознакомиться со справочным материалом и образцом выполнения примерного варианта.

Интегрирование должно сопровождаться необходимыми ссылками на таблицы интегралов, их свойства, а также указанием метода интегрирования. При использовании замены переменной следует привести формулы замены всех элементов подынтегрального выражения через новую переменную.

Решение всех дифференциальных уравнений следует приводить подробно, указывая тип уравнения, способ получения решения и используемые методы интегрирования.

Задания для всех вариантов общие; студенту следует выбрать из условия каждой задачи данные, необходимые для ее решения, в соответствии со своим вариантом. Оформление работы должно соответствовать установленным правилам и требованиям. Необходимые чертежи должны выполняться четко, с соответствующими подписями и комментариями (см. образец выполнения примерного варианта работы).

Задача 1. Даны уравнение, комплексное число z_0 и натуральное число n.

Требуется:

1) найти корни уравнения $z_{1,} z_2$ на множестве комплексных чисел;

2) найти комплексное число $w = \dfrac{z_0 \cdot \bar{z}_0 - z_1}{z_1 + 2z_2}$ в алгебраической форме;

3) получить тригонометрическую форму числа z_0 и вычислить с ее помощью z_0^n. Ответ записать в тригонометрической и в алгебраической формах.

№ варианта	Уравнение	z_0	N

1	$z^2-2z+5=0$	$z_0=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$	6
2	$z^2-6z+10=0$	$z_0=-1+i$	10
3	$z^2+4z+5=0$	$z_0=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	12
4	$z^2-8z+20=0$	$z_0=-\sqrt{3}+i$	6
5	$z^2+10z+50=0$	$z_0=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i$	8
6	$z^2+2z+10=0$	$z_0=\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$	6
7	$z^2-12z+40=0$	$z_0=-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$	8
8	$z^2+8z+25=0$	$z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$	18
9	$z^2-10z+50=0$	$z_0=2+2i$	8
10	$z^2+6z+18=0$	$z_0=-2+2\sqrt{3}\,i$	6

Задача 2. Найти неопределенные интегралы. Правильность полученных результатов проверить дифференцированием. Здесь n- номер варианта.

№ варианта	Интегралы
n	$a)\int\frac{x^{n+1}}{x^{n+2}-2n+9}dx$; $\quad б)\int((n+1)x+1)\ln\big((11-n)x\big)dx$; $\quad в)\int\frac{x+n+1}{x^3+(11-n)x}dx$

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

Здесь n- номер варианта.

№ варианта	Интеграл
n	$a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+(11-n)^2}dx$

Задача 4. Вычислить с помощью определенного интеграла площадь плоской фигуры и выполнить чертежи. Здесь n- номер варианта.

а) ограниченной в ДСК линиями l_1 и l_2;

б) ограниченной в ПСК линией l.

№ варианта	Уравнения линий	
	а)	*б*)
n	$l_1:\ y=2nx^2;$ $l_2:\ y=(n^2-8)x+4n$	$l:\ \rho=11-n-\sin\varphi$

Задача 5. Дано дифференциальное уравнение 1-го порядка и точка *М*. Определить тип дифференциального уравнения. Найти общее решение дифференциального уравнения, уравнение интегральной кривой, проходящей через точку *М* и уравнения еще 4-х интегральных кривых (любых). Построить все эти кривые в системе координат.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	Точка
1	$xy'+y=0$	$M(-2;\ 4)$
2	$y'(x^2-4)=2xy$	$M(0;\ 3)$
3	$\sin^2 x\cdot y'=1$	$M\left(\frac{\pi}{4};-1\right)$
4	$y'=\sqrt{1-y^2}$	$M(0;\ 1)$
5	$2\sqrt{x}\cdot y'=1$	$M(1;\ 2)$
6	$\mathrm{tg}x\cdot y'-y=0$	$M\left(-\frac{\pi}{2};\ 2\right)$
7	$y'\cdot\sqrt{1-x^2}+x=0$	$M(0;\ -1)$

8	$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$	$M(0;\ 1)$
9	$y' - 2(x-1) = 0$	$M(2;\ 1)$
10	$xy' = 3y$	$M(–1;\ 2)$

Задача 6. Дано дифференциальное уравнение 2-го порядка. Определить тип дифференциального уравнения и найти его общее решение, используя метод неопределенных коэффициентов.

№ варианта	Дифференциальное уравнение	№ варианта	Дифференциальное уравнение
1	$y'' - 2y' + y = e^{-x}(4x^2 + 2)$	6	$y'' + y' = xe^{-x}$
2	$y'' + 4y = 3\sin x + 5\cos x$	7	$y'' + y = x^2 e^x$
3	$y'' + y' - 2y = 3e^x$	8	$y'' + 2y' + 5y = 17\cos 2x$
4	$y'' + 6y' + 9y = 6\sin 3x$	9	$y'' + 4y' + 4y = e^x(3x + 2)$
5	$y'' + 9y = e^x(10x - 1)$	10	$y'' - y' = x^2$

Задача 7. Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Найти общее решение системы методом повышения порядка.

№ варианта	Система дифференциальных уравнений	№ варианта	Система дифференциальных уравнений
1	$\begin{cases} x' = 4x + 6y \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$	6	$\begin{cases} x' = -5x - 4y \\ y' = -2x - 3y \end{cases}$
2	$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = 8x + y \end{cases}$	7	$\begin{cases} x' = 6x + 3y \\ y' = -8x - 5y \end{cases}$
3	$\begin{cases} x' = 5x + 8y \\ y' = 3x + 3y \end{cases}$	8	$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x + 8y \end{cases}$
4	$\begin{cases} x' = 2x + 8y \\ y' = x + 4y \end{cases}$	9	$\begin{cases} x' = -x + 5y \\ y' = x + 3y \end{cases}$
5	$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = -x + 4y \end{cases}$	10	$\begin{cases} x' = 7x + 2y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике : [полный курс] / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр.- Москва : Айрис-пресс, 2011. - 602, [1] с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 212.
2. Сборник задач по курсу математического анализа : учеб. пособие / Г. Н. Берман. - [22-е изд., перераб.]. - Санкт-Петербург : Профессия, 2005, 2004, 2002, 2003, 2001. - 432 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 781.

Дополнительная литература

1. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии : учеб. пособие для вузов / Д. В. Клетеник; под ред. Н. В. Ефимова. - 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Профессия, 2007, 2003 ; Москва. - 200 с. : ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 378.
2. Данко П. Е. , Попов А. Г., Кожевникова Т. Я., Данко С. П. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие / П. Е. Данко [и др.]. - 7-е изд., испр. - Москва: Оникс: Мир и Образование, 2008. - 815 с.: ил. Количество экземпляров в библиотеке: абонемент – 30.