МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

(ФГБОУ ВО «МГТУ»)

«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
_______________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям)
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании

Методического объединения преподавателей дисциплин математического и общего естессственнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И.Месяцева,и дисциплин профессионально цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Председатель МК

Чекашова Е.А.

Протокол от 29 мая 2019 г.

Разработано

на основе ФГОС СПО по специальности 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 18 апреля 2014 г. № 348

Автор (составитель): Голованова А.В., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»____

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент) Банникова Д.В., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата, подпись

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Содержание

Введение

1.1 Методические указания по практическим и лабораторным работам обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям) базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 18 апреля 2014 г. № 348, учебного плана очной и заочной форм обучения, утвержденного 31.05.2019 г.

1.1 Цели и задачи практических (лабораторных) работ –

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному усвоению учебного материала. Выполнение обучающимися практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой.

1.2 Требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1 - анализировать сложные функции и строить их графики;

У2 - выполнять действия над комплексными числами;

У3 - вычислять значения геометрических величин;

У4 - производить операции над матрицами и определителями;

У5 - решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

У6 - решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

У7 - решать системы линейных уравнений различными методами;

знать:

З1 - основные математические методы решения прикладных задач;

З2 - основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

З3 - основы интегрального и дифференциального исчисления;

З4 - роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Процесс изучения дисциплины Математика направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1) .

Таблица 1 Компетенции, формируемые дисциплиной Математика в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	Содержание компетенции	Требования к знаниям, умениям, практическому опыту
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для	У1-У7, З1-З4

	эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.	
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации	У1-У7, З1-З4
ПК 1.1.	Осуществлять обслуживание и эксплуатацию холодильного оборудования (по отраслям).	У1-У7, З1-З4
ПК 1.2.	Обнаруживать неисправную работу холодильного оборудования и принимать меры для устранения и предупреждения отказов и аварий.	У1-У7, З1-З4
ПК 1.3.	Анализировать и оценивать режимы работы холодильного оборудования	У1-У7, З1-З4
ПК 1.4.	Проводить работы по настройке и регулированию работы систем автоматизации холодильного оборудования	У1-У7, З1-З4
ПК 2.1.	Участвовать в организации и выполнять работы по подготовке к ремонту и испытаниям холодильного оборудования.	У1-У7, З1-З4
ПК 2.2.	Участвовать в организации и выполнять работы по ремонту холодильного оборудования с использованием различных приспособлений и инструментов.	У1-У7, З1-З4
ПК 2.3.	Участвовать в организации и выполнять различные виды испытаний холодильного оборудования.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.1.	Участие в планировании работы структурного подразделения для реализации производственной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.2.	Участие в руководстве работой структурного подразделения для реализации производственной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.3.	Участвовать в анализе и оценке качества выполняемых работ структурного подразделения.	У1-У7, З1-З4

2. Тематический план видов практических работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание практической работы обучающихся	Аудиторная учебная нагрузка, час	Практическая работа обучающегося, час
1	**2**	**3**	**4**
Раздел 1. Комплексные числа.		4	2
Тема 1.1. Комплексные числа.	№ 1. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.		2
Раздел 2. Математический анализ.		22	12
Тема 2.1. Дифференциальное исчисление.	№ 2. Вычисление пределов функций.		2
	№ 3. Дифференцирование функций.		2
	№ 4. Исследование функции с помощью производной и построение графиков.		2
Тема 2.2. Интегральное исчисление	№ 5. Методы нахождения неопределённого интеграла.		2
	№ 6. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.		2
Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.	№ 7. Решение дифференциальных уравнений.		2
Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики.		6	2
Тема 3.1. Элементы теории вероятностей и математической статистики	№ 8. Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики.		2
Раздел 4. Элементы линейной алгебры.		8	4
Тема 4.1. Матрицы и определители.	№ 9. Операции над матрицами и вычисление определителей матриц.		2
Тема 4.2. Решение систем линейных уравнений	№ 10. Решение систем линейных уравнений различными методами.		2
		40	20

Раздел 1. Комплексные числа.

Тема 1.1 Комплексные числа.

Практическая работа № 1. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами, научиться представлять комплексное число в различных формах, применять понятия комплексных чисел для решения уравнений второй степени.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы, дидактические карточки с заданиями.

Задания:

Задание 1. Вычислите, выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел, изобразите их на комплексной плоскости.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i+\dfrac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\dfrac{1+i}{1-i}$ 5) $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3-3$ 7) $(1-i)^2+i^4$

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме:

1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$ 5) $7+8i$ 6) $10-5i$ 7) $2-4i$.

Задание 3. Найдите все корни уравнений:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-3x+10=0$; 4) $x^2-2x+10=0$;

5) $x^2+2x+10=0$ 6) $x^4-16=0$ 7) $x^2+100=0$

Задание 4. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме и показательной форме и выполнить действия:

а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) $\dfrac{Z_1}{Z_2}$; в) Z_2^2

1). $z_1=-\sqrt{3}-j$ $z_2=2-2j$ 2).2. $z_1=6j$ $z_2=-2+2\sqrt{3}j$

3). $z_1=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}j$ $z_2=-1+j$ 4). $z_1=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}j$ $z_2=8-8\sqrt{3}j$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

1. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида

$$z = x + iy \qquad (1.1)$$

где *x, y* – действительные (вещественные) числа, а число i определяемое равенством $i^2 = -1$ ($i = \sqrt{-1}$), называется мнимой единицей.

Число *x* называется *действительной* (*вещественной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); *y* – мнимой частью комплексного числа *z* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Если *x*=0, то число *z* называют *чисто мнимым*; если $y = 0$, то получается вещественное число $z = x + 0i = x$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны* друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; комплексное число *z* считается равным нулю, если $x = y = 0$.

Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *сопряженными*. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

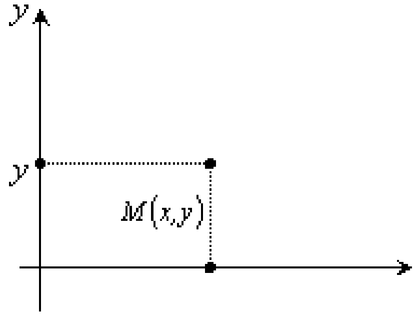
<u>*Пример 1.*</u> Найти i^{28}, i^{33}

$i^{28} = \left(i^2\right)^{14} = (-1)^{14} = 1 \qquad i^{33} = i^{32+1} = i^{32} \cdot i = \left(i^2\right)^{16} \cdot i = (-1)^{16} \cdot i = i$

<u>*Пример 2.*</u> Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{6 \pm 6\, i}{2}$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.



Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой M(x,y), плоскости Oxy и, наоборот, каждую точку M(x,y) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$. Число *z*=0 ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такая плоскость называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости. Комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить в виде радиус-вектора $O\overline{M}$.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Разность по формуле $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + + i^2 y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. В частности $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

<u>Пример 3.</u> Выполнить действия: *a) (4+2i)+(1+5i); b) (3+5i)-(6+3i).*
c) 2i ·3i; d) (2-3i)(2+3i); e) (5-4i)(3+2i).

а) *(4+2i)+(1+5i)=(4+1)+(2+5) i =5+7i.*
b) (3+5i)-(6+3i)=(3-6)+(5-3)i=-3+2i.
c) $2i \cdot 3i = 6i^2 = -6$;
d) $(2-3i)(2+3i) = 4-9i^2 = 4+9 = 13$;
e) (5-4i)(3+2i)=15+10i -12 i +8=23-2i.

4) Чтобы найти *частное* комплексных чисел в алгебраической форме, нужно домножить делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

<u>Пример 4</u>**.** Выполнить действия: *a)* $\frac{1+i}{1-i}$; *b)* $\frac{2-7i}{3+4i}$

a) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i.$

b) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$z = \frac{2-7i}{3+4i} = \frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2} = \frac{6-29i-28}{9+16} = \frac{-22-29i}{25} = -\frac{22}{25} - \frac{29}{25}i\,;$$

3. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *Ox* располагаются вещественные числа $z = x + i0 = x$, а на оси *OY* – чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$).

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргументом* комплексного числа ($\varphi = \operatorname{Arg} z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси *Ox*. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

При этом выражение вида

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

φ – аргумент комплексного числа z можно найти из формул

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases} \qquad (1.3)$$

или $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Заметим, что при выборе значений φ необходимо учитывать знаки x и y.

Алгоритм перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:

1. Найти модуль комплексного числа по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Для нахождения φ определить геометрически, в какой четверти находится точка z.
3. Составить уравнения $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ и $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$ и по решению одного из них найти угол φ .
4. Записать комплексное число в тригонометрической форме.

<u>*Пример 5.*</u> Записать комплексное число в тригонометрической форме:

а) $6i;$ *b)* $1 - i\sqrt{3}$.

Решение. а) Здесь *x=0, y=6* $|z| = 6$.

Поскольку число 6i лежит на положительной полуоси Oy, то значение аргумента $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поэтому $6i = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\ sin\frac{\pi}{2})$).

b) Здесь *x=1, y=*$-\sqrt{3}$.

По определению $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Для определения аргумента воспользуемся формулой: (1.3) $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Получаем, что $\varphi = \arg z = \dfrac{5\pi}{3}$. (так как соответствующая точка лежит в четвертой четверти). Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: $z = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1) Произведение комплексных чисел: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$.

2) Частное комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

3*) Возведение в степень и извлечение корней*. Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива *формула Муавра*

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (1.4)$$

4) Для *извлечения корня n-й степени* (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня: $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, $k=0,1,\dots,n-1$. (1.5)

Корень n-й степени имеет n различных корней.

Пример 6.

Даны числа $z_1 = 3\left(\cos 75^0 + i\sin 75^0\right)$ $z_2 = 2\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)$

а) $z_1 \cdot z_2 = 3\left(\cos 75^0 + i\sin 75^0\right)\cdot 2\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right) = 6\left(\cos(75° + 15°) + i\sin(75° + 15°)\right) =$
$= 6\left(\cos 90° + i\sin 90°\right) = 6i$

б) $z_1 / z_2 = \frac{3\left(\cos 75^0 + i\sin 75^0\right)}{2\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)} = \frac{3}{2}\left(\cos(75° - 15°) + i\sin(75° - 15°)\right) = \frac{3}{2}\left(\cos 60° + i\sin 60°\right) =$

$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}i$

в) $z_2^6 = \left[2\left(\cos 15^0 + i\sin 15^0\right)\right]^6 = 2^6\left(\cos(6\cdot 15°) + i\sin(6\cdot 15°)\right) = 64\left(\cos 90^0 + i\sin 90^0\right) = 64i$

Пример 7. Выполните действия в тригонометрической форме:

a) $(-1+i)^{13}$ b) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$

Решение. a) Чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме.

Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно, $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13} = \sqrt{2^{13}}\left(\cos\frac{3\cdot 13\pi}{4} + i\sin\frac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу (1.4)).

Учитывая, что $\frac{39\pi}{4} = 10\pi - \frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13} = 64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right) = 64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 64 - 64i\,.$$

b) Получим тригонометрическую форму записи числа z. $r = \sqrt{3+1} = 2$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{1}{2}$.

Отсюда $\varphi = -\frac{\pi}{6}$, а $z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Тогда по формуле Муавра получим:

$$z^5 = 2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi - i\sin\frac{5}{6}\right) =$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\left(\sqrt{3} + i\right).$$

Пример 8. Вычислить: $\sqrt[3]{-1}$.

Тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ (|z|=*1*), поэтому в силу (1.5)

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

При к=0 $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

При к=1 $z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

При к=2 $z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Показательная форма записи комплексного числа.

Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой: $e^{i\varphi}=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, которая называется *формулой Эйлера*.

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид: $z=re^{i\varphi}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам степеней: пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z_1{}^n=r_1{}^ne^{in\varphi_1}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое число называется комплексным?
2. Что такое мнимая единица? Как вычисляют степень мнимой единицы?(пример).
3. Что такое действительная часть числа? Что такое мнимая часть числа?
4. Какие числа называются чисто мнимыми, равными, сопряженными?
5. Как представить комплексное число графически?
6. Как найти сумму, разность и произведение комплексных чисел в алгебраической форме? (пример)
7. Как найти частное комплексных чисел в алгебраической форме? (пример)
8. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
9. Что такое модуль и аргумент комплексного числа, как их найти?
10. Как перевести комплексное число из алгебраической в тригонометрическую форму?
11. Как найти произведение и частное чисел в тригонометрической форме?
12. Как возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
13. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
14. Как представить комплексное число в показательной форме?
15. Как найти произведение и частное чисел в показательной форме?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1 Дифференциальное исчисление

Практическая работа № 2. Вычисление пределов функций.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы, дидактические карточки с заданиями.

Задание:

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5} \qquad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6} \qquad 3)\lim_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$$

$$4)\lim_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n} \qquad 5)\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2} \qquad 6)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$$

$$7)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2} \qquad 8)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n} \qquad 9)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\qquad 2)\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\qquad 3)\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\qquad 5)\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\qquad 6)\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\qquad 9)\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}\qquad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}\qquad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}\qquad 5)\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\sin x\right)}{\sin 4x}\qquad 6)\lim_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to0}\frac{tg3x}{tgx}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}\qquad 9)\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Число *A* называют *пределом функции f(x) в точке* x_0 при $x\to x_0$ (и пишут $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0,$ такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Число A называется *пределом функции* y= f(x) на бесконечности (или при x, стремящимся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента *x* соответствующие значения функции *f*(*x*) сколь угодно мало отличаются от числа A.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке x_0 если $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке x_0 если $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $f(x) \neq 0$ для $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно большая при $x \to x_0$.

Верно и обратное: если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$ (c=const).

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \ \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

2. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$

3. $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A \cdot B;$

4. Если при этом $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}, \quad (B \neq 0).$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x \to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3+15}{10x^2-4} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{2 \cdot 1^3+15}{10 \cdot 1^2-4} = \frac{2+15}{10-4} = \frac{17}{6}$.

При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения: если $c = \text{const}, \quad c \neq 0, \quad c \neq \infty,$

$$\frac{0}{c} \to 0; \quad \frac{c}{0} \to \infty; \quad \frac{\infty}{c} \to \infty; \ c \cdot \infty \to \infty; c \cdot 0 \to 0; \ a^\infty \to 0, \text{если } 0 < a < 1; a^\infty \to \infty, \text{если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right); \ \left(\frac{0}{0}\right); \ (0 \cdot \infty); \ (\infty - \infty); (1^\infty); (\infty^0); (0^0).$$

Раскрытие неопределенностей:

1. <u>Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$</u>

1. При раскрытии неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ в случае рациональных функций *числитель и знаменатель раскладывают на множители*, выделяя множитель, стремящийся к нулю.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Раскрываем неопределенность путем разложения числителя и знаменателя на множители и сокращения дроби.

Решение: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)}=\dfrac{8}{3}$

Для знаменателя использована формула разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a\,(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения.

Для числителя формула: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

2). Если под знаком предела содержатся иррациональности, то числитель и знаменатель *умножают на сопряженное*.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$:=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. Неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. Числитель и знаменатель не имеют предела, т.к. оба неограничено возрастают. *Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени* в данной дроби.

Пример 4. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+6x-5}{10x^3-8x^2+2}$

Подстановка $x\to\infty$ показывает, что функция имеет неопределенность типа $\dfrac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^3 (x в наивысшей степени).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x-5}{10x^3-8x^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(10-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{1}{10}\text{,т.к. }\frac{6}{x^2},\frac{5}{x^3},\frac{8}{x},\frac{2}{x^3}\to 0\text{ при }x\to\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^7+8x^2-5}{x^4-x^3+1}$ Подстановка $x\to\infty$ показывает, что функция имеет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на х в наибольшей степени, т.е. на x^7. Используя свойства $\left(\frac{c}{0}\right)\to\infty$ имеем:

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^7+8x^2-5}{x^4-x^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{8}{x^5}-\frac{5}{x^7}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^7}\right)}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+4x^2+1}{x^8+3x^3+7}$. Разделим числитель и знаменатель на х в наибольшей степени, т.е. на x^8.

Используя свойство $\left(\frac{0}{c}\right)\to 0$ имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+4x^2+1}{x^8+3x^3+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^6}+\frac{1}{x^8}}{1+\frac{3}{x^5}+\frac{7}{x^8}}=\left(\frac{0}{1}\right)=0$.

3. Неопределенность $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение на сопряженное.

Пример 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=$$
$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{-5}{1+1}=-2{,}5.$$

Замечательные пределы:

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ (1)

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ (2)

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ (3)

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$. Приведем этот предел к виду (1). Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 8

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Используем соотношение (3). Для этого показатель степени умножим и разделим на 5х.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\left[1^{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)} = e^{\frac{5}{3}}$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}} = e^0 = 1$$

Вопросы для самоконтроля:

1.Что называется пределом функции в точке?

2. Что понимают под пределом функции на бесконечности?

3. Какая функция называется бесконечно малой (бесконечно большой)?

4. Какова взаимосвязь между бесконечно малыми и бесконечно большими?

5. Какие арифметические операции можно выполнять над пределами? Как вычислить предел во внутренней точке области определения любой элементарной функции?

6. Как раскрывается неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ в случае рациональных функций?

7. Как раскрывается неопределенность $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ в случае иррациональных функций?

8. Как раскрывается неопределенность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$?

9. Как раскрывается неопределенность $\infty-\infty$?

10. Сформулируйте первый замечательный предел.

11. Сформулируйте второй замечательный предел и следствие из него.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 3. Дифференцирование функций.

Цель: сформировать умение находить производные функций, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $a)\ y=3x^3-\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[4]{x^5}$; $б)\ s=(1+t^2)(2-3\operatorname{arcctg} t)$; $в)\ u=\ln^3\dfrac{V}{2}$; $г)\ z=\dfrac{5-\sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $a)\ y=5x-\dfrac{2}{x^4}+3\sqrt[5]{x^6}$; $б)\ s=(4-3\ln t)(5+2\sin t)$; $в)\ u=\sin^4(2V+3)$; $г)\ z=\dfrac{\sin(2-t)}{2-\ln 3t}$.

3) $a)\ y=7x^2+\dfrac{4}{x^6}-\sqrt[5]{x^2}$; $б)\ s=(3-\cos t)(5+6\sin t)$; $в)\ u=\sqrt[3]{1-4V^2}$; $г)\ z=\dfrac{t^3-e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $a)\, y=5x^2+\dfrac{3}{x^4}-\sqrt[6]{x^7}$; $б)\, s=(3t^3-4)(t-2\cos t)$; $в)\, u=\ln^2(5V-3)$; $г)\, z=\dfrac{\ln(4-5t)}{\sin t}$.

5) $a)\, y=x^5-\dfrac{2}{x^3}+2\sqrt[7]{x^5}$; $б)\, s=t^4(4+\mathrm{arctg}t)$; $в)\, u=\cos^3(3V+1)$; $г)\, z=\dfrac{t-\arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) $a)\, y=x^4+\dfrac{1}{x}-2\sqrt[3]{x}$; $б)\, s=(3+\mathrm{tg}t)(1-4\mathrm{ctg}t)$; $в)\, u=tg^4(3V+2)$; $г)\, z=\dfrac{\mathrm{arctg}2t}{1+4t^2}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2-3}{x}$, $x_0=1$. 2) $\sqrt{5-x^2}$, $x_0=2$. 3) $\dfrac{x^2+3x}{3}$, $x_0=-1$.

4) $\sqrt{x}+2x$, $x_0=9$. 5) $\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_0=1$. 6) $\sqrt{1+3x}$, $x_0=1$.

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=\cos t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\cos(2t+6) \\ y=\sin(2t+6) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=(1-t)^2 \\ y=\cos(t-1) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=\mathrm{tg}t \\ y=t^2-8 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x=e^{4t} \\ y=(1-4t)^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x=c\mathrm{tg}t \\ y=t^2+1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y=\sin 2x+5$; 2) $y=\ln x-x^3$; 3) $y=4+8\sin x$;

4) $y=2x-1$. 5) $y=1-\cos x$; 6) $y=10-3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y=\ln x+9$ 2) $y=\cos x-\ln x$ 3) $y=\sin x+x^4$

4) $y=x^2+\sin x$ 5) $y=x+\ln x$ 6) $y=3e^x+2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) $y=(\sin x)^{\cos x}$ 2) $y=(\cos x)^x$ 3) $y=x^{\ln x}$ 4) $y=(\sin x)^{\ln x}$ 5) $y=x^{\cos x}$ 6) $y=(tgx)^{\ln x}$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\mathrm{arctg}\, x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{1-\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{1-3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y=f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

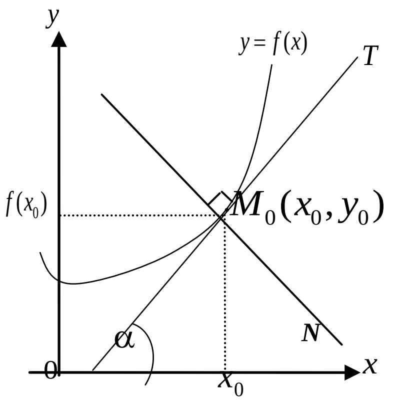
$$y'=f'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$f'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.y'_x\right|_{x_0}$, $y'(x_0)$ и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$,

то $f'(x_0)=\text{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K=\text{tg}\alpha=f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ *в точке* x_0 *(прямая* M_0T*) имеет вид:*

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметричес-кими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x},\ (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},\quad c = \text{const}\quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\text{tg}\,u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\text{ctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}\quad (u > 0)$	**14**	$(\text{arctg}\,u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\quad (u > 0)$	**15**	$(\text{arcctg}\,u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \operatorname{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1; используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$
$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2)-(\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Решение:

1) $y(x_0)=y(2)=\sqrt{2^2-3}=1;$

2) $y'(x)=((x^2-3)^{1/2})' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)' = \frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

3) $y'(x_0)=y'(2)=\frac{2}{\sqrt{2^2-3}}=2.$

4) Подставим x_0, $y(x_0)$, $y'(x_0)$ в уравнения (2) и (3) получим: $y=1+2(x-2),$ или $2x-y-3=0$ — уравнение касательной.

$y=1-\frac{1}{2}(x-2),$ или $x+2y-4=0$ — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана парамет-рически:
$$\begin{cases} x=\ln(5-2t) \\ y=\operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$$

Используем правило VII $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$\begin{cases} x'_t = \dfrac{(5-2t)'}{5-2t} = \dfrac{-2}{5-2t} \\ y'_t = \dfrac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2} = \dfrac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{-2}{1+(5-2t)^2} : \frac{-2}{5-2t} = \frac{5-2t}{1+(5-2t)^2} = \frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y=x+\cos 2x;$ *б*) $u=3+e^{-x};$ *в*) $s=\ln 3t.$

Для дифференциала функции $y = y(x)$ справедлива формула $dy = y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy = (x + \cos 2x)'dx = (1 - \sin 2x \cdot 2)dx = (1 - 2\sin 2x)dx.$

б) $du = (3 + e^{-x})'dx = e^{-x}(-1)dx = -e^{-x}dx.$

в) $ds = (\ln 3t)'dt = \dfrac{(3t)'}{3t}dt = \dfrac{3}{3t}dt = \dfrac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x.$

Решение. $y'' = (y')',$ поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \cdot \ln x$$
$$\left(\ln y\right)' = \left(x \cdot \ln x\right)'$$
$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$
$$y' = y\left(\ln x + 1\right)$$
$$y' = x^x \cdot \left(\ln x + 1\right)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}$;

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо x предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty, \text{ т. к. } \frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to -7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim\limits_{x\to -7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to -7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to -7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to -7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Что называют производной второго порядка?
4. Сформулируйте правила дифференцирования.
5. Что такое сложная функция? Как найти производную сложной функции.

6. Как найти дифференциал функции.
7. В чем заключается физический смысл производной и производной второго порядка?
8. Сформулируйте правило Лопиталя.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 4. Исследование функции с помощью производной и построение графиков.

Цель: Закрепить умения применять производную к исследованию функций и построению графиков функций.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание №1. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график

1	$y = 4 - 2x - 7x^2$	11	$y = -x^2 + 5x + 4$
2	$y = 5 + 12x - x^3$	12	$y = -2 + 3x - x^3$
3	$y = 2x^3 + 3x^2 - 4$	13	$y = x^4 - 2x^2 - 3$

4	$y = 9 + 8x^2 - x^4$	14	$y = 6x^2 - x - 5$
5	$y = -2x^2 + x$	15	$y = 3x^2 - x^3$
6	$y = \frac{1}{2}x^4 - x^2$	16	$y = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$
7	$y = 2x - \frac{1}{6}x^3$	17	$y = 4x^2 - 2x^4$
8	$y = \frac{1}{2}x^4 - 8x^2$	18	$y = 5x^3 - 3x^5$
9	$y = 3x^5 - 5x^3 + 2$	19	$y = -5x^2 - 10x$
10	$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$	20	$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$
21	$y = x^3 - 3x$	22	$y = 3x^3 - x$
23	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$	24	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$
25	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$	26	$y = -x^3 + x$

Задание №2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

1	$3x^5 - 20x^3 + 9$, $[-10;-1]$	11	$x^5 + 15x^3 - 50x$, $[-5;0]$
2	$3x^5 - 20x^3 - 8$, $[-5;1]$	12	$x^5 - 10x^3 - 135x$, $[-5;1]$
3	$3x^5 - 20x^3 - 16$, $[-3;-1]$	13	$y = x^3 + 16x^2 + 64x + 7$, $[-11;-7]$
4	$x^5 - 5x^3 - 20x$, $[-8;1]$	14	$y = -10{,}5x^2 - x^3 + 22$, $[-1;8]$
5	$x^5 + 15x^3 - 260x$, $[-10;0]$	15	$y = x^3 - 2{,}5x^2 - 50x - 2$, $[3;12]$
6	$y = x^3 + 9{,}5x^2 - 72x + 18$, $[-16;-6]$	16	$y = x^3 - 3{,}5x^2 + 4x - 23$, $[-3;3]$
7	$3x^5 - 5x^3 + 15$, $[-4;0]$	17	$y = x^3 - 9{,}5x^2 + 30x - 3$, $[-4;8]$
8	$y = 5 + 12x - x^3$, $[-3;-1]$	18	$x^5 + 5x^3 - 140x$, $[-10;0]$
9	$x^5 + 15x^3 - 50x$, $[-4;0]$	19	$y = x^3 - 9{,}5x^2 - 40x - 24$, $[6;11]$
10	$x^5 - 5x^3 - 20x$, $[-9;1]$	20	$y = x^3 + 17{,}5x^2 + 72x + 21$, $[-13;-9]$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.

3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Общая схема построения графиков функций:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти промежутки монотонности (промежутки возрастания и убывания) функции и ее экстремумы (точки максимума и минимума).
5. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
6. Построить график, используя полученные результаты исследования.

1. Находим область определения $D(f)$ функции $y = f(x)$.

2. Проверяем функцию на четность. Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная, график функции симметричен относительно оси OY. Если $f(-x) = - f(x)$, то функция нечетная, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. В противном случае функция является ни четной, ни нечетной. Если функция периодическая, то находим период функции.

3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).

а) Находим нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ox). Для этого мы решаем уравнение $f(x) = 0$.

б) Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (Oy). Для этого ищем значение функции при $x=0$.

4. Исследуем функцию с помощью производной: находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.

Для этого мы следуем алгоритму:

а) Находим производную $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x) = 0$ - это стационарные точки.

в) Промежутки, на которых производная положительна, являются *промежутками возрастания* функции. Промежутки, на которых производная отрицательна, являются *промежутками убывания* функции.

Точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус, являются *точками максимума.* Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс, являются *точками минимума*.

г) Найдите значения функции в точках экстремума.

5. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.

Если в некотором промежутке f''>0, то кривая выпукла вниз в этом промежутке, если f''<0, то кривая выпукла вверх на этом промежутке.

Алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба:

1. Находим вторую производную f''.
2. Находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.
3. Исследуем знаки второй производной справа и слева от найденных точек. Точки, в которых вторая производная меняет знак является точкой перегиба.
4. Находим значение функции в точках перегиба.

Пример 1. Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

Решение.

1) D(f): R- множество действительных чисел

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-x)^2 - 2\cdot(-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

$f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

Функция непериодическая.

3) Нули функции. С осью *Oy*:

$$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

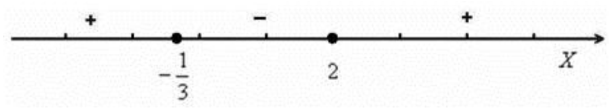
Чтобы найти точки пересечения с осью Ox (нули функции) требуется решить уравнение *f(x) = 0.* (в данном случае этот пункт пропускаем)

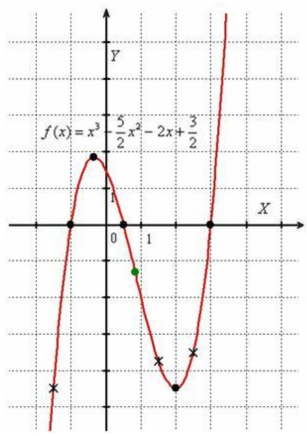
4) Возрастание, убывание.

Найдём критические точки (точки в которых производная равна 0 или не существует) и приравняем ее к 0:

$$f'(x)=\left(x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}\right)'=3x^2-5x-2=0 \qquad x=-\frac{1}{3},\ x=2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:





Следовательно, функция возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ *и* $(2;+\infty)$ и убывает на $\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

Экстремумы функции

$x=-\frac{1}{3}$ точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-»

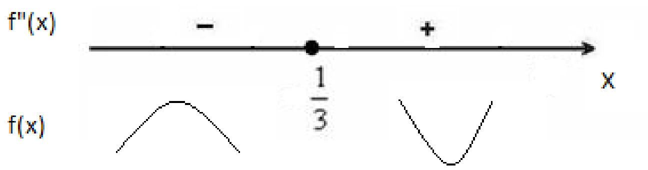
. $x=2$ точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

Найдем значение функции в точках экстремума:

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{27}-\frac{5}{18}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}=\frac{50}{27}\approx 1{,}85 \qquad f(2)=8-10-4+\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}=-4\frac{1}{2}.$$

5. Найдем $f''=6x-5$. Приравняем к 0 и решим уравнение: 6x-5=0, x=$\frac{5}{6}\approx$ 0,8.

   Точка x=$\frac{5}{6}$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty<x<\frac{5}{6}$ и $\frac{5}{6}<x<\infty$. В первом из них $f(x)''<0$, а во втором $f(x)''>0$, то есть в промежутке $-\infty<x<\frac{5}{6}$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2<x<\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получим точку перегиба x = $\frac{5}{6}$.



Найдем значение функции в этой точке: $f\left(\frac{5}{6}\right)\approx -1{,}3$

6. Строим график функции:

Алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке:

1. Найти производную функции.
2. Определить критические точки (те точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует).
3. Выбрать из найденных точек те, которые принадлежат данному отрезку.
4. Вычислить значения функции (не производной!) в этих точках и на концах отрезка.
5. Среди полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее, оно и будет искомым.

Пример 3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23$

на отрезке [8; 13].

Решение: действуем по алгоритму нахождения наименьшего значения функции на отрезке:

1) $y' = 3x^2 - 36x + 81$.
2) $y' = 3x^2 - 36x + 81 = 0$

   $x^2 - 12x + 27 = 0,$

   $x = 3$ и $x = 9$

3) $x = 9 \in [8; 13]$.
4) $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23 = x(x-9)^2+23$:

$$y(8) = 8 \cdot (8-9)^2+23 = 31;$$

$$y(9) = 9 \cdot (9-9)^2+23 = 23;$$

$$y(13) = 13 \cdot (13-9)^2+23 = 231.$$

Ответ. $\max_{[8;13]} f(x) = 231$; $\min_{[8;13]} f(x) = 23$.

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте общую схему исследования графиков функций.
2. Сформулируйте алгоритм нахождения промежутков возрастания/убывания функции и нахождения точек максимума/минимума.
3. Сформулируйте алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 5. Методы нахождения неопределённого интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\int\sin\frac{x}{2}\,dx$ $\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\int\cos 2x\,dx$ $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ $\int\sin 2x\,dx$ $\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\int\sin(2-3x)\,dx$ $\int\frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$ $\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\int\operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int(1+2x)\cos x\,dx$ $\int\arcsin x\,dx$

5) $\int(8x-1)\sin 5x\,dx$ $\qquad\qquad$ $\int(6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^{x}\,dx$ $\qquad\qquad$ $\int(3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int\limits_{1}^{2}\left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int\limits_{-2}^{3}\left(3x^2+6x-2\right)dx$ 3) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int\limits_{0}^{8}(21x-19)dx$ 5) $\int\limits_{-4}^{0}\left(x^3+8\right)dx$

6) $\int\limits_{10}^{13}(2x+7)dx$.

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x); \quad d\int f(x)dx = f(x)dx;$

2. $\int dF(x) = F(x) + C;$

3. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \qquad k$ — const;

4. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha}du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$а)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{matrix}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\ \text{— верно}.$$

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

а) $\int\cos 4x dx$; *б*) $\int e^{9x+1}dx$; *в*) $\int x(2-x^2)^5dx$

Решение:

$$a)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в)\int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2-x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$

$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx\to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx\to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx\to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U\to dU$	$dV\to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx\to dU=\frac{dx}{x}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx\to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U=\arccos kx\to dU=-\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \mathrm{arctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arctg}\,kx\to dU=\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \mathrm{arcctg}\,kx\,P_n(x)dx$	$U=\mathrm{arcctg}\,kx\to dU=-\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n=0,1,2,\ldots$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

а) $\int(3x-1)\sin 2xdx;$ *б*) $\int(1+2x)\ln xdx.$

Решение. а) $\int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{matrix}U=3x-1\to dU=3dx\\ dV=\sin 2xdx\to V=-\frac{\cos 2x}{2}\end{matrix}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

б) $\int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{matrix}U=\ln x\to dU=\frac{dx}{x}\\ dV=(1+2x)dx\to\\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{matrix}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определение первообразной. Чем неопределенный интеграл отличается от первообразной?
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
3. Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?
4. Как проверить, правильно ли найден интеграл?
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования функций? (пример)
6. В чем состоит метод подстановки (метод замены переменной) при нахождении неопределенного интеграла? (пример).
7. Напишите формулу вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.
8. Как выбирать U и V при использовании метода интегрирования по частям?
9. Напишите пример вычисления интеграла методом интегрирования по частям.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 6. Определенный интеграл. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Цель: сформировать умение находить определенный интеграл и применять его к нахождению площадей.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2 (x^3+10x)dx$ 2) $\int_{-2}^3 (3x^2+6x-2)dx$ 3) $\int_1^3 (x^2-16x+3)dx$ 4) $\int_0^8 (21x-19)dx$ 5) $\int_{-4}^0 (x^3+8)dx$

6) $\int_{10}^{13} (2x+7)dx$ 7) $\int_1^2 (3x^2+2x)dx$ 8) $\int_{-1}^1 (2x^3-2x)dx$ 9) $\int_1^2 \left(3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$ 10) $\int_{-2}^0 (3-2x-x^2)dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной.

1. $\int_{\sqrt{2}}^3 \frac{3xdx}{x^2-1}$ 2. $\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ 3. $\int_2^6 \frac{xdx}{x^2-3}$ 4. $\int_{0,5}^1 \sqrt{4x-2}dx$ 5. $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{8-3x}}$

6. $\int_1^5 \frac{xdx}{x^2+1}$ 7. $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}$ 8. $\int_1^2 \frac{2dx}{3-x}$ 9. $\int_{-1}^0 2x(x^2-1)^9 dx$ 10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

Задача 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями.

1.	$y=\sqrt{x}, \quad y=2-x, y=0.$	**2.**	$y=-x^2, x+y+2=0$
3.	$y=x^2-2, \quad y=x.$	**4.**	$y=x^2, \ y=6-x, \ y=0.$
5.	$y=x^2, \ y=x+2.$	**6.**	$y=x^2, \ y=2-x.$
7.	$y=x^2, \ y=3-x.$	**8.**	$y=-x^2, \ y=x-2.$
9.	$y=2x, \ y=x^2.$	**10.**	$y=3-x^2, \ y=-2x.$

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y=x^2-2, \ y=1-2x$ 2) $y=x^3, \quad y=8, \quad x=0$ 3) $y=3x^2+1, \quad y=3x+6$

4) $y=x^2, \ y=x+1$ 5) $y=x^2, \ y=2-x^2$ 6) $y=x^2-1, \ y=1-x$

7) $y = x^2 - 2x + 1,\ y = 1 + x$ 8) $y = 4x - x^2,\ y = 4 - x$ 9) $y = 0{,}5x^2 + 1,\ y = -x + 0{,}5,\ x = -4$

10) $y = -x^2 + 4x + 1,\ y = x^2 + 1$

Задание 5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0, \quad y = 1$ 2) $x^2 + y = 0, \quad y = -1$ 3) $x - y^2 = 0, \quad x = 1$

4) $y = 4x^3, \quad x = 0, \quad y = -4$ 5) $y = 4x^3, \quad x = 1, \quad y = 0$ 6) $y = -4x^3, \quad x = -1, \quad y = 0$

7) $y = x^2 + 1,\ x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0$ 8) $y = \sqrt{x},\ x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$

9) $y = 2x,\ y = x + 3, \quad x = 0, \quad x = 1$ 10) $y = 2 + x,\ y = 1, \quad x = 0, \quad x = 2$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$ (1)

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x).$ Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx;$ 2) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx;$ 4) $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx;$

5) $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx,\ C - \text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла.

Пример1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx$.

$$\int\limits_1^3 \left(x^2 - 16x + 3\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - 16\cdot\frac{x^2}{2} + 3x\right)\right|_1^3 = \left.\left(\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 3x\right)\right|_1^3 =$$

$$= \left(\frac{3^3}{3} - 8\cdot 3^2 + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 8\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right) = \left(\frac{27}{3} - 72 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 8 + 3\right) =$$

$$= (9 - 63) - \left(\frac{1}{3} - 5\right) = -54 - \frac{1}{3} + 5 = -49 - \frac{1}{3} = -49\frac{1}{3}$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

При замене переменной по формуле необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx,$ (2)

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом замены переменной (методом подстановки):

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.

6. Находят полученный интеграл.

Пример 2. Вычислить способом замены переменной:

а) $\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\ dx$ **б)** $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$

Решение:. а) Замена: t = x^2 -16; dt = 2x dx; $dx = \frac{dt}{2x}$.

Найдём новые пределы интегрирования. При x = 4, α= t(4) = 4^2 -16 =0; x = 5, β= t(5) = 5^2 -16 =9. Получаем:

$$\int_4^5 x\sqrt{x^2-16}\ dx = \int_0^6 \frac{1}{2}\sqrt{t}\ dt = \frac{1}{2}\int_0^6 t^{\frac{1}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\left.\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^9 = \left.\frac{1}{3}t\sqrt{t}\right|_0^9 = \frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{9} = 9.$$

б) $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$. Замена: t = $\sqrt{2x+1}+\ 1$,

t -1 =$\sqrt{2x+1}$, 2x + 1 = (t – 1)^2, $x = \frac{(t-1)^2-1}{2} = \frac{t^2-2t}{2}$, dx = (t -1)dt.

Найдём новые пределы интегрирования. При x = 0, α= t(0) = 2; x = 4, β=t(4)=4.

Получаем: $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1} = \int_2^4 \frac{(t^2-2t)\cdot(t-1)}{2t}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 (t-2)(t-1)dt == \frac{1}{2}\int_2^4 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right)\right|_2^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3}-24+8\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}-6+4\right) = \frac{7}{3}$.

Метод интегрирования по частям

Этот метод наиболее часто применяется, если подынтегральная функция содержит логарифмические, показательные, обратные тригонометрические, тригонометрические функции, а также их комбинации.

Формула интегрирования по частям: $\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU,$ (3)

Пример 3. Вычислить: а) $\int_1^2 xe^x\,dx$ б) $\int_0^\pi xsinx\,dx$

Решение. а) $\int_1^2 xe^x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x\ \Rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv\ \Rightarrow v = \ e^x\end{matrix}\right| = \ xe^x|_1^2 - \ \int_1^2 e^x\,dx =$

$= 2e^2 - \ e - \ e^x|_1^2 = 2e^2 - \ e - \ e^2 + \ e = \ e^2.$

б) $\int_0^\pi xsinx\,dx = \left|\begin{matrix} u = x\ \Rightarrow du = dx \\ \sin x\,dx = dv\ \Rightarrow v = \ -\cos x\end{matrix}\right| = -xcos\,x|_0^\pi + \ \int_1^2 \cos x\ dx =$

$= -\pi\cdot(-1) + \ 0 + \ \sin x|_0^\pi = \pi.$

Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \geq f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле: $$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \quad (4)$$

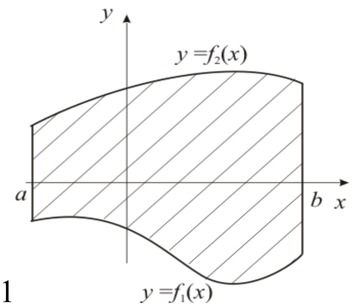


рис.1

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2,\ y = 3x + 2.$

*Решение***.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3 \cdot (-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

рис.2

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (4), в которой

$f_2(x)=3x+2,\ f_1(x)=x^2-2,$ поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$. Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью *OX* и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 3), то его объем вычисляется по формуле: $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$ (6)

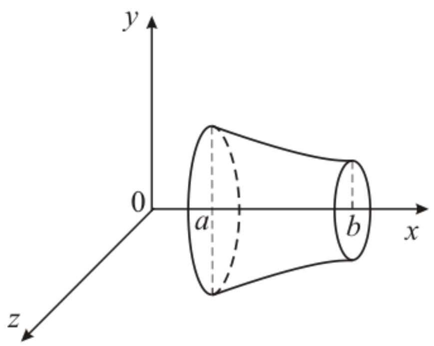


Рис. 3

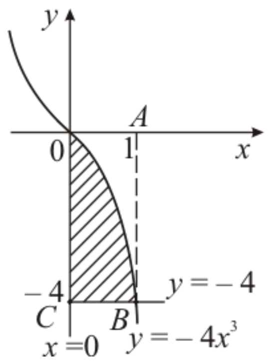


Рис. 4

Пример5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3,\ x=0,\ y=-4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 4).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V=V_1-V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1=\pi\int_0^1(-4)^2dx=\pi16x\big|_0^1=16\pi$ (ед. объема);

$$V_2=\pi\int_0^1\left(-4x^3\right)^2dx=16\pi\int_0^1x^6dx=16\pi\frac{x^7}{7}=\frac{16\pi}{7}\ (\text{ед. объема});$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43,085 \text{ (ед. объема).}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите формулу Ньютона – Лейбница.
2. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
4. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле? Запишите пример.
5. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла?
6. Всегда ли положительна площадь фигуры? Для чего необходимо строить чертеж?
7. Как вычислить объем тела вращения?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 7. Решение дифференциальных уравнений

Цель: сформировать умения решать дифференциальные уравнения первого порядка.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Решить предложенные ДУ по вариантам:

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
Вариант 1 1. $2ydy=(x^3-1)dx$ если y(1)=2 2. $y'-2x=5$ 3. $(x+1)dy=y^2dx$ 4. $y'x=y$ 5. $y'-\frac{5}{x}y=x^4$	**Вариант 2** 1. $ydy=(x-\sin x)dx$ если y(0)=2 2. $3x-y'-2=0$ 3. $(x+4)dy=2y^3dx$ 4. $2y'x^2=y$ 5. $y'+\frac{2}{x}y=x^2$	**Вариант 3** 1) $3y^2dy=(1-\cos x)dx$ если y(0)=3 2) $4x+y'-2=0$ 3) $(x+8)dy=ydx$ 4) $y'x^3=3y$ 5) $y'-\frac{2}{x}y=x^4$
Вариант 4 1) $\sqrt{y}dy=(3x-x^5)dx$ если y(1)=1 2) $y'-2x^2=5$ 3) $(x-7)dy=y^4dx$ 4) $4y'x^3=y$ 5) $y'+\frac{2}{x}y=x^3$	**Вариант 5** 1) $4\sqrt{y}dy=(x^2-1)dx$ если y(1)=4 2) $y'+7x=5x^2$ 3) $(x-9)dy=5ydx$ 4) $5y'x^6=3y$ 5) $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{8}{x^2}$	**Вариант 6** 1) $(y+1)dy=3xdx$ если y(2)=5 2) $6x+y'-9=0$ 3) $(x+9)dy=3y^5dx$ 4) $7y'x^8=y^2$ 5) $y'-\frac{1}{x}y=-\frac{3}{x^3}$
Вариант 7 1. $\frac{dy}{y}=(2x-5)dx$ если y(1)=1 2. $7x+y'+8=0$ 3. $(x-3)dy=8y^3dx$ 4. $9y'x=4y^9$ 5. $y'+\frac{1}{x}y=-x^3$	**Вариант 8** 1) $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x+1}$ если y(0)=1 2) $3x^2+y'+7x=0$ 3) $(x-11)dy=5y^4dx$ 4) $y'x=3y^9$ 5) $y'+\frac{3}{x}y=\frac{2}{x^4}$	**Вариант 9** 1) $dy=\frac{dx}{2x+3}$ если y(1)=2 2) $5x^2+y'-x=0$ 3) $(x+7)dy=6y^3dx$ 4) $6y'x^9=7y^4$ 5) $y'+\frac{4}{x}y=\frac{1}{x^3}$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Дифференциальными уравнениями (ДУ) называются уравнения, содержащие производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения.

При решении дифференциальных уравнений сначала получается общее решение (решение, содержащее произвольную постоянную). Затем, если известны начальные данные, то можно получить частное решение . Для этого необходимо:

1. Подставить начальные данные в общее решение и вычислить С.

2. Полученное числовое значение С подставить в общее решение.

Задача отыскания конкретного частного решения данного дифференциального уравнения по начальным данным называется задачей Коши. Геометрически частное решение представляется одной интегральной кривой, а общее решение – совокупностью интегральных кривых.

В настоящее время диапазон применения дифференциальных уравнений очень широк. С их помощью решаются задачи математики, физики, биологии, электротехники, радиотехники, экономики, технологии производства и многих других сфер человеческой деятельности. Дифференциальные уравнения получаются в тех случаях, когда используются процессы, в описании которых используются такие величины, как скорость (быстрота) протекания процесса, изменение скорости и т. д. С помощью дифференциальных уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического, химического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Дифференциальные уравнения классифицируют в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' - y = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, т.к. наивысший порядок производной, входящей в него – первый.

$y'' - xy' + y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка, т.к. наивысший порядок производной, входящей в это уравнение – второй.

$y''' + 2y''y = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка.

2. Виды дифференциальных уравнений и их решение

1) Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$

где $f(x), g(x)$ - данные функции, называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Рассмотрим на конкретном примере решение таких уравнений.

Пример №1. Найти частное решение дифференциального уравнения: $dy = (x^2 - 1)dx$, если y=4, при x=1

	Последовательность решения	Методика решения
1.	1. $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$	Интегрируем обе части уравнения

2.	$y=\frac{x^3}{3}-x+C$	Данное выражение получилось в результате интегрирования. Это и есть общее решение данного уравнения
3.	$4=\frac{1^3}{3}-1+C$ $4-\frac{1}{3}+1=C$	Подставили в общее решение начальные условия
4.	$C=\frac{14}{3}$	Нашли C из предыдущего уравнения
5.	$y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{14}{3}$	Подставили C в общее решение и получили частное решение данного уравнения

2) Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx+g(x)G(y)dy=0$, где $f(x),F(y),g(x),G(y)$ - заданные функции, называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Решение таких уравнений осуществляется по следующему плану:

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

   Примечание: в зависимости от вида уравнения некоторые пункты плана решения могут быть опущены.

Пример №2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$1+y'+y+xy'=0$$

	Последовательность решения	Методика решения
1.	$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$	Заменили y' на $\frac{dy}{dx}$
2.	$dx+dy+ydx+xdy=0$	Умножили все члены равенства на dx
3.	$dy+xdy=-dx-ydx$ $dy(1+x)=-dx(1+y)$	Сгруппировали все члены, содержащие dy и dx, и записали полученные выражения в разных частях равенства

4.	$\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$	Разделили обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$, т.е. разделили переменные
5.	$\int\frac{dy}{1+y} = -\int\frac{dx}{1+x}$	Проинтегрировали обе части равенства
6.	$\ln\lvert 1+y\rvert = -\ln\lvert 1+x\rvert + \ln C$ (заменили C на lnC)	Нашли интегралы от левой и правой частей равенства
7.	$\ln\lvert 1+y\rvert = \ln\left\lvert\frac{C}{1+x}\right\rvert$	Воспользовались теоремой о логарифмах и преобразовали правую часть равенства
8.	$1+y = \frac{C}{1+x}$	Воспользовались свойством логарифмов: если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа
	$y = \frac{C}{1+x} - 1$	Нашли y из последнего выражения. Данное выражение является общим решением дифференциального уравнения.

3) Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + py = q$, где p и q- функции переменной x или постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. При решении таких уравнений применяют метод Бернулли, который заключается в следующем:

1. Приводят уравнение к виду $y' + py = q$
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + uv'$ и подставляют это выражение в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражение для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.
6. Если требуется найти частное решение, то определяют С из начальных условий и подставляют в общее решение.

Пример №3. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$

	Последовательность решения	Методика решения
	$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}$	Разделили все члены уравнения на *cos x*
	$u'v + uv' + uv\,tgx = \frac{1}{\cos x}$	Подставили выражение $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение
	$u'v + u(v' + tgx) = \frac{1}{\cos x}$	Вынесли общий множитель u за скобки
	$v' + v\,tgx = 0$	Приравняли к нулю выражение в скобках
	$\frac{dv}{dx} = -v\,tgx$	Заменили v' на $\frac{dv}{dx}$ и перенесли слагаемое $v\,tgx$ в правую часть
	$\frac{dv}{v} = -tgxdx$	Разделили переменные
	$\int \frac{dv}{v} = -\int tgxdx$	Проинтегрировали обе части уравнения
	$\ln v = \ln\cos x$	Нашли интегралы от обеих частей равенства
	$v = \cos x$	Воспользовались свойством логарифмов: если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа
	$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}$	Переписали уравнение $u'v + u(v' + tgx) = \frac{1}{\cos x}$ с учетом, что $v = \cos x$ и $v' + tgx = 0$
	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$ $\int du = \int \frac{du}{\cos^2 x}$	Заменили u' на $\frac{du}{dx}$ Нашли du Проинтегрировали обе части уравнения
	$u = tgx + C$	Нашли интегралы от обеих частей равенства
	$y = (tgx + C)\cos x$	Подставили значения u и v в равенство $y = uv$
	$y = \sin x + \cos x\, C$	Нашли общее решение дифференциального

		уравнения

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Что такое общее решение дифференциального уравнения?
4. Что такое частное решение дифференциального уравнения?
5. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
6. Сформулируйте алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными.
7. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 1-го порядка?
8. Какая замена неизвестной функции позволяет свести линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка к уравнению с разделяющимися переменными?
9. Сформулируйте алгоритм решения линейного диф. уравнения с разделяющимися переменными.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 8. Решение задач на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики. Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики.

Цель: сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 2. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.
7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?
8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?
9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.
10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.
3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

4.Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины X – числа появления события в этих испытаниях.

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Классическое определение вероятности

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Пример 1: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n = 30, m = 30 - 2 = 28$$

$$P = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}$$

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число P(A), называемое вероятностью события А.

Если события A_1, A_2 … попарно несовместны, то $P(A_1+A_2+\ldots)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю P=0.

Вероятность достоверного события равна единице P=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<P(A)<1.

Пример 2: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

Решение: Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность $p = \frac{11}{34}$

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример 3: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 1,5 - 0,56 = 0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B).

$P(A)+P(\overline{A})=1$

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: $P(AB)=P(A)\cdot P(A/B)$ или $P(BA)=P(A)\cdot P(B/A)$

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Пример 4: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$$n_1 = 10$$
$$m_1 = 4$$
$$p_1 = \frac{4}{10}$$
$$n_2 = 10$$
$$m_2 = 3$$
$$p_2 = \frac{3}{10}$$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время.

Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$n = 20 + 30 + 50 = 100$

$p(\mathrm{H}_1) = \dfrac{20}{100} = 0,2$

$p(\mathrm{H}_2) = \dfrac{30}{100} = 0,3$

$p(\mathrm{H}_3) = \dfrac{50}{100} = 0,5$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = 0,7$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 0,8$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0,9$

$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$

$= 0,2\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,8 + 0,5\cdot 0,9 = 0,14 + 0,24 + 0,45 = 0,83$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0,2\cdot 0,7}{0,83} \approx 0,169$$

Пример 2: Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 5 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар белый?

Решение: Пусть событие А – извлекается белый шар.

Тогда, пусть H_1 – шар из первой урны, H_2 – шар из второй урны и H_3 – шар из третьей урны. Тогда событие A/H_1 – белый шар из первой урны, A/H_2 – белый шар из второй урны и A/H_3 – белый шар из третьей урны. Найдем вероятности

$p(\mathrm{H}_1) = \dfrac{1}{3}$

$p(\mathrm{H}_2) = \dfrac{1}{3}$

$p(\mathrm{H}_3) = \dfrac{1}{3}$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) = \dfrac{5}{12}$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) = 1$

$p(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) = 0$

$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3)\cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\mathrm{H}_3) =$

$= \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{3}\cdot 1 + \dfrac{1}{3}\cdot 0 = \dfrac{5}{36} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{17}{36}$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m (1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$p = 0,2$

$n = 6$

$m = 2$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\ p^m(1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2(1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m}\geq 1) = 1-\mathrm{q}^n, q = 1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m}\geq 1) = 1-0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события A хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 3: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение:

$p = 0,7$

$n = 5$

$2 \leq m \leq 4$

$$P_5(2\leq m\leq 4) = \mathrm{C}_5^2\cdot 0,7^2(1-0,7)^{5-2} + \mathrm{C}_5^3\cdot 0,7^3(1-0,7)^{5-3} + \mathrm{C}_5^4\cdot 0,7^4(1-0,7)^{5-4} \approx 0,801$$

4) Наивероятнейшее значение m_0 числа наступления события A при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле $\begin{array}{l} np-q \leq m_0 \leq np+p \\ np-\left(1-p\right) \leq m_0 \leq np+p \end{array}$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$$p = 0,05$$
$$n = 50$$
$$m_0 - ?$$
$$q = 1 - p = 1 - 0,05 = 0,95$$
$$50 \cdot 0,05 - 0,95 \le m_0 \le 50 \cdot 0,05 + 0,05$$
$$1,55 \le m_0 \le 2,55$$
$$m_0 = 2$$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f\left(\omega_i\right)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np} \quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}4 + 8\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 2 + 2{,}4 + 1{,}8 = 6{,}4$$
$$M(\mathrm{X}^2) = 4\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}4 + 64\cdot 0{,}3 + 81\cdot 0{,}2 = 45{,}8$$
$$D(\mathrm{X}) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100\cdot 0{,}05 = 5$$
$$D(\mathrm{X}) = 100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95 = 4{,}75$$
$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$$

Вопросы для самопроверки:

1. Дайте определения основным вопросам теории вероятности: случайное событие, достоверное событие, невозможное событие, вероятность случайного события.
2. Сформулируйте классическое определение вероятности.
3. В каких пределах изменяется вероятность случайного события?
4. Сформулируйте теорему сложения вероятностей.
5. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
6. Дайте определение дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины. Приведите примеры.
7. Перечислите основные характеристики дискретной случайной величины, дайте им определения, поясните формулы, по которым они находятся.
8. Дайте пояснения к формуле полной вероятности, закону больших числе.
9. Что такое закон распределния случайной величины?
10. Где используются понятия теории вероятности?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 9. Операции над матрицами и вычисление определителей матриц.

Тема: Матрицы и действия с ними. Определитель матрицы.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) $3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^T + 2\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ -8 & 10 & 4 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 3 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & -9 \end{pmatrix}^T$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}^T$; 7) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 2. Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

Задание 3. Найти: 1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^3$.

Задание 4. Вычислить определители:

1) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

Теоретические сведения к практической работе

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов, которую записывают в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица B имеет размер mxn» означает, что речь идет о матрице, состоящей из m строк и n столбцов. Например, матрица $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ имеет размер *2*x*3*. Далее, b_{ij} - обозначение элемента, стоящего на пересечении i-й строки и j-го столбца данной матрицы (в примере $b_{23}=5$).

При ссылке на i*-ю* строку матрицы A используют обозначение A_i, при ссылке на j*-й* столбец – обозначение A^j.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы a_{11} , a_{22} ,…, a_{nn} квадратной матрицы A (размера nxn) образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней) треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

матрица A является верхней треугольной, B – диагональной, C – нижней треугольной, E – единичной.

Матрицы A, B называются *равными* ($A=B$), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

Арифметические действия с матрицами.

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$kA=k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти *сумму матриц A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}= .$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Пример 1. Найти *2A-B*, если $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:

$$2A-B=2\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Имеем: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=$

$$=2(-1\cdot 0-2\cdot 5)+3(4\cdot 0-2\cdot 3)-1(4\cdot 5-(-1)\cdot 3)=-20-18-23=-61.$$

Произведение *AB* можно определить только для матриц *A* размера *m*х*n* и *B* размера *n*х*p*, при этом *AB*=*C*, матрица *C* имеет размер *m*х*p*, и ее элемент c_{ij} находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:* $c_{ij}=A_iB^j=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$ *(i=1,2,...,m; j=1,2,...,p)*. Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева) умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Размер матрицы *A* *3*х*2*, матрицы *B* *2*х*2*. Поэтому произведение *AB* найти можно, произведение *BA* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1;1)(1,3) & (-1;1)(-2;4)\\ (0;4)(1;3) & (0,4)(-2;4)\\ (2;1)(1;3) & (2;1)(-2;4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+3 & 2+4\\ 0+12 & 0+16\\ 2+3 & -4+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n*, называется матрица A^T размера *n*x*m*, строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если $C=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 1 & -3 & 3\end{pmatrix}$, то $C^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Пример 3. Найти $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T$.

Решение. Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 12 & 16\\ 5 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 4 & 7\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}.$$

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

Рангом матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше $\min\{m,n\}$ (например, для матрицы *A* размера *2*x*3* $r(A)\le 2$). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент b_{12}, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ($C_3=-C_2$):

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}\to$$

$$\xrightarrow{C_3=C_3-3C_1}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\\ -2 & 0 & -4 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 4 & 9\end{pmatrix}$$

Вычисление определителей. Определитель матрицы *А* размера *2*х*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *А* размера *3*х*3* (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример 4. Найти: $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Решение. При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой $\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

Что называют матрицей?
Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
Какие матрицы называются равными?
Что называют главной диагональю матрицы?
Какая квадратная матрица называется диагональной? нулевой? единичной? транспонированной? треугольной? ступенчатой?
Какие преобразования матрицы называются элементарными? Как привести матрицу к ступенчатому виду? (пример)
Что называют суммой матриц? В чем состоит обязательное условие существования суммы матриц? Какими свойствами обладает сумма матриц? (пример)
Что называют произведением матрицы на число? (пример)
Что называют произведением двух матриц? Как найти произведение двух матриц? В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц? Какими свойствами обладает произведение матриц? (пример)
Что называют определителем квадратной матрицы? определителем второго порядка? определителем третьего порядка? Какими свойствами обладает определитель?
В чем состоит метод треугольников для вычисления определителя третьего порядка? (пример)
Что называют минором? алгебраическим дополнением элемента определителя? (пример)
В чем состоит метод разложения по элементам строки (столбца)
для вычисления определителя третьего порядка? высшего порядка? (пример)

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 10. Решение систем линейных уравнений различными методами.

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

Теоретические сведения к практической работе

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \qquad (*)$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов системы (*), называется матрицей системы (ее размер – mxn), а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ (m-мерный)- столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида $(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называют расширенной матрицей системы (*). Любой набор значений неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, образующих n-мерный вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, является решением системы (*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что $b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$ при каждом $i=1,2,\ldots,m$ (i-е уравнение представляет собой скалярное произведение i-й строки матрицы системы на вектор X), и (*) можно переписать в виде

$$AX = B. \qquad (**)$$

Запись (**) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (*).

Пример 1. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}.$$

Решение. Очевидно, что $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Пример 2. Записать СЛАУ, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Решение. Введем в рассмотрение вектор X и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - x_1, со вторым - x_2, с третьим - x_3, с четвертым - x_4. Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 + 8x_4 = -4 \\ -2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}.$$

Классификация систем линейных алгебраических уравнений. Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,...,m)* есть элемент $a_{ij} = 1$, а все остальные элементы *j-го* столбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

Теорема 1 (Кронекера-Капелли). СЛАУ (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство $r(A) = r(A|B)$.

Для совместной системы число $r = r(A) = r(A|B)$ назовем рангом системы.

Теорема 2 (о количестве решений). Пусть СЛАУ (*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных ($r = n$), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

Алгоритм метода Гаусса. Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если $r(A) = r(A|B)$, то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

Пример 3. Решить СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$.

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[C_3 = C_3 - 2C_1]{C_2 = C_2 + 4C_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ -1 & 0 & 6 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{C_3 = C_3 + C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 10 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{C_3 = C_3 / 10} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 11 & 0 & -6 & 27 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются x_2 в первой строке, x_3 во второй и x_1 в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: $r(A|B) = r(A) = 3 = r$. Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & | & 4 \\ 11 & 0 & -6 & | & 27 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1=C_1-2C_3]{C_2=C_2-11C_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -6 & | & -6 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[C_2=-C_2/6]{C_1=C_1-C_2/6} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь составляем по последней матрице систему $\begin{cases} -x_2=-1 \\ x_3=1 \\ x_1=3 \end{cases}$ и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: $X=(3;1;1)^T$. Это и есть ответ.

Пример 4. Для СЛАУ $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=3 \\ 6x_1+8x_2+2x_3+5x_4=7 \\ 10x_1+12x_2+3x_3+10x_4=16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.

$$(A|B)=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & | & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & | & 7 \\ 10 & 12 & 3 & 10 & | & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3=C_3-3C_1]{C_2=C_2-2C_1} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & | & 7 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{C_3 \leftrightarrow C_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A|B)=r(A)=3=r$, число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные: x_3 в первой строке, x_1 во второй, x_4 в третьей. Свободное неизвестное - x_2. Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & | & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1=C_1-2C_2]{C_2=C_2-4C_3} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 & | & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1=C_1-3C_2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & | & -8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: $\begin{cases} 4x_2+x_3=-8 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=-8-4x_2 \\ x_1=3 \\ x_4=1 \end{cases}$. Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: $X_{об}=(3;\ \ x_2;\ \ -8-4x_2;\ \ 1)^T$, x_2 - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному x_2 конкретное числовое значение. Например, при $x_2=0$ $X_ч=(3;0;-8;1)^T$, а при $x_2=-1$ $X_ч=(3;-1;-4;1)^T$.

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Теорема 3 (теорема Крамера). Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

Пример 5. Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем A - матрицу системы и B - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix}2&4&-1\\3&11&-2\\3&11&4\end{vmatrix}=2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60;$$

$$|A|_3=\begin{vmatrix}2&-1&4\\3&4&11\\3&-2&11\end{vmatrix}=2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60\cdot$$

По теореме Крамера $x_1=\frac{|A|_1}{|A|}=\frac{180}{60}=3$; $x_2=\frac{|A|_2}{|A|}=\frac{60}{60}=1$; $x_3=\frac{|A|_3}{|A|}=\frac{60}{60}=1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot3-1-1\equiv4$, $3\cdot3+4\cdot1-2\cdot1\equiv11$, $3\cdot3-2\cdot1+4\cdot1\equiv11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Вопросы для самоконтроля:

Что называют элементарной системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)?
Что называют решением элементарной СЛАУ?
Что называют основной матрицей, расширенной матрицей, столбцом свободных членов, столбцом неизвестных элементарной СЛАУ?
Каковы основные методы решения СЛАУ?
В чем суть метода Крамера для решения СЛАУ? (пример)
Суть метода Крамера (метода определителей): главный определитель системы→ определители неизвестных→ формулы Крамера;
В чем суть метода Гаусса для решения СЛАУ? (пример)
Суть метода Гаусса (метода последовательного исключения неизвестных): прямой ход: расширенная матрица системы→ элементарные преобразования→ треугольный вид; обратный ход: треугольная система→ последовательные подстановки→ искомые переменные.
В чем суть матричного метода решения СЛАУ?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Дополнительная литература:

1. Богомолов Н.В. Самойленко П.И. Математика. Учебник для средних специальных заведений. - 5-е издание, пер. и доп., -М.: Юрайт, 2015. – 396 с.
2. Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика в задачах с решениями: Учебное пособие. – 5 –е изд.,СПб: Издательство « Лань» , 2014. - 464 с.
3. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 11 изд., 2016. – 204 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – 8 изд., пер и доп., -М.: Юрайт, 2016. – 447 с.
5. Башмаков М.И. . Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для студ. учреждений среднего профессионального образования. 3-е изд., стер. М.: Издательский центр «Академия», 2017. – 256 с.
6. Дадаян А.А. Математика: учебник для среднего профессионального образования - М.: Форум, 2017 . – 544 с.
7. Математика: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, С.В. Иволгина; под редакцией В.А. Гусева – 11-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2015. – 416 с.
8. Элементы высшей математики: учебник для студентов образовательных учреждений СПО/С.Г. Григорьев, Ю.А. Дубинский – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия». 2014. – 320 с.