МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)
«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
_______________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРАКТИЧЕСКИМ РАБОТАМ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании
Методического объединения преподавателей дисциплин математического и общего естессственнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И.Месяцева,и дисциплин профессионально цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах.

Разработано
на основе ФГОС СПО по специальности 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям), утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014г. № 443

Председатель МК

Чекашова Е.А.

Протокол от «29» мая 2019 г.

Автор (составитель): Голованова А.В., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»____
Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент) Долгина Т.С. преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»
Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Лист ознакомления

Должность	Ф.	Дата, подпись

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	**№ экз.**
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	**№ экз.**

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Содержание

Введение

1.1 Методические указания по практическим и лабораторным работам обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработана в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 15.02.06 Монтаж и техническая эксплуатация холодильно-компрессорных машин и установок (по отраслям) базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014г. № 443, учебного плана очной и заочной форм обучения, утвержденного 31.05.2019 г.

1.1 Цели и задачи практических (лабораторных) работ –

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному усвоению учебного материала. Выполнение обучающимися практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Список литературы и вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой.

1.2 Требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен **уметь**:

У1 - анализировать сложные функции и строить их графики;

У2 - выполнять действия над комплексными числами;

У3 - вычислять значения геометрических величин;

У4 - производить операции над матрицами и определителями;

У5 - решать задачи на вычисление вероятности с использованием элементов комбинаторики;

У6 - решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений;

У7 - решать системы линейных уравнений различными методами;

знать:

З1 - основные математические методы решения прикладных задач;

З2 - основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теорию комплексных чисел, теории вероятностей и математической статистики;

З3 - основы интегрального и дифференциального исчисления;

З4 - роль и место математики в современном мире при освоении профессиональных дисциплин и в сфере профессиональной деятельности.

Процесс изучения дисциплины Математика направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1)

Таблица 1 Компетенции, формируемые дисциплиной Математика в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.	У1-У7, З1-З4
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации	У1-У7, З1-З4
ПК 1.1.	Осуществлять обслуживание и эксплуатацию холодильного оборудования (по отраслям).	У1-У7, З1-З4
ПК 1.2.	Обнаруживать неисправную работу холодильного оборудования и принимать меры для устранения и предупреждения отказов и аварий.	У1-У7, З1-З4
ПК 1.3.	Анализировать и оценивать режимы работы холодильного оборудования	У1-У7, З1-З4
ПК 1.4.	Проводить работы по настройке и регулированию работы систем автоматизации холодильного оборудования	У1-У7, З1-З4
ПК 2.1.	Участвовать в организации и выполнять работы по подготовке к ремонту и испытаниям холодильного оборудования.	У1-У7, З1-З4
ПК 2.2.	Участвовать в организации и выполнять работы по ремонту холодильного оборудования с использованием различных приспособлений и инструментов.	У1-У7, З1-З4
ПК 2.3.	Участвовать в организации и выполнять различные виды испытаний холодильного оборудования.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.1.	Участие в планировании работы структурного подразделения для реализации производственной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.2.	Участие в руководстве работой структурного подразделения для реализации производственной деятельности.	У1-У7, З1-З4
ПК 3.3.	Участвовать в анализе и оценке качества выполняемых работ структурного подразделения.	У1-У7, З1-З4

2. Тематический план видов практических работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание практической работы обучающихся	Аудиторная учебная нагрузка, час	Практическая работа обучающегося, час
Раздел 1. Комплексные числа.		**4**	**2**
Тема 1.1. Комплексные числа.	№ 1. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.		**2**
Раздел 2. Математический анализ.		**22**	**18**
Тема 2.1. Дифференциальное исчисление.	№ 2. Вычисление пределов функций.		2
	№ 3. Дифференцирование функций.		2
	№ 4. Исследование функции с помощью производной и построение графиков.		2
Тема 2.2. Интегральное исчисление	№ 5. Методы нахождения неопределённого интеграла.		2
	№ 6. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.		2
Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.	№ 7. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.		2
	№ 8. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка.		2
Тема 2.4. Ряды	№ 9. Исследование числовых рядов на сходимость.		2
	№ 10. Разложение функций в ряд Тейлора-Маклорена.		2
Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики.		6	**6**
	№ 11. Элементы комбинаторики		2
	№ 12. Решение задач на нахождение вероятности события с использованием теорем сложения и умножения.		2
	№ 13. Определение числовых характеристик случайных величин.		2
Раздел 4. Основные численные методы		4	**4**
Тема 4.1. Численное интегрирование	№ 14. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешностей.		2
Тема 4.2. Численное дифференцирование	№ 15. Численное дифференцирование функций с использованием интерполяционных формул Ньютона.		2
		36	30

Раздел 1. Комплексные числа.

Тема 1.1 Комплексные числа.

Практическая работа № 1. Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической, показательной формах.

Цель: сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами, научиться представлять комплексное число в различных формах, применять понятия комплексных чисел для решения уравнений второй степени.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы, дидактические карточки с заданиями.

Задания:

Задание 1. Вычислите, выпишите вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел, изобразите их на комплексной плоскости.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\frac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i+\frac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\frac{1+i}{1-i}$ 5) $\frac{(1-i\sqrt{3})^2}{i-\sqrt{3}}$ 6) $(1+2i)^3-3$ 7) $(1-i)^2+i^4$

Задание 2. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической и показательной форме:

1) $-3i$; 2) $2+i$; 3) $3+3i$; 4) $2-5i$ 5) $7+8i$ 6) $10-5i$ 7) $2-4i$.

Задание 3. Найдите все корни уравнений:

1) $x^2+9=0$; 2) $x^2-3x+10=0$; 4) $x^2-2x+10=0$;

5) $x^2+2x+10=0$ 6) $x^4-16=0$ 7) $x^2+100=0$

Задание 4. Запишите комплексные числа в тригонометрической форме и показательной форме и выполнить действия:

а) $Z_1 \cdot Z_2$; б) $\frac{Z_1}{Z_2}$; в) Z_2^2

1). $z_1=-\sqrt{3}-j$ $z_2=2-2j$ 2).2. $z_1=6j$ $z_2=-2+2\sqrt{3}j$

3). $z_1=3\sqrt{2}+3\sqrt{2}j$ $z_2=-1+j$ 4). $z_1=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}j$ $z_2=8-8\sqrt{3}j$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.

2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

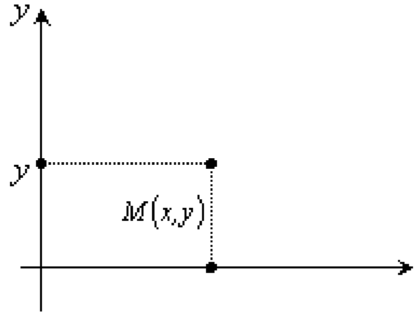
Теоретические сведения к практической работе

1. Понятие комплексного числа

Комплексными числами называются числа вида

$$z = x + iy \tag{1.1}$$

где x, y – действительные (вещественные) числа, а число i определяемое равенством



образ комплексного числа $z = x + iy$. Число z=0 ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такая плоскость называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – действительной, а ось ординат – мнимой осью комплексной плоскости. Комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить в виде радиус-вектора $O\overline{M}$.

2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание и умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Сумма двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется согласно формуле $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

Разность по формуле $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется по формуле $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. В частности $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$.

<u>*Пример 3.*</u> Выполнить действия: *a) (4+2i)+(1+5i); b) (3+5i)-(6+3i).*

c) 2i

Модулем комплексного числа назовем длину отрезка $|OM|$ (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргументом* комплексного числа ($\varphi = \mathrm{Arg}z$) назовем угол, который вектор $\overline{OM}$ образует с положительным направлением оси *Ox*. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию $0 \le \varphi < 2\pi$.

При этом выражение вида

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (1.2)$$

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

φ – аргумент комплексного числа z можно найти из формул

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{r} \end{cases} \qquad (1.3)$$

или $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Заметим, что при выборе значений φ необходимо учитывать знаки x и y.

Алгоритм перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической:

1. Найти модуль комплексного числа по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Для нахождения φ определить геометрически, в какой четверти находится точка z.
3. Составить уравнения $\cos\varphi = \dfrac{x}{r}$ *и* $\sin\varphi = \dfrac{y}{r}$ и по решению одного из них найти угол φ.
4. Записать комплексное число в тригонометрической форме.

<u>Пример 5.</u> Записать комплексное число в тригонометрической форме:

а) *6i; b)*

4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1) Произведение комплексных чисел: $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$.

2) Частное комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

3*) Возведение в степень и извлечение корней.* Если комплексное число задано тригонометрической формой $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то справедлива *формула Муавра*

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (1.4)$$

4) Для *извлечения корня n-й степени* (n – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая n значений этого корня: $z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$, *k=0,1,…,n-1.* (1.5)

Корень n-й степени имеет n различных корней.

<u>*Пример 6.*</u>

Даны числа $z_1 = 3(\cos 75^0 + i\sin 75^0)$ $z_2 = 2(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$

а) $z_1 \cdot z_2 = 3(\cos 75^0 + i\sin 75^0)\cdot 2(\cos 15^0 + i\sin 15^0) = 6(\cos(75° + 15°) + i\sin(75° + 15°)) =$
$= 6(\cos 90° + i\sin 90°) = 6i$

б) $z_1 / z_2 = \dfrac{3(\cos 75^0 + i\sin 75^0)}{2(\cos 15^0 + i\sin 15^0)} = \dfrac{3}{2}(\cos(75° - 15°) + i\sin(75° - 15°)) = \dfrac{3}{2}(\cos 60° + i\sin 60°) =$

$= \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{4}i$

в) $z_2^6 = \left[2(\cos 15^0 + i\sin 15^0)\right]^6 = 2^6(\cos(6\cdot 15°) + i\sin(6\cdot 15°)) = 64(\cos 90^0 + i\sin 90^0) = 64i$

<u>*Пример 7.*</u> Выполните действия в тригонометрической форме:

a) $(-1+i)^{13}$ b) $\left(\sqrt{3} - i\right)^5$

Решение. а) Чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме.

Имеем: $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$; $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$, т.е. $\varphi = 3\pi/4$ (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно,

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $(-1+i)^{13}=\sqrt{2^{13}}\left(\cos\frac{3\cdot 13\pi}{4}+i\sin\frac{3\cdot 13\pi}{4}\right)$ (в силу (1.4)). Учитывая, что $\frac{39\pi}{4}=10\pi-\frac{\pi}{4}$ и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

$$(-1+i)^{13}=64\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)=64\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=64-64i\cdot$$

b) Получим тригонометрическую форму записи числа z. $r=\sqrt{3+1}=2,\ \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi=-\frac{1}{2}\cdot$

Отсюда $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, а $z=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$. Тогда по формуле Муавра получим:

$$z^5=2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi-i\sin\frac{5}{6}\right)=$$

$$=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=-\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot$$

Пример 8. Вычислить: $\sqrt[3]{-1}$.

Тригонометрическая форма заданного числа имеет вид $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ($|z|=1$), поэтому в силу (1.5)

$$z_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

Выписываем три искомых корня:

При к=0 $z_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

При к=1 $z_1=\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$;

При к=2 $z_2=\cos\frac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$

5. Показательная форма записи комплексного числа.

Показательная и тригонометрические функции в области комплексных чисел связаны между собой формулой: $e^{i\varphi}=\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, которая называется *формулой Эйлера*.

Показательная форма записи комплексного числа имеет вид: $z=re^{i\varphi}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме выполняются по правилам степеней: пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ z_1{}^n=r_1{}^ne^{in\varphi_1}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое число называется комплексным?

2. Что такое мнимая единица? Как вычисляют степень мнимой единицы?(пример).
3. Что такое действительная часть числа? Что такое мнимая часть числа?
4. Какие числа называются чисто мнимыми, равными, сопряженными?
5. Как представить комплексное число графически?
6. Как найти сумму, разность и произведение комплексных чисел в алгебраической форме? (пример)
7. Как найти частное комплексных чисел в алгебраической форме? (пример)
8. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
9. Что такое модуль и аргумент комплексного числа, как их найти?
10. Как перевести комплексное число из алгебраической в тригонометрическую форму?
11. Как найти произведение и частное чисел в тригонометрической форме?
12. Как возвести число в тригонометрической форме в целую степень?
13. Как найти корень n-ной степени из числа в тригонометрической форме?
14. Как представить комплексное число в показательной форме?
15. Как найти произведение и частное чисел в показательной форме?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.
3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1 Дифференциальное исчисление

Практическая работа № 2. Вычисление пределов функций.

Цель: сформировать умение находить пределы последовательностей и пределы функций, использовать замечательные пределы для нахождения пределов.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы, дидактические карточки с заданиями.

Задание:

Задание 1. Вычислить пределы последовательностей:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+5}\qquad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{3-2n}{n+6}\qquad 3)\lim_{n\to\infty}\frac{10n+3}{1+2n}$$

$$4)\lim_{n\to\infty}\frac{4n+16}{9n}\qquad 5)\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}\qquad 6)\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n-1)^2}{(n-1)^2-(n+1)^2}$$

$$7)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}\qquad 8)\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-100n^2+1}{100n^2+16n}\qquad 9)\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n-7}-\sqrt{n+2}\right)$$

Задание 2. Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\qquad 2)\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\qquad 3)\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\qquad 5)\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\qquad 6)\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\qquad 9)\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Задание 3. Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}\qquad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}\qquad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}\qquad 5)\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}\qquad 6)\lim_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to0}\frac{tg3x}{tgx}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}\qquad 9)\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Определение. Число *A* называют *пределом функции f(x) в точке x_0* при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0,$ такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon.$

Число А называется *пределом функции* y= f(x) на бесконечности (или при x, стремящимся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа А.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке x_0 если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке x_0 если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$

Если функция $f(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $f(x)\neq 0$ для $x \neq x_0$ из некоторой окрестности точки x_0, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно большая при $x \to x_0$.

Верно и обратное: если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ (c=const).

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = B,$ то:

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A \pm B;$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A\cdot B;$

4. Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B},\quad (B \neq 0).$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке $x=x_0$.

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+15}{10x^2-4} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4} = \frac{2+15}{10-4} = \frac{17}{6}$.

При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения: если $c = \text{const},\quad c \neq 0,\quad c \neq \infty,$

$$\frac{0}{c} \to 0;\quad \frac{c}{0} \to \infty;\quad \frac{\infty}{c} \to \infty;\ c\cdot\infty \to \infty; c\cdot 0 \to 0;\ a^{\infty} \to 0, \text{если}\ 0 < a < 1; a^{\infty} \to \infty, \text{если}\ a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \left(\frac{0}{0}\right);\ (0\cdot\infty);\ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Раскрытие неопределенностей:

1. Неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$

1. При раскрытии неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$ в случае рациональных функций *числитель и знаменатель раскладывают на множители*, выделяя множитель, стремящийся к нулю.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Раскрываем неопределенность путем разложения числителя и знаменателя на множители и сокращения дроби.

Решение: $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{(4+4)}{(4-1)}=\frac{8}{3}$

Для знаменателя использована формула разложения квадратного трехчлена на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения.

Для числителя формула: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

2). Если под знаком предела содержатся иррациональности, то числитель и знаменатель *умножают на сопряженное*.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$:=\lim_{x\to5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{((2x+8)-(23-x))}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Числитель и знаменатель не имеют предела, т.к. оба неограничено возрастают. *Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени* в данной дроби.

Пример 4. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+6x-5}{10x^3-8x^2+2}$

Подстановка $x\to\infty$ показывает, что функция имеет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель на x^3 (x в наивысшей степени).

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x-5}{10x^3-8x^2+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{\left(10-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{1}{10},\text{т.к. } \frac{6}{x^2},\frac{5}{x^3},\frac{8}{x},\frac{2}{x^3}\to 0 \text{ при } x\to\infty.$$

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^7+8x^2-5}{x^4-x^3+1}$ Подстановка $x\to\infty$ показывает, что функция имеет неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. на x^7. Используя свойства $\left(\frac{c}{0}\right)\to\infty$ имеем:

Решение: $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^7+8x^2-5}{x^4-x^3+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(2+\frac{8}{x^5}-\frac{5}{x^7}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^7}\right)}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+4x^2+1}{x^8+3x^3+7}$. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т.е. на x^8.

Используя свойство $\left(\frac{0}{c}\right)\to 0$ имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^6+4x^2+1}{x^8+3x^3+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^6}+\frac{1}{x^8}}{1+\frac{3}{x^5}+\frac{7}{x^8}}=\left(\frac{0}{1}\right)=0$.

3. Неопределенность $\infty-\infty$. Умножим и разделим выражение на сопряженное.

Пример 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x}{\left(x+\sqrt{x^2+5x}\right)}=$$
$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5}{\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}}\right)}=\frac{-5}{1+1}=-2{,}5.$$

Замечательные пределы:

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$ (1)

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ (2)

Следствие: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ (3)

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$. Приведем этот предел к виду (1). Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 8

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Используем соотношение (3). Для этого показатель степени умножим и разделим на 5x.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^\infty\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2+1}\right)^x\overset{\left[1^\infty\right]}{=}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1+3}{x^2+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2+1}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{3}}\right)^{\frac{x^2+1}{3}\cdot\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2+1}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}}=e^0=1$$

Вопросы для самоконтроля:

1.Что называется пределом функции в точке?

2. Что понимают под пределом функции на бесконечности?

3. Какая функция называется бесконечно малой (бесконечно большой)?

4. Какова взаимосвязь между бесконечно малыми и бесконечно большими?

5. Какие арифметические операции можно выполнять над пределами? Как вычислить предел во внутренней точке

области определения любой элементарной функции?

6. Как раскрывается неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ в случае рациональных функций?

7. Как раскрывается неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ в случае иррациональных функций?

8. Как раскрывается неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$?

9. Как раскрывается неопределенность $\infty - \infty$?

10. Сформулируйте первый замечательный предел.

11. Сформулируйте второй замечательный предел и следствие из него.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 3. Дифференцирование функций.

Цель: сформировать умение находить производные функций, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной, применять правило Лопиталя для нахождения пределов.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Найти производные 1-го порядка данных функций

1) $а) \; y = 3x^3 - \dfrac{5}{x^7} - \sqrt[4]{x^5}$; $б) \; s = (1+t^2)(2 - 3\operatorname{arcctg} t)$; $в) \; u = \ln^3 \dfrac{V}{2}$; $г) \; z = \dfrac{5 - \sin 3t}{e^{4t}}$.

2) $а) \; y = 5x - \dfrac{2}{x^4} + 3\sqrt[5]{x^6}$; $б) \; s = (4 - 3\ln t)(5 + 2\sin t)$; $в) \; u = \sin^4(2V+3)$; $г) \; z = \dfrac{\sin(2-t)}{2 - \ln 3t}$.

3) $а) \; y = 7x^2 + \dfrac{4}{x^6} - \sqrt[5]{x^2}$; $б) \; s = (3 - \cos t)(5 + 6\sin t)$; $в) u = \sqrt[3]{1 - 4V^2}$; $г) \; z = \dfrac{t^3 - e^{3t}}{\arccos 2t}$.

4) $а) \; y = 5x^2 + \dfrac{3}{x^4} - \sqrt[6]{x^7}$; $б) \; s = (3t^3 - 4)(t - 2\cos t)$; $в) u = \ln^2(5V - 3)$; $г) \; z = \dfrac{\ln(4 - 5t)}{\sin t}$.

5) $а) \; y = x^5 - \dfrac{2}{x^3} + 2\sqrt[7]{x^5}$; $б) \; s = t^4(4 + \operatorname{arctg} t)$; $в) \; u = \cos^3(3V+1)$; $г) \; z = \dfrac{t - \arcsin 5t}{e^{-t}}$.

6) $а) \; y = x^4 + \dfrac{1}{x} - 2\sqrt[3]{x}$; $б) \; s = (3 + \operatorname{tg} t)(1 - 4\operatorname{ctg} t)$; $в) u = tg^4(3V+2)$; $г) \; z = \dfrac{\operatorname{arctg} 2t}{1 + 4t^2}$.

Задание 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0.

1) $\dfrac{x^2-3}{x}, \; x_0 = 1.$ 2) $\sqrt{5 - x^2}, \; x_0 = 2.$ 3) $\dfrac{x^2 + 3x}{3}, \; x_0 = -1.$

4) $\sqrt{x} + 2x, \; x_0 = 9.$ 5) $\dfrac{x^2}{x-2}, \; x_0 = 1.$ 6) $\sqrt{1+3x}, \; x_0 = 1.$

Задание 3. Найти производную y'_x функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \cos(2t+6) \\ y = \sin(2t+6) \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = (1-t)^2 \\ y = \cos(t-1) \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = t^2 - 8 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = e^{4t} \\ y = (1-4t)^2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$

Задание 4. Найти дифференциалы функций:

1) $y = \sin 2x + 5$; 2) $y = \ln x - x^3$; 3) $y = 4 + 8\sin x$;

4) $y = 2x - 1$. 5) $y = 1 - \cos x$; 6) $y = 10 - 3x^2$

Задание 5. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) $y = \ln x + 9$ 2) $y = \cos x - \ln x$ 3) $y = \sin x + x^4$

4) $y = x^2 + \sin x$ 5) $y = x + \ln x$ 6) $y = 3e^x + 2x$

Задание 6. Найти производную функции логарифмическим дифференцированием

1) $y = (\sin x)^{\cos x}$ 2) $y = (\cos x)^x$ 3) $y = x^{\ln x}$ 4) $y = (\sin x)^{\ln x}$ 5) $y = x^{\cos x}$ 6) $y = (tgx)^{\ln x}$

Задание 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя.

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{x^2-5x+4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-5x}-1}{\operatorname{arctg} x}$. 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{1-\cos x}$.

4) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{6x^2-5x+1}{1-3x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{\sin x}-1}{\sin 3x}$. 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Производной функции $y=f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$ к приращению независимой переменной Δx при стремлении последнего к нулю:

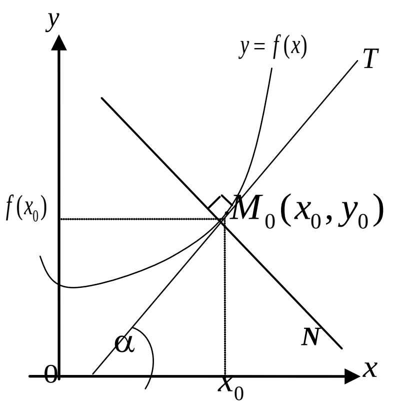
$$y'=f'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Обозначения производной в точке x_0:

$f'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x_0}$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.y'_x\right|_{x_0}$, $y'(x_0)$ и другие.

Если функция в точке x_0 (или на промежутке X) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке X).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.



Геометрический смысл производной.

Если кривая задана уравнением $y=f(x)$,

то $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ($K=\operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ *в точке* x_0 *(прямая* M_0T*) имеет вид:*

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \qquad (2)$$

а уравнение нормали (M_0N):

$$y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0). \qquad (3)$$

Правила дифференцирования

№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции	№ пп	$U = u(x)$, $V=V(x)$ — дифференцируемые функции
I	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	VI	Производная сложной функции $y = f[u(x)],\ y' = f'_u \cdot u'_x$
II	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	VII	Функция задана параметричес-кими уравнениями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},\ y'_x = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t}.$
III	$(c \cdot u)' = c \cdot u',\quad c = \text{const}$		
IV	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},\ (v(x) \neq 0)$	VIII	Если $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ — взаимно обратные функции, то $x'_y = \dfrac{1}{y'_x},\ (y'_x \neq 0).$
V	$\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{c \cdot v'}{v^2},\quad c = \text{const}\quad (v(x) \neq 0)$		

Формулы дифференцирования основных элементарных функций

№ пп	c=const, x — независимая переменная, $u = u(x)$ — дифференцируемая функция		
1	$C' = 0$	**9**	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
2	$x' = 1$	**10**	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
3	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**11**	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	**12**	$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**13**	$(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}};\quad \lvert u \rvert < 1$
6	$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}\quad (u > 0)$	**14**	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
7	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}\quad (u > 0)$	**15**	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
8	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$		

Производной n-го порядка называется производная от производной (n–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Производная третьего порядка $y''' = (y'')'$ или $\frac{d^3y}{dx^3}$ и т. д.

Пример 1. Найти производные функций:

$$а)\ y = 3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{x^3};\ б)\ s = (e^t - 2\ln t)\sin t;\ в)\ u = \operatorname{ctg}^3\frac{v}{3};\ г)\ z = \frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}.$$

Решение.

а) Используя правила I, III и формулу (3), получим:

$$y' = (3x^5 + \sqrt[3]{x^2} - 4/x^3)' = 3(x^5)' + (x^{2/3})' - 4(x^{-3})' =$$
$$= 3\cdot 5x^4 + \frac{2}{3}x^{-1/3} - 4(-3x^{-4}) = 15x^4 + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{12}{x^4}.$$

б) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть t, т. е. t=1, получим:□

$$s = [(e^t - 2\ln t)\sin t]' = (e^t - 2\ln t)'\sin t + (e^t - 2\ln t)(\sin t)' =$$
$$((e^t)' - 2(\ln t)')\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t = \left(e^t - \frac{2}{t}\right)\sin t + (e^t - 2\ln t)\cos t.$$

в) Сложная степенная функция, независимая переменная есть v, т. е. v=1;□используя формулу (3), получим:

$$u' = \left[\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)^2\right] = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)' = 2\left(\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\right)\left(-\frac{\left(\frac{v}{3}\right)'}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) =$$
$$= 2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}\left(-\frac{\frac{1}{3}}{\sin^2\frac{v}{3}}\right) = -\frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{3}}{3\sin^2\frac{v}{3}} = -\frac{2}{3}\frac{\cos\frac{v}{3}}{\sin^3\frac{v}{3}}.$$

г) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III и формулы (3), (14), учитывая, что t=1, получим:□

$$z' = \left(\frac{\operatorname{arctg}2t}{1+4t^2}\right)' = \frac{(\operatorname{arctg}2t)'(1+4t^2) - (\operatorname{arctg}2t)(1+4t^2)'}{(1+4t^2)^2} =$$
$$= \frac{\frac{(2t)'}{1+4t^2}(1+4t^2) - \operatorname{arctg}2t(0+4\cdot 2t)}{(1+4t^2)^2} = \frac{2-8t\operatorname{arctg}2t}{(1+4t^2)^2}.$$

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\sqrt{x^2-3}$ в точке с абсциссой x_0=2.

Решение:

1) $y(x_0)=y(2)=\sqrt{2^2-3}=1;$

2) $y'(x)=((x^2-3)^{1/2})'=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}(x^2-3)'=\frac{1}{2}(x^2-3)^{-\frac{1}{2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}};$

3) $y'(x_0)=y'(2)=\frac{2}{\sqrt{2^2-3}}=2.$

4) Подставим $x_0,\ y(x_0),\ y'(x_0)$ в уравнения (2) и (3) получим: $y=1+2(x-2),$ или $2x-y-3=0$ — уравнение касательной.

$y=1-\frac{1}{2}(x-2),$ или $x+2y-4=0$ — уравнение нормали.

Пример 3. Найти производную y'_x, если функция задана парамет-рически:
$\begin{cases} x=\ln(5-2t) \\ y=\operatorname{arctg}(5-2t). \end{cases}$

Используем правило VII $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$

$$\begin{cases} x'_t=\frac{(5-2t)'}{5-2t}=\frac{-2}{5-2t} \\ y'_t=\frac{(5-2t)'}{1+(5-2t)^2}=\frac{-2}{1+(5-2t)^2}. \end{cases}$$

$$y'_x=\frac{-2}{1+(5-2t)^2}:\frac{-2}{5-2t}=\frac{5-2t}{1+(5-2t)^2}=\frac{5-2t}{4t^2-20t+26}.$$

Пример 4. Найти дифференциалы функций:

а) $y=x+\cos 2x;$ *б*) $u=3+e^{-x};$ *в*) $s=\ln 3t.$

Для дифференциала функции $y=y(x)$ справедлива формула $dy=y'(x)dx,$ т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

Решение.

а) $dy=(x+\cos 2x)'dx=(1-\sin 2x\cdot 2)dx=(1-2\sin 2x)dx.$

б) $du=(3+e^{-x})'dx=e^{-x}(-1)dx=-e^{-x}dx.$

в) $ds=(\ln 3t)'dt=\frac{(3t)'}{3t}dt=\frac{3}{3t}dt=\frac{1}{t}dt.$

Пример 5. Найти производную второго порядка функции $y = x^2 \ln x$.

Решение. $y'' = (y')'$, поэтому найдём производную первого порядка, а затем второго.

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \cdot \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

$$y'' = (x(2\ln x + 1))' = x'(2\ln x + 1) + x(2\ln x + 1)' = 2\ln x + 1 + x\frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = x^x$ логарифмическим дифференцированием

$$y = x^x$$
$$\ln y = \ln x^x$$
$$\ln y = x \cdot \ln x$$
$$(\ln y)' = (x \cdot \ln x)'$$
$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$
$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$
$$y' = y(\ln x + 1)$$
$$y' = x^x \cdot (\ln x + 1)$$

Правило Лопиталя. Предел отношения двух б.м. $\left(\frac{0}{0}\right)$ или б.б. $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \qquad (5)$$

Чтобы использовать правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей других типов, выражение под знаком предела следует преобразовать элементарными способами так, чтобы получить неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и затем использовать формулу (5).

Пример 7. Найти пределы, используя правило Лопиталя или элементарные способы раскрытия неопределённостей:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x - 3}{x^2 + 6}$; *б*) $\lim\limits_{x \to -7} \frac{2x^2 + 15x + 7}{x^2 + 5x - 14}$;

Решение.

а) Подставляя в функцию вместо *x* предельное значение ∞, определим предел числителя и знаменателя.

$$\lim_{x\to\infty}(4x^3+2x-3)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(4+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=\infty\cdot 4=\infty,\ \text{т. к. }\frac{2}{x^2}\to 0,\ \frac{3}{x^3}\to 0.$$

Аналогично: $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+6)=\infty.$

Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x-3}{x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x^3+2x-3)'}{(x^2+6)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(12x^2+2)'}{(2x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{2}=\lim_{x\to\infty}12x=\infty.$$

б) $$\lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to-7}\frac{2(-7)^2+15(-7)+7}{(-7)^2+5(-7)-14}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-7}\frac{(2x^2+15x+7)'}{(x^2+5x-14)'}=\lim_{x\to-7}\frac{4x+15}{2x+5}=\lim_{x\to-7}\frac{4(-7)+15}{2(-7)+5}=\frac{-13}{-9}=\frac{13}{9}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Что называют производной второго порядка?
4. Сформулируйте правила дифференцирования.
5. Что такое сложная функция? Как найти производную сложной функции.
6. Как найти дифференциал функции.
7. В чем заключается физический смысл производной и производной второго порядка?
8. Сформулируйте правило Лопиталя.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 4. Исследование функции с помощью производной и построение графиков.

Цель: Закрепить умения применять производную к исследованию функций и построению графиков функций.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание №1. Исследуйте функцию с помощью производной и постройте ее график

1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	
21	$y = x^3 - 3x$	22	$y = 3x^3 - x$
23	$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$	24	$y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8$
25	$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$	26	$y = -x^3 + x$

Задание №2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

1	$3x^5 - 20x^3 + 9,\ [-10;-1]$	11	$x^5 + 15x^3 - 50x,\ [-5;0]$
2	$3x^5 - 20x^3 - 8,\ [-5;1]$	12	$x^5 - 10x^3 - 135x,\ [-5;1]$
3	$3x^5 - 20x^3 - 16,\ [-3;-1]$	13	$y = x^3 + 16x^2 + 64x + 7,\ [-11;-7]$
4	$x^5 - 5x^3 - 20x,\ [-8;1]$	14	$y = -10,5x^2 - x^3 + 22,\ [-1;8]$

5	x^5+15x^3-260x, $[-10;0]$	15	$y=x^3-2,5x^2-50x-2$, $[3;12]$
6	$y=x^3+9,5x^2-72x+18$, $[-16;-6]$	16	$y=x^3-3,5x^2+4x-23$, $[-3;3]$
7	$3x^5-5x^3+15$, $[-4;0]$	17	$y=x^3-9,5x^2+30x-3$, $[-4;8]$
8	$y=5+12x-x^3$, $[-3;-1]$	18	x^5+5x^3-140x, $[-10;0]$
9	x^5+15x^3-50x, $[-4;0]$	19	$y=x^3-9,5x^2-40x-24$, $[6;11]$
10	x^5-5x^3-20x, $[-9;1]$	20	$y=x^3+17,5x^2+72x+21$, $[-13;-9]$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Общая схема построения графиков функций:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти промежутки монотонности (промежутки возрастания и убывания) функции и ее экстремумы (точки максимума и минимума).
5. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
6. Построить график, используя полученные результаты исследования.

1. Находим область определения *D(f)* функции *y = f(x).*
2. Проверяем функцию на четность. Если *f(-x) = f(x),* то функция четная, график функции симметричен относительно оси OY. Если *f(-x) = - f(x),* то функция нечетная, график нечетной функции симметричен относительно начала координат. В противном случае функция является ни четной, ни нечетной. Если функция периодическая, то находим период функции.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднений).
 а) Находим нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ox). Для этого мы решаем уравнение *f(x) = 0.*
б) Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (Oy). Для этого ищем значение функции при *x=0.*
4. Исследуем функцию с помощью производной: находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.
Для этого мы следуем алгоритму:

а) Находим производную

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$$

$$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-x)^2 - 2\cdot(-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

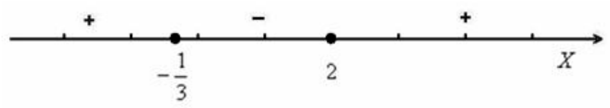
$$f(-x) \neq f(x),\ f(-x) \neq -f(x)$$

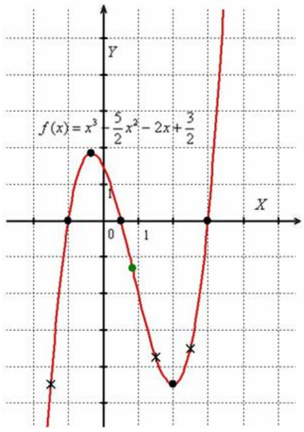
$$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Найдём критические точки (точки в которых производная равна 0 или не существует) и приравняем ее к 0:

$$f'(x) = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)' = 3x^2 - 5x - 2 = 0 \qquad x = -\frac{1}{3},\ x = 2$$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



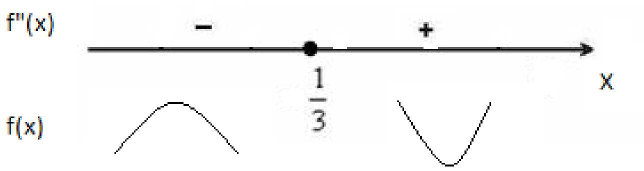


Следовательно, функция возрастает

на

$x = 2$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{50}{27} \approx 1{,}85 \qquad f(2) = 8 - 10 - 4 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$$



1. Найти производную функции.
2. Определить критические точки (те точки, в которых производная функции обращается в ноль или не существует).
3. Выбрать из найденных точек те, которые принадлежат данному отрезку.
4. Вычислить значения функции (не производной!) в этих точках и на концах отрезка.
5. Среди полученных значений выбрать наибольшее или наименьшее, оно и будет искомым.

Пример 3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 18x^2 + 81x + 23$

на отрезке [8; 13].

Решение: действуем по алгоритму нахождения наименьшего значения функции на отрезке:

1) $y' = 3x^2 - 36x + 81$.
2) $y' = 3x^2 - 36x + 81 = 0$

   $x^2 - 12x + 27 = 0,$

   $x = 3$ и $x = 9$

3) $x = 9$

2. Сформулируйте алгоритм нахождения промежутков возрастания/убывания функции и нахождения точек максимума/минимума.
3. Сформулируйте алгоритм нахождения выпуклостей функции и точек перегиба.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на отрезке.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Тема 2.2. Интегральное исчисление.

Практическая работа № 5. Методы нахождения неопределённого интеграла.

Цель: сформировать умение вычислять неопределенные интегралы, используя различные методы интегрирования.
Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Вычислить интегралы.

1) $\int\left(\frac{7}{x^2+16}-\frac{x^4+5}{x^5}+3\sqrt{x}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{5}{5x^2+5}+7^x-\frac{\sin 2x}{\cos x}\right)dx$

2) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{3+x^2}}-\frac{2x^2+10}{x}+4\sqrt[6]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{2}{2x^2+2}+2^x-\frac{x^2-4}{x+2}\right)dx$

3) $\int\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+4e^x\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{12}{3+3x^2}-3\cos x+\frac{x^2-9}{x-3}\right)dx$

4) $\int\left(\frac{8}{\sqrt{5+x^2}}+\frac{6+x^3}{x^4}-3\sqrt[8]{x^5}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{2x^2+2}-2\sin x+3^x\right)dx$

5) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+\frac{4x^2-1}{x^3}-2\sqrt[8]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{6}{3x^2-9}+\frac{3\sin^3 x-5}{\sin^2 x}\right)dx$

6) $\int\left(\frac{3\cos^3 x-2}{\cos^2 x}-5\sqrt[5]{x^3}\right)dx$ $\quad\int\left(\frac{16}{2x^2-8}-\frac{3-x^3}{x^4}+5^x\right)dx$

Задание 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$ $\quad\int\frac{xdx}{\sqrt{2+x^2}}$ $\quad\int e^{1-3x}\,dx$

2) $\int(2x-1)\cos(x^2-x)\,dx$ $\quad\int x\sqrt{5+x^2}\,dx$ $\quad\int e^{6x+5}\,dx$

3) $\int 10^{2x+1}\,dx$ $\quad\int\sin\frac{x}{2}dx$ $\quad\int\frac{dx}{5x+3}$

4) $\int x^2(3-x^3)^{10}\,dx$ $\quad\int\cos 2x\,dx$ $\quad\int e^{\sin x}\cos x\,dx$

5) $\int\frac{dx}{x\ln x}$ $\quad\int\sin 2x\,dx$ $\quad\int 3^{7x-1}\,dx$

6) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad\int\sin(2-3x)dx$ $\quad\int\frac{dx}{e^{3x}}$

Задание 3. Проинтегрировать по частям.

1) $\int(7x-1)\cos x\,dx$ $\quad\int\operatorname{arctg} x\,dx$

2) $\int(6-5x)e^x\,dx$ $\quad\int(7x+5)\ln x\,dx$

3) $\int x\cos x\,dx$ $\quad\int\operatorname{arcctg} x\,dx$

4) $\int(1+2x)\cos x\,dx$ $\quad\int\arcsin x\,dx$

5) $\int(8x-1)\sin 5x\,dx$ $\quad\int(6+5x)\ln x\,dx$

6) $\int xe^x\,dx$ $\quad\int(3x+2)\ln x\,dx$

Задание 4. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_1^2\left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^3\left(3x^2+6x-2\right)dx$ 3) $\int_1^3\left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int_0^8(21x-19)dx$ 5) $\int_{-4}^0\left(x^3+8\right)dx$

6) $\int\limits_{10}^{13}(2x+7)dx$.

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Функция $F(x)$, определенная на интервале (a,b), называется *первообразной* для функции $f(x)$, определенной на том же интервале (a,b), если $F'(x)=f(x)$.

Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на некоторое постоянное слагаемое, т. е. $\Phi(x)=F(x)+C$, где C — const.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл: $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F'(x)=f(x)$, C — const.

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$; $\quad d\int f(x)dx=f(x)dx$;
2. $\int dF(x)=F(x)+C$;
3. $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$, $\quad k$ — const;
4. $\int\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$.

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du=C$; $\quad C=$ const; $\qquad$ 2. $\int du=u+C$;

3. $\int u^{\alpha}du=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \alpha\neq -1;$

3а. $\int\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{u}+C;$

4. $\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C;$

5. $\int a^{u}du=\frac{a^{u}}{\ln a}+C;$

6. $\int e^{u}du=e^{u}+C;$

7. $\int\cos u\,du=\sin u+C;$

8. $\int\sin u\,du=-\cos u+C;$

9. $\int\frac{du}{\cos^2 u}=\mathrm{tg}u+C;$

10. $\int\frac{du}{\sin^2 u}=-\mathrm{ctg}u+C;$

11. $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\frac{u}{a}+C;$

12. $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C;$

13. $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a}+C;$

14. $\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C;$

15. $\int\frac{du}{\sin u}=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right|+C;$

16. $\int\frac{du}{\cos u}=\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C;$

17. $\int\mathrm{tg}u\,du=-\ln|\cos u|+C;$

18. $\int\mathrm{ctg}u\,du=\ln|\sin u|+C.$

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx;\qquad б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

Проверка:

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)\,x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\frac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}$$ — верно.

$$б)\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\frac{2}{11}\right)}+3\int 5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\frac{2}{11}}\right)^2}+3\int 5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\frac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln 5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln 5}+4x-\frac{1}{2}x^2+C\right)'=\frac{5}{\sqrt{22}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'+$$

$$+\frac{3}{\ln 5}\left(5^x\right)'+4x'-\frac{1}{2}\left(x^2\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы 14, 5, 2, 3, 1}\\ \text{таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{22}}\frac{\left(\sqrt{\frac{11}{2}}x\right)'}{1+\frac{11}{2}x^2}+\frac{3}{\ln 5}\cdot 5^x\ln 5+4\cdot 1-\frac{1}{2}2x^{2-1}=\frac{5}{\sqrt{22}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{11}{2}}}{\frac{2+11x^2}{2}}+$$

$$+3\cdot 5^x+4-x=\frac{5}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{2}}\frac{\sqrt{11}\cdot 2}{\sqrt{2}\left(2+11x^2\right)}+3\cdot 5^x+\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}=$$

$$=\frac{5}{2+11x^2}+3\cdot 5^x+\frac{16-x^2}{4+x}$$ — верно.

Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt = F(t) + C,$ то $\int f(x)dx = F(\psi(x)) + C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x = \varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx = \varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t = \psi(x)$.

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

$$а)\ \int \cos 4x dx;\ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ в) \int x(2-x^2)^5 dx$$

Решение:

$$а)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{matrix} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{matrix} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\int \cos t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4}\sin t + C = \frac{1}{4}\sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1}dx = \left| \begin{matrix} t = 9x+1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9}\int e^t dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9}e^t + C = \frac{1}{9}e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2-x^2)^5 dx = \left| \begin{matrix} t = 2 - x^2 \\ dt = (2-x^2)' = -2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{-2} \end{matrix} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^5 dt = \left\{ \begin{matrix} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12}(2-x^2)^6 + C.$$

Интегрирование по частям.

Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U = U(x)$ и $V = V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,...$	$U = P_n(x) \to$ $\to dU = P_n'(x)dx$	$dV = \sin kx\,dx \to V = -\frac{1}{k}\cos kx$ $dV = \cos kx\,dx \to V = \frac{1}{k}\sin kx$ $dV = e^{kx}dx \to V = \frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U = \ln kx \to dU = \frac{dx}{x}$	$dV = P_n(x)dx \to$ $\to V = \int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U = \arcsin kx \to dU = \frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U = \arccos kx \to dU = -\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\,P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arctg} kx \to dU = \frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\,P_n(x)dx$	$U = \operatorname{arcctg} kx \to dU = -\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$n = 0,1,2,...$		

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, где $a_0 \neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

$$а)\ \int(3x-1)\sin 2xdx; \qquad б)\ \int(1+2x)\ln xdx.$$

Решение. а) $\int (3x-1)\sin 2x dx = \left| \begin{array}{l} U = 3x-1 \to dU = 3dx \\ dV = \sin 2x dx \to V = -\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array} \right| = (3x-1)(-\dfrac{\cos 2x}{2}) + \int \dfrac{\cos 2x}{2} dx =$

$$= -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + C.$$

б) $\int (1+2x)\ln x dx = \left| \begin{array}{l} U = \ln x \to dU = \dfrac{dx}{x} \\ dV = (1+2x)dx \to \\ V = \int (1+2x)dx = x + x^2 \end{array} \right| = \ln x(x+x^2) - \int (x+x^2)\dfrac{dx}{x} =$

$$= \ln x(x+x^2) - \int (1+x)dx = \ln x(x+x^2) - x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулируйте определение первообразной. Чем неопределенный интеграл отличается от первообразной?
2. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
3. Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?
4. Как проверить, правильно ли найден интеграл?
5. В чем состоит метод непосредственного интегрирования функций? (пример)
6. В чем состоит метод подстановки (метод замены переменной) при нахождении неопределенного интеграла? (пример).
7. Напишите формулу вычисления неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.
8. Как выбирать U и V при использовании метода интегрирования по частям?
9. Напишите пример вычисления интеграла методом интегрирования по частям.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.:

ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 6. Вычисление определенного интеграла. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Цель: сформировать умение находить определенный интеграл и применять его к нахождению площадей.

Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Задание 1. Вычислить определенный интеграл.

1) $\int_{1}^{2}\left(x^3+10x\right)dx$ 2) $\int_{-2}^{3}\left(3x^2+6x-2\right)dx$ 3) $\int_{1}^{3}\left(x^2-16x+3\right)dx$ 4) $\int_{0}^{8}\left(21x-19\right)dx$ 5) $\int_{-4}^{0}\left(x^3+8\right)dx$

6) $\int_{10}^{13}\left(2x+7\right)dx$ 7) $\int_{1}^{2}\left(3x^2+2x\right)dx$ 8) $\int_{-1}^{1}\left(2x^3-2x\right)dx$ 9) $\int_{1}^{2}\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$ 10) $\int_{-2}^{0}\left(3-2x-x^2\right)dx$

Задание 2. Вычислить определенный интеграл методом замены переменной.

1. $\int_{\sqrt{2}}^{3}\frac{3xdx}{x^2-1}$ 2. $\int_{0}^{5}\frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$ 3. $\int_{2}^{6}\frac{xdx}{x^2-3}$ 4. $\int_{0,5}^{1}\sqrt{4x-2}dx$ 5. $\int_{-1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{8-3x}}$

6. $\int_{1}^{5}\frac{xdx}{x^2+1}$ 7. $\int_{2}^{5}\frac{dx}{2x-3}$ 8. $\int_{1}^{2}\frac{2dx}{3-x}$ 9. $\int_{-1}^{0}2x\left(x^2-1\right)^9dx$ 10. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$

Задание 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1.	$y=\sqrt{x}$, $y=2-x, y=0.$	**2.**	$y=-x^2, x+y+2=0$
3.	$y=x^2-2$, $y=x$.	**4.**	$y=x^2$, $y=6-x$, $y=0$.
5.	$y=x^2$, $y=x+2$.	**6.**	$y=x^2$, $y=2-x$.
7.	$y=x^2$, $y=3-x$.	**8.**	$y=-x^2$, $y=x-2$.
9.	$y=2x$, $y=x^2$.	**10.**	$y=3-x^2$, $y=-2x$.

Задание 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями.

1) $y = x^2 - 2,\ y = 1 - 2x$ 2) $y = x^3,\quad y = 8,\quad x = 0$ 3) $y = 3x^2 + 1,\quad y = 3x + 6$

4) $y = x^2,\ y = x + 1$ 5) $y = x^2,\quad y = 2 - x^2$ 6) $y = x^2 - 1,\ y = 1 - x$

7) $y = x^2 - 2x + 1,\ y = 1 + x$ 8) $y = 4x - x^2,\ y = 4 - x$ 9) $y = 0{,}5x^2 + 1,\ y = -x + 0{,}5,\ x = -4$

10) $y = -x^2 + 4x + 1,\ y = x^2 + 1$

Задание 5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями.

1) $x^2 - y = 0,\quad y = 1$ 2) $x^2 + y = 0,\quad y = -1$ 3) $x - y^2 = 0,\quad x = 1$

4) $y = 4x^3,\quad x = 0,\quad y = -4$ 5) $y = 4x^3,\quad x = 1,\quad y = 0$

6) $y = -4x^3,\quad x = -1,\quad y = 0$

7) $y = x^2 + 1,\ x = 0,\quad x = 1,\quad y = 0$ 8) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\quad x = 4,\quad y = 0$

9) $y = 2x,\ y = x + 3,\quad x = 0,\quad x = 1$ 10) $y = 2 + x,\ y = 1,\quad x = 0,\quad x = 2$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Определенный интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$— первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x) = f(x)$. Формула (1) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$ 2) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$ 4) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

5) $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx,\ C-\text{const};$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла.

Пример1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx$.

$$\int\limits_1^3 \left(x^2-16x+3\right)dx = \left(\frac{x^3}{3}-16\cdot\frac{x^2}{2}+3x\right)\Bigg|_1^3 = \left(\frac{x^3}{3}-8x^2+3x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$=\left(\frac{3^3}{3}-8\cdot 3^2+3\cdot 3\right)-\left(\frac{1^3}{3}-8\cdot 1^2+3\cdot 1\right)=\left(\frac{27}{3}-72+9\right)-\left(\frac{1}{3}-8+3\right)=$$

$$=(9-63)-\left(\frac{1}{3}-5\right)=-54-\frac{1}{3}+5=-49-\frac{1}{3}=-49\frac{1}{3}$$

Метод замены переменной (метод подстановки)

При замене переменной по формуле необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx,$ (2)

где $\alpha=\psi(a),\ \beta=\psi(b),\ t=\psi(x)$ — обратная к $x=\varphi(t)$ функция.

Алгоритм вычисления определенного интеграла методом замены переменной (методом подстановки):

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Находят новые пределы интегрирования.
5. Производят замену под интегралом.
6. Находят полученный интеграл.

Пример 2. Вычислить способом замены переменной:

а)

Решение:. а) Замена: $t = x^2 - 16$; $dt = 2x\, dx$; $dx=$

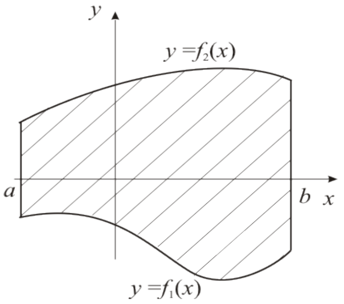


рис.1

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2,\ \ y = 3x + 2.$

***Решение*.** Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0,\ 2)$ и $(-1,\ -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \ \ x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1) + 2 = -1,\ \ y_2 = 3\cdot 4 + 2 = 14.$ Итак, $M_1(-1,-1),\ \ M_2(4,14).$

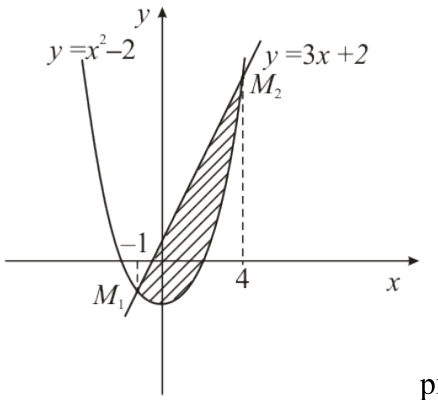


рис.2

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (4), в которой $f_2(x) = 3x + 2,\ \ f_1(x) = x^2 - 2,$ поскольку $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [-1, 4]$. Получим:

$$S = \int_{-1}^{4}\left(3x + 2 - \left(x^2 - 2\right)\right)dx = \int_{-1}^{4}\left(3x - x^2 + 4\right)dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{3\cdot 4^2}{2} - \frac{4^3}{3} + 4\cdot 4 - \left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + 4\cdot(-1)\right) = 24 - \frac{64}{3} + 16 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + 4 =$$

$$= 44 - \frac{65}{3} - \frac{3}{2} = \frac{125}{6} = 20\frac{5}{6}$$ (кв.ед.)

Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси *OX* криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *OX* и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 3), то его объем вычисляется по формуле: $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$ (6)

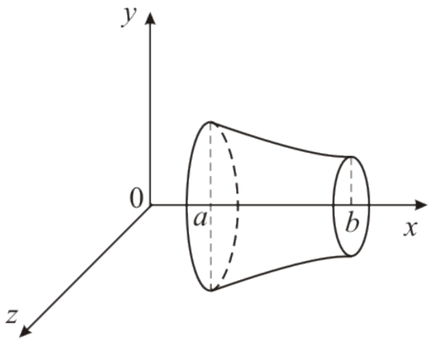


Рис. 3

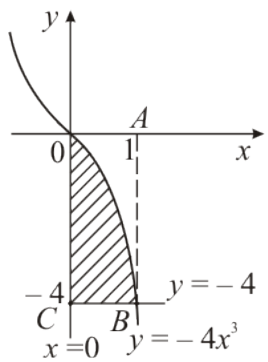


Рис. 4

Пример5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями: $y = -4x^3,\ x = 0,\ \ y = -4.$

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 4).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\,dx = \pi 16x\big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Назовите формулу Ньютона – Лейбница.
2. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
3. Как осуществляется замена переменной в определенном интеграле?
4. Как осуществляется интегрирование по частям в определенном интеграле? Запишите пример.
5. Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью интеграла?
6. Всегда ли положительна площадь фигуры? Для чего необходимо строить чертеж?
7. Как вычислить объем тела вращения?

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.

Практическая работа № 7. Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка

Цель: сформировать умения решать дифференциальные уравнения первого порядка.
Оснащение: Методические рекомендации к выполнению практической работы

Задание:

Решить предложенные ДУ по вариантам:

Вариант 1 1. $2ydy=(x^3-1)dx$ если y(1)=2 2. $y'-2x=5$ 3. $(x+1)dy=y^2dx$ 4. $y'x=y$ 5. $y'-\frac{5}{x}y=x^4$	**Вариант 2** 1. $ydy=(x-\sin x)dx$ если y(0)=2 2. $3x-y'-2=0$ 3. $(x+4)dy=2y^3dx$ 4. $2y'x^2=y$ 5. $y'+\frac{2}{x}y=x^2$	**Вариант 3** 1) $3y^2dy=(1-\cos x)dx$ если y(0)=3 2) $4x+y'-2=0$ 3) $(x+8)dy=ydx$ 4) $y'x^3=3y$ 5) $y'-\frac{2}{x}y=x^4$
Вариант 4 1) $\sqrt{y}dy=(3x-x^5)dx$ если	**Вариант 5** 1) $4\sqrt{y}dy=(x^2-1)dx$	**Вариант 6** 1) $(y+1)dy=3xdx$ если

y(1)=1 2) $y' - 2x^2 = 5$ 3) $(x-7)dy = y^4 dx$ 4) $4y'x^3 = y$ 5) $y' + \frac{2}{x} y = x^3$	если y(1)=4 2) $y' + 7x = 5x^2$ 3) $(x-9)dy = 5ydx$ 4) $5y'x^6 = 3y$ 5) $y' - \frac{1}{x} y = -\frac{8}{x^2}$	y(2)=5 2) $6x + y' - 9 = 0$ 3) $(x+9)dy = 3y^5 dx$ 4) $7y'x^8 = y^2$ 5) $y' - \frac{1}{x} y = -\frac{3}{x^3}$
Вариант 7 1. $\frac{dy}{y} = (2x-5)dx$ если y(1)=1 2. $7x + y' + 8 = 0$ 3. $(x-3)dy = 8y^3 dx$ 4. $9y'x = 4y^9$ 5. $y' + \frac{1}{x} y = -x^3$	**Вариант 8** 1) $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$ если y(0)=1 2) $3x^2 + y' + 7x = 0$ 3) $(x-11)dy = 5y^4 dx$ 4) $y'x = 3y^9$ 5) $y' + \frac{3}{x} y = \frac{2}{x^4}$	**Вариант 9** 1) $dy = \frac{dx}{2x+3}$ если y(1)=2 2) $5x^2 + y' - x = 0$ 3) $(x+7)dy = 6y^3 dx$ 4) $6y'x^9 = 7y^4$ 5) $y' + \frac{4}{x} y = \frac{1}{x^3}$

Порядок выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал, уделив особое внимание рассмотрению предложенных примеров.
2. Самостоятельно выполните задания, соответствующие Вашему варианту, в рабочей тетради.
3. По итогам работы ответьте на контрольные вопросы и сделайте общий вывод о проделанной работе.

Теоретические сведения к практической работе

Дифференциальными уравнениями (ДУ) называются уравнения, содержащие производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется решением дифференциального уравнения.

При решении дифференциальных уравнений сначала получается общее решение (решение, содержащее произвольную постоянную). Затем, если известны начальные данные, то можно получить частное решение . Для этого необходимо:

1. Подставить начальные данные в общее решение и вычислить С.
2. Полученное числовое значение С подставить в общее решение.

Задача отыскания конкретного частного решения данного дифференциального уравнения по начальным данным называется задачей Коши. Геометрически частное решение представляется одной интегральной кривой, а общее решение – совокупностью интегральных кривых.

В настоящее время диапазон применения дифференциальных уравнений очень широк. С их помощью решаются задачи математики, физики, биологии, электротехники, радиотехники, экономики, технологии производства и многих других сфер человеческой деятельности. Дифференциальные уравнения получаются в тех случаях, когда используются процессы, в описании которых используются такие величины, как скорость (быстрота) протекания процесса, изменение скорости и т. д. С помощью дифференциальных уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического, химического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Дифференциальные уравнения классифицируют в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение. Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. Например, $xy' - y = 4$ - дифференциальное уравнение первого порядка, т.к. наивысший порядок производной, входящей в него – первый.

$y'' - xy' + y = 1 + x^2$ - дифференциальное уравнение второго порядка, т.к. наивысший порядок производной, входящей в это уравнение – второй.

$y''' + 2y''y = 0$ - дифференциальное уравнение третьего порядка.

2. Виды дифференциальных уравнений и их решение

1) Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Уравнение вида $f(x)dx + g(y)dy = 0$

где $f(x), g(x)$ - данные функции, называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Рассмотрим на конкретном примере решение таких уравнений.

Пример №1. Найти частное решение дифференциального уравнения: $dy = (x^2 - 1)dx$, если y=4, при x=1

	Последовательность решения	Методика решения
1.	1. $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$	Интегрируем обе части уравнения
2.	$y = \frac{x^3}{3} - x + C$	Данное выражение получилось в результате интегрирования. Это и есть общее решение данного уравнения

3.	$4=\frac{1^3}{3}-1+C$ $4-\frac{1}{3}+1=C$	Подставили в общее решение начальные условия
4.	$C=\frac{14}{3}$	Нашли С из предыдущего уравнения
5.	$y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{14}{3}$	Подставили С в общее решение и получили частное решение данного уравнения

2) Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение вида $f(x)F(y)dx+g(x)G(y)dy=0$, где $f(x), F(y), g(x), G(y)$ - заданные функции, называется дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными.

Решение таких уравнений осуществляется по следующему плану:

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

Примечание: в зависимости от вида уравнения некоторые пункты плана решения могут быть опущены.

Пример №2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$1+y'+y+xy'=0$

	Последовательность решения	Методика решения
1.	$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$	Заменили y' на $\frac{dy}{dx}$
2.	$dx+dy+ydx+xdy=0$	Умножили все члены равенства на dx
3.	$dy+xdy=-dx-ydx$ $dy(1+x)=-dx(1+y)$	Сгруппировали все члены, содержащие dy и dx, и записали полученные выражения в разных частях равенства

4.	$\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}$	Разделили обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$, т.е. разделили переменные
5.	$\int\frac{dy}{1+y} = -\int\frac{dx}{1+x}$	Проинтегрировали обе части равенства
6.	$\ln\|1+y\| = -\ln\|1+x\| + \ln C$ (заменили С на lnC)	Нашли интегралы от левой и правой частей равенства
7.	$\ln\|1+y\| = \ln\left\|\frac{C}{1+x}\right\|$	Воспользовались теоремой о логарифмах и преобразовали правую часть равенства
8.	$1+y = \frac{C}{1+x}$	Воспользовались свойством логарифмов: если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа
	$y = \frac{C}{1+x} - 1$	Нашли y из последнего выражения. Данное выражение является общим решением дифференциального уравнения.

3) Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + py = q$, где p и q- функции переменной x или постоянные величины, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. При решении таких уравнений применяют метод Бернулли, который заключается в следующем:

1. Приводят уравнение к виду $y' + py = q$
2. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + uv'$ и подставляют это выражение в уравнение.
3. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций u или v за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.
4. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.
5. Записывают общее решение, подставив выражение для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.

6. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

Пример №3. Решить дифференциальное уравнение: $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$

	Последовательность решения	Методика решения
	$\frac{dy}{dx} + ytgx = \frac{1}{\cos x}$	Разделили все члены уравнения на *cos x*
	$u'v + uv' + uv\,tgx = \frac{1}{\cos x}$	Подставили выражение $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в уравнение
	$u'v + u(v' + tgx) = \frac{1}{\cos x}$	Вынесли общий множитель u за скобки
	$v' + v\,tgx = 0$	Приравняли к нулю выражение в скобках
	$\frac{dv}{dx} = -v\,tgx$	Заменили v' на $\frac{dv}{dx}$ и перенесли слагаемое $v\,tgx$ в правую часть
	$\frac{dv}{v} = -tgxdx$	Разделили переменные
	$\int\frac{dv}{v} = -\int tgxdx$	Проинтегрировали обе части уравнения
	$\ln v = \ln\cos x$	Нашли интегралы от обеих частей равенства
	$v = \cos x$	Воспользовались свойством логарифмов: если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа
	$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}$	Переписали уравнение $u'v + u(v' + tgx) = \frac{1}{\cos x}$ с учетом, что $v = \cos x$ и $v' + tgx = 0$
	$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ $du = \frac{dx}{\cos^2 x}$	Заменили u' на $\frac{du}{dx}$ Нашли du

	$\int du = \int \frac{du}{cos^2 x}$	Проинтегрировали обе части уравнения
	$u = tgx + C$	Нашли интегралы от обеих частей равенства
	$y = (tgx + C)\cos x$	Подставили значения u и v в равенство $y = uv$
	$y = \sin x + \cos x\, C$	Нашли общее решение дифференциального уравнения

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Что такое общее решение дифференциального уравнения?
4. Что такое частное решение дифференциального уравнения?
5. Написать общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
6. Сформулируйте алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными.
7. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 1-го порядка?
8. Какая замена неизвестной функции позволяет свести линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка к уравнению с разделяющимися переменными?
9. Сформулируйте алгоритм решения линейного диф. уравнения с разделяющимися переменными.

Форма контроля – отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа № 8. Решение дифференциальных уравнений 2-го порядка

Цель работы: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка.
Оснащение: плакаты с формулами дифференцирования и интегрирования; микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями работы № 9.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить неполные дифференциальные уравнения второго порядка:

1.1 $\frac{d^2s}{dt^2} = 18t + 2$, если $s(0) = 4$, $s'(0) = 5$

1.2 $\frac{d^2y}{dx^2} = x^2$, если $y(0) = 0$, $y'(0) = 12$

1.3 $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 20$

1.4 $\frac{d^2y}{dx^2} = -6x + 2$, если $y(-1) = -8$, $y'(-1) = 3$

2. Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка

2. 1 1) $y'' - 4y' + 5y = 0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$

2.2. 1) $y'' + 2y' + 10y = 0$ 2) $y'' + 6y' + 9y = 0$

2. 3 1) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ 2) $y'' + 12y' + 36y = 0$

2. 4 1) $y'' + 8y' + 15y = 0$ 2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

3. Найти частные решения линейного дифференциального уравнения второго порядка.

3.1 $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$

3.2. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$, если $y(0) = \frac{9}{5}$, $y'(0) = 0$

3.3 $y'' - 6y' + 13y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$

3.4 $y'' - 4y' + 13y = 0$, если $y(\frac{\pi}{3}) = 1$, $y'(\frac{\pi}{3}) = -6$

4. Решить дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно частных производных. Найти общий интеграл уравнения.

4.1 $\sin x \frac{\partial z}{\partial x} + \sin y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4.2 $y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4.3 $yz\frac{\partial z}{\partial x} + xz\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy$

4.4 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = 4$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Дифференциальные уравнения второго порядка. **2.**Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ и метод их решения. **3.** Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами вида $y''+p\cdot y'+q\cdot y=0$ и их решение. **4.** Характеристическое уравнение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. **5.** Вид общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения. **6.** Начальные условия в дифференциальных уравнениях второго порядка.

Справочный материал.

Обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение вида *F(x, y, y', y'') = 0*, где *F* – известная функция трех переменных, *x* – независимая переменная, *y* – неизвестная функция, *y'*, *y''*– ее производные.

Если уравнение представлено в виде *y'' = f(x, y, y')*, то такое уравнение называют **разрешённым относительно производной.**

Неполные дифференциальные уравнения второго порядка. Простейшим видом неполного дифференциального уравнения второго порядка является уравнение вида $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ или $\frac{dy'}{dx} = f(x)$. Решается двукратным интегрированием: $\frac{dy'}{dx} = f(x)$, $dy' = f(x)dx, \quad y' = \int f(x)dx$

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0,$ где p и q – постоянные коэффициенты, называется **линейным однородным уравнения второго порядка** с постоянными коэффициентами.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения. Доказано, что частными линейно независимыми решениями данного уравнения являются функции вида $y = e^{kx}$, поэтому их отыскание сводится к нахождению корней характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$. Для его составления в уравнение $y'' + py' + qy = 0$ вместо y'', y', и y нужно подставить соответственно k^2, k, и *1*. При решении характеристического уравнения возможны три случая:

1) k_1 и k_2 – действительные и притом различные числа ($k_1 \neq k_2$); **2)** k_1 и k_2 – действительные равные числа ($k_1 = k_2$); **3)** k_1 и k_2 – комплексные числа.

I. Корни характеристического уравнения действительны и различны: $k_1 \neq k_2$.

общий интеграл имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

II. Корни характеристического уравнения действительны и равны: $k_1 = k_2$.

частные решения имеют вид $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, общее решение – $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$.

III. Корни характеристического уравнения комплексные.

Так как комплексные корни входят попарно сопряжёнными, то обозначим: $k_1 = a + bi, \quad k_2 = a - bi$, где $a = -\frac{p}{2}, \quad b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Частные решения можно записать в форме $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$, общее решение – $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Простейшие уравнения в частных производных.

Дифференциальное уравнение в частных производных – это равенство, содержащее несколько независимых переменных, искомую функцию и ее частные производные по этим переменным. В общем виде это уравнение может быть записано так: $F(x_1, x_2, ...x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ...) = 0$, где $x_1, x_2, ..., x_n$- независимые переменные; $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ - неизвестная искомая функция. (1)

Дифференциальное уравнение (1) будет **линейным**, если функция F линейна относительно искомой функции $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ и ее производных. Рассмотрим дифференциальное уравнение $X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} = Z$, (2) где X, Y, Z - функции x,y,z. Предварительно решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$. Пусть решение этой системы определяется равенствами $\omega_1(x, y, z) = C_1$, $\omega_2(x, y, z) = C_2$.Тогда общий интеграл дифференциального уравнения (2) имеет вид $\Phi[\omega_1(x, y, z), \omega_2(x, y, z)] = 0$, где $\Phi(\omega_1, \omega_2)$- произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Показать на примере в чем заключается решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. Запишите вид общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от вида корней характеристического уравнения.

4. Дать определение понятию простейшего дифференциального уравнения в частных производных. Показать на примере в чем заключается решение простейшего дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. $\frac{\partial z}{\partial x}=1$
5. Из предложенных дифференциальных уравнений выберите дифференциальное уравнение в частных производных: $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=0$, $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^2$, $\cos xx\frac{\partial z}{\partial x}+\cos y\frac{\partial z}{\partial y}=2$.

Рекомендуемая литература:

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.
4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 c. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 c. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

Тема 2.4. Ряды.

Практическая работа № 9. Исследование числовых рядов на сходимость.

Цель работы: закрепить понятия сходимости и расходимости ряда, признаки Даламбера, Коши и Лейбница.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 10.

Задания для самостоятельного решения:

1. Вычислить сумму членов ряда.

1.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$ 1.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 1.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2-3n+2}$ 1.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-3)(n+1)}$

2.Исследовать сходимость ряда, применяя необходимый признак сходимости и признак сравнения.

2.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}$ 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 2.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}$ 2.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

3. Исследовать сходимость ряда, используя признак Даламбера.

3.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$ 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$ 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$

4. Исследовать сходимость ряда, используя признак Коши.

4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)}$ 4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(n+1)}$ 4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^{10}\cdot 10}$ 4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n}$

5. Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд, используя признак Лейбница.

5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{3n-1}$ 5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)}{2n+1}$ 5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ 5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие числового ряда. Общий член. Частичная сумма. **2.** Понятия: сходящийся ряд, расходящийся. **3.** Геометрический ряд. **4**. Гармонический ряд. **5.** Необходимый и достаточные признаки сходимости ряда с положительными членами. Признак Даламбера. **6.** Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. **7.** Абсолютная и условная сходимость. **8.** Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

Справочный материал.

Числовым рядом (или просто рядом) называется выражения вида, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (1), где \quad u_1, u_2, \ldots u_n - действительные \quad или \quad комплексные \quad числа,$ называемые членами ряда, u_n- общим членом.

Сумма первых n- членов ряда (1) называется ***n*- й частичной суммой ряда** и обозначается через S_n, *т.е.* $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.
Если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (1), то этот предел называют суммой ряда (1) и говорят, **ряд сходится**. Записывают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.
Если предел не существует или $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$, то ряд (1) называют **расходящимся**. Такой ряд суммы не имеет.

Необходимый признак сходимости ряда. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ может сходиться только при условии, что его общий член u_n при неограниченном увеличении номера n стремится к нулю: $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов

Первый признак сходимости: Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n (1) \quad и \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n \,(2)$. Если для всех n выполняется неравенство $u_n \le v_n$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1) и из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Предельный признак сравнения. Пусть даны два знакоположительных ряда (1) и (2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 \prec A \prec \infty)$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно. Ряд, с которым сравнивается исследуемый ряд, называется <u>эталонным</u>

Замечание 3: Если l*=0 или* $l=\infty$ - выбираем другой эталонный ряд.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (1)$, с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Радикальный признак Коши. Пусть дан ряд (1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Признак сходимости знакочередующегося (знакопеременного) ряда.

Знакочередующимся рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, где \quad u_n \succ 0 \quad для \quad n \in N \qquad (3)$$

Достаточный признак Лейбница: Знакочередующийся ряд (3) сходится, если: 1.Последовательность абсолютных величин ряда монотонно убывает т.е.$u_1>u_2>u_3>\ldots>u_n>\ldots$ 2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. При этом сумма S ряда (3) удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$.

Знакопеременный ряд называется **абсолютно сходящимся**, если сходится как сам ряд, так и ряд, составленный из абсолютных величин его членов. Знакопеременный ряд называется **условно сходящимся**, если сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин членов, расходится.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

6. Дать определение понятию числовой ряд. Дать определение понятию сходимость и расходимость числовых рядов. Сформулировать необходимый и достаточный признаки сходимости и расходимости знакоположительного ряда.
7. Дать определение понятию знакоположительного ряда. Сформулировать предельный признак сравнения ряда.
8. Сформулировать признак сходимости ряда по Даламбера. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по Даламберу.
9. Сформулировать радикальный признак сходимости ряда Коши. Описать алгоритм исследования ряда по признаку Коши.
10. Дать определение понятию знакопеременный ряд. Сформулировать признак сходимости ряда Лейбница. Описать алгоритм исследования числового ряда на сходимость по признаку Лейбница.

Основная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2015. – 400с.
2. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов.- М., Дрофа, 2014. – 204 с.
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие СПО. - Ростов н/Д: Феникс, 2012. – 380 с.
4. Шипачев В.С. Математика. Учебник и практикум для СПО. – Юрайт, 2014. – 447 с.

Дополнительная:

1. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Высшая школа, 2000.
3. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2005. – 416 с.

4. Алпатов А.В. Математика [Электронный ресурс]: учебное пособие для СПО / А.В. Алпатов. — Электрон. текстовые данные. — Саратов: Профобразование, 2017. — 96 с. — 978-5-4488-0150-1. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/65731.html
5. Золотарёва, Н. Д. Алгебра: базовый курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н. Д. Золотарёва, Ю. А. Попов, Н. Л. Семендяева, М. В. Федотов; под редакцией М. В. Федотова. — Эл. изд. — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 573 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
6. Математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.Б. Карбачинская [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М.: РГУП, 2015. — 342 с. — 978-5-93916-481-8. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.htm
7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва: Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с. : ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5 : 335-00.

Практическая работа № 10. Разложениефункций в ряд Тейлора, Маклорена.

Цель работы: закрепить умение раскладывать функции в числовой ряд Тейлора, Маклорена.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с заданиями практической работы № 10.

Задания для самостоятельного решения:

1. Разложить в ряд Тейлора:

1.1 функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{4}$. 1.2 функцию $\cos x$ по степеням $x+\frac{\pi}{3}$.

1.3 функцию $\sin x$ по степеням $x-\frac{\pi}{6}$. 1.4 функцию $\cos x$ по степеням $x-\frac{\pi}{2}$.

2. Разложить в ряд Маклорена:

2.1 функцию $\sin 3x$ 2.2 функцию e^{3x}. 2.3 функцию e^{-2x}. 2.4 функцию $\cos\frac{x}{2}$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе:
Разложение функций в степенные ряды.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ называется степенной ряд вида $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + ...$ (3)

Если $a = 0$, то получим частный случай ряда Тейлора

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n + ...,(4)$ которой называется **рядом Маклорена**.

Для разложения функции $f(x)$ **в ряд Маклорена необходимо**:

1) вычислить значения функции и её последовательных производных в точке $x = 0$,
т.е. , $f(0) f'(0), f''(0),..., f^{(n)}(0);$

2)составить ряд Маклорена, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (4);

3) найти промежуток сходимости полученного ряда по формуле (2).

Для разложения функции в ряд Тейлора необходимо:

1)вычислить значения функции и её последовательных производных в точке *x = a,* т.е. , $f(a) f'(a), f''(a),..., f^{(n)}(a);$

2)составить ряд Тейлора, подставив значения функции и её последовательных производных в формулу (3).

3)найти промежуток сходимости по формуле (2).

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию степенной ряд.
2. Описать метод представления функций в степенные ряды с помощью ряда Маклорена и Тейлора.
3. Найдите формулу общего члена ряда: $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + ...$

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.:

ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики.

Тема 3.1. Вероятность случайного события. Теоремы сложения и умножения

Практическая работа № 11. Элементы комбинаторики.

Цель работы: разобрать основные понятия комбинаторики.

Оснащение: плакаты с теоретическими сведениями, дидактические карточки с практической работой № 11.

Задания для самостоятельного решения:

1. Составить различные комбинации чисел из данных цифр.

1.1. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 4,7,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.2. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 5,8,9. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.3. Двузначное число составляют из цифр 0,1, 2,3,8. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

1.4. Двузначное число составляют из цифр 0,2, 3,6,7. а) Сколько всего чисел можно составить? б) Сколько можно составить четных чисел? в) Сколько можно составить нечетных чисел?

2. Записать формулу.

2.1. Написать формулу числа перестановок из 5 элементов. Сосчитать их количество.

2.2. Написать формулу числа перестановок из 4 элементов. Сосчитать их количество.

2.3. Написать формулу числа перестановок из 9 элементов. Сосчитать их количество.

2.4. Написать формулу числа перестановок из 7элементов. Сосчитать их количество.

3. Решить задачу, используя понятие перестановок.

3.1. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 7-ми уроков?

3.2. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 5-ти уроков?

3.3. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 6-ти уроков?

3.4. Сколько можно составить различных вариантов расписания уроков на один день из 8-ми уроков?

4. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

4.1. В классе 18 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.2. В классе 17 юношей и 15 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек г) всех учащихся?

4.3. В классе 10 юношей и 16 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

4.4. В классе 13 юношей и 17 девушек, которых надо рассадить за парты по 2 человека. Сколькими способами можно посадить за парты: а) юношей; б) девушек; в) юношей и девушек; г) всех учащихся?

5. Решить задачу, используя понятие перестановок, размещений, сочетаний.

5.1. В классе 25 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.2. В классе 28 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.3. В классе 36 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

5.4. В классе 27 учеников, из которых надо выбрать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если: а) первый доказывает теорему, а второй решает задачу; б) оба выполняют рисунок.

6. Вычислить, используя формулы размещения и сочетания.

6.1. Вычислить: а) A_8^2; б) C_6^2.

6.2. Вычислить: а) A_{10}^2; б) C_8^2.

6.3. Вычислить: а) A_6^2; б) C_{10}^2.

6.4. Вычислить: а) A_8^4; б) C_{12}^3.

7. Решить уравнение.

7.1. $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$

7.2. $20A_{n-2}^3 = A_n^5$

7.3. $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$

7.4. $A_n^4 = 5A_{n-2}^3$

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Понятие соединения. **2.** Понятие размещения, формула размещения. **3.** Понятие перестановки, формула перестановки. **4.** Понятие сочетания, формула сочетания.

Справочный материал:

Группы, составленные из каких-либо элементов, называются соединениями. Различают три основных вида соединений: размещения, перестановки и сочетания. Задачи, в которых производится подсчет возможных различных соединений, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики, занимающийся их решениями – комбинаторика.

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называется **перестановками.** Обозначение: P_n , n - число элементов, входящих в перестановку. Формула: $P_n = n!$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Комбинация из m элементов по n элементам, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называется **размещениями.** Обозначение: A_m^n - m- число всех имеющихся элементов, n- число элементов в каждой комбинации.

Формула: $A_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!}$

Сочетаниями называется все возможные комбинации из m элементов по n , которые отличаются друг от друга, по крайней мере, хотя бы одним элементом. $(m \in \mathrm{N}, n \in \mathrm{N}, \quad n \leq m \quad)$ Обозначение: C_m^n. Формула: $C_m^n = \dfrac{m!}{(m-n)!n!}$

Основное свойство числа сочетаний: $C_m^n = C_m^{m-n}$ (позволяет упростить нахождение числа сочетаний из m элементов по n , когда n превосходит $\frac{1}{2}m$).

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

4. Дать определение понятию комбинаторика. Запишите формулы для нахождения перестановки, размещения, сочетания. Установите различия основных понятий комбинаторики : перестановка, размещение, сочетание.
5. Объясните, в чем состоит комбинаторное правило умножения, используемое для подсчета числа возможных вариантов.
6. Проверьте равенство: $C_n^6 = \dfrac{A_6^{n-6}}{P_{n-6}}$.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и

среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.
3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Практическая работа №12. Решение задач на определение вероятности с использованием теорем сложения и умножения вероятностей.

Цель работы: научиться применять теоремы сложения и умножения для нахождения полной вероятности наступившего события.

Оснащение: Микрокалькулятор; дидактические карточки с заданиями практической работы № 12.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить задачу на классическое определение вероятности случайного события.

1.1. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть ровно 1 проигрышный билет.

1.2. В коробке 8 белых и 7 черных шаров. Вы случайно вытаскиваете одновременно 4 шара. Найдите вероятность того, что имеется 3 белых шара.

1.3. В ящике в случайном порядке разложено двадцать деталей, причем пять из них стандартные. Рабочий берет наудачу три детали. Найти вероятность того, что, по крайней мере, одна из этих деталей окажется стандартной.

1.4. На полке стоит 12 книг, из которых 4 – это учебники. С полки наугад снимают 6 книг. Какова вероятность того, что 3 из них окажутся учебниками?

2. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей несовместных событий.

2.1. В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Найдите вероятность того, что вынутый шар окажется черным или красным.

2.2. Из колоды в 36 карт случайным образом одновременно вытаскивают 2 карты. Найдите вероятность того, что одна из них пиковой, а другая трефовой масти.

2.3. Карточка «Спортлото» содержит 49 чисел. В итоге тиража выиграют какие-то 6 чисел. Какова вероятность того, что на карточке вы, верно, угадали 4 или 5 чисел?

2.4. В ящике 5 выигрышных билетов и 4 проигрышных. Вы случайно вытаскиваете одновременно 3 билета. Найдите вероятность того, что есть хотя бы один выигрышный билет.

3. Решить задачу, применив теорему сложения вероятностей совместных событий.

3.1. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 5, либо тому и другому одновременно.
3.2. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 5, либо 6, либо тому и другому одновременно.
3.3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 4, либо 7, либо тому и другому одновременно.
3.4. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 7, либо 8, либо тому и другому одновременно.

4. Решить задачу, применив теорему умножения вероятностей независимых событий.

4.1. Электрическая схема состоит из пяти последовательно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,5; 0,8; 0,1; 0,2. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.
4.2. Электрическая схема состоит из трех параллельно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,7; 0,85. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.
4.3. Вероятность остановки за смену одного станка, работающего в цехе, равна 0,15, а другого – 0,16. Какова вероятность того, что оба станка за смену не остановятся?
4.4. В одном мешке находится 3 красных шара и 2 синих, в другом мешке - 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

5. Решить задачу, применив формулу полной вероятности.

5.1. С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей, со второго – 30% , а с третьего – 30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.
5.2. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех – 0,5 и для остальных – 0,3. Какова вероятность поражения цели?
5.3. На двух автоматах производятся одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата втрое больше производительности второго. Первый автомат в среднем производит 80% деталей первого сорта, второй – 90% . Взятая наудачу с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найдите вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.
5.4. В ящике сложены детали: 16 деталей с первого участка, 24 – со второго и 20 – с третьего. Вероятность того, что деталь, изготовленная на втором участке, отличного качества, равна 0,6, а для деталей, изготовленных на первом и третьем участках, вероятности равны 0,8 . Найдите вероятность того, что наудачу извлеченная деталь окажется отличного качества.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Определение вероятности наступления события. **2.**Теорема сложения вероятностей. **3.**Условная вероятность. **4.**Независимость событий. Теорема умножения событий. **5.**Формула полной вероятности.

Справочный материал.

Испытание - всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий. Результат действия или наблюдения - **случайное событие**. **Искомое событие** (или искомый исход) - определенное событие из всех возможных. **Равновозможные события** - все события, которые имеют равные возможности произойти. Обозначения событий - A, B, C. События называются **несовместными**, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте вместе. В противном случае - **события совместные. Достоверные события** - события, происходящие в данном испытании обязательно. Обозначение - U .

Событие называется **невозможным**, если оно в данном опыте не может произойти. Обозначение - V. **Полной системой событий** A_1, A_2, …, A_N называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании. Если полная система состоит из двух несовместимых событий, то такие события называются **противоположными** и обозначаются A и $\overline{A}$.

1. Относительная частота. A - случайное событие, N- число одинаковых испытаний,M - число испытаний, в котором событие A произошло. $\frac{M}{N}$ - частота наступления события A в данной последовательности испытаний.

2.Вероятность события. Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется **вероятностью** этого события и обозначается символом P(A).

Вероятность события A равна отношению числа m исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$

Свойства: 1) Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы. 2) Вероятность достоверного события равна единице, так как $\frac{n}{n} = 1$

3)Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку $\frac{0}{n} = 0$.

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них. A+ B или A $\cup B$ $\bigcup_{\kappa=1}^{n} A_\kappa$ - сумма n- событий.

Т- 1 (теорема сложения вероятностей несовместных событий) Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий: $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Следствие 1: Если *A, B, …M* - образуют полную систему, то сумма вероятностей будет равна 1.

Следствие 2: $P(A)+P(\overline{A})=1$, $\overline{A}$ - противоположное событие событию A.

Опр. 2 Произведением конечного числа событий называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет, $A\cap B$, AB, $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ - произведение n -событий.

Событие *A* называется **независимым** от события *B*, если наступление события *B* не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события *A*.

Т- 2 (теорема умножения вероятностей независимых событий) Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий. $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$.

Т-3 (теорема сложения вероятностей совместных событий): Если *A* и *B* - совместные события, то $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления.

A* и *B - случайные события одного и того же испытания. **Условной вероятностью** события *A* или вероятностью события *A* при условии, что наступит событие *B*, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$. $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ - Условная вероятность.

Т- 4 (теорема умножения вероятностей зависимых событий) Вероятность совместного наступления двух событий равна вероятности одного из них, умноженной на условную вероятность другого, при условии, что первое событие наступило: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B)$.

Формула полной вероятности.

$H_1, H_2, \ldots H_n$ - гипотезы. $P(A)=P\left(\frac{A}{H_1}\right)\cdot P(H_1)+P\left(\frac{A}{H_2}\right)\cdot P(H_2)\cdot\ldots\cdot P\left(\frac{A}{H_N}\right)\cdot P(H_N)$

Вероятность события А равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию случайное событие, совместное и несовместное событие, испытание, равновозможное событие, противоположные события. Проиллюстрируйте все определения на примерах.
2. Сформулируйте операции над событиями: сумма, произведение, разность событий. Проиллюстрируйте все определения с помощью диаграмм Эйлера-Венна.
3. Дать определение понятию вероятность события. Дать классическое определение вероятности. Перечислить свойства вероятности. Дать определение частота наступления события (использовать примеры).

4. Сформулировать теоремы сложения вероятностей и их следствия.
5. Дать определение зависимого и независимого событий. Дать определение условной вероятности. Сформулировать теоремы умножения вероятностей: вероятность появления двух независимых событий, вероятность появления двух зависимых событий.
6. Дать определение полной группы событий. Объяснить формулу полной вероятности. Воспроизвести формулу Байеса.
7. Пусть событие С состоит в наступлении одного из двух несовместных событий А и В. Как найти в этом случае вероятность события С?

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.

2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Тема 3.2. Элементы математической статистики.

Практическая работа №13. Определение числовых характеристик случайных величин.

Цель работы: закрепить навыки нахождения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения дискретной случайной величины

Оснащение: теоретические таблицы по теме с примерами, дидактические карточки с заданиями практической работы № 13.

Задания для самостоятельного решения:

1. Решить задачу, используя схему Бернулли.

1.1. Радиолокационная станция ведет наблюдение за шестью объектами в течение некоторого времени. Контакт с каждым из них может быть потерян с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что хотя бы с тремя объектами контакт будет поддерживаться в течение всего времени.

1.2. Известно, что при прохождении некоторого пролива при плохих метеоусловиях терпит аварию каждое двадцатое судно. Найти вероятность того, что из восьми вошедших в шторм в этот пролив судов хотя бы три выйдут их него неповрежденными.

1.3. Караван из 4 судов пересекает минное поле, вероятность подрыва для каждого из судов считается равной 0,1. Найти вероятность того, что не менее половины судов уцелеет.

1.4. Центр наблюдения поддерживает связь с шестью самолетами, выполняющими учебное задание при условии создания противником активных помех. Связь после ее нарушения не восстанавливается. Вероятность потери связи за период выполнения задания 0,2. Найти вероятность того, что в момент окончания задания центр потеряет связь не более чем с третью самолетов.

2. По таблице распределения случайной величины X, найдите математическое ожидание данной величины.

2.1

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,07	0,1	0,13	0,18	0,04	0,14	0,19	0,12	0,03

2.2.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
P	0,02	0,03	0,1	0,15	0,4	0,15	0,1	0,03	0,02

2.3

X	-10	-6	-2	1	3	5	8	10
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

2.4.

X	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. Найти дисперсию случайной величины X, зная закон ее распределения.

3.1.

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

3.2.

X	-1	1	2	3
P	0,48	0,01	0,09	0,42

3.3.

X	-1	1	2	3
P	0,19	0,51	0,25	0,05

3.4

X	-3	3	5	7
P	0,09	0,51	0, 1	0, 3

4. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной в первой задаче.

5. Решить задачу.

5.1. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных: 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 10 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.
5.2. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,25.
5.3. В лотерее имеется 100 билетов, из них выигрышных: 5 по 500 руб., 20 по 50 руб., 30 по 10 руб., 45 по 1 руб. Найти математическое ожидание выигрыша на один билет.
5.4. У охотника 6 патронов. Он стреляет по волку, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Найдите математическое ожидание количества выстрелов, если вероятность попадания 0,3.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Формула Бернулли. **2.** Случайная величина. Закон распределения случайной величины. **3.** Биноминальное распределение случайной величины. **4.** Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Справочный материал: Схема Бернулли: Рассматривают независимые повторения одного того же испытания с двумя возможными исходами, которые условно называются «успех» и «неудача». Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что при n таких повторениях произойдет ровно k «успехов».

Теорема Бернулли: Вероятность $P_n(k)$ наступления ровно k успехов в n независимых повторениях одного и того же испытания находится по формуле $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,
где p - вероятность «успеха», $q = 1 - p$ - вероятность «неудачи» в отдельном испытании.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. **Обозначения:** Случайные величины X; Y; Z…, их значения - строчными соответствующими буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные величины.

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: x_1, x_2,… Значение x_k принимается с некоторой вероятностью $p_k = P(X = x_k) > 0$. При этом $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

Соответствие, которое каждому значению x_k дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность p_k, называется **законом распределения** случайной величины X.

значения x i	1	2	…	n

Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

вероятность p i	1	2		n

События X = x i (I = 1, 2, 3, …,*n*) являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна 1.

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие их вероятности. Соединение полученных точек образует ломаную, называемую **многоугольником или полигоном** распределения вероятностей.

Биноминальное распределение. Пусть производится определенное число *n* независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие *p.*

Случайная величина X представляет собой число наступлений событий A в *n* опытах.

Закон ее распределения имеет вид:

значения x i	0	1	2	…	n
вероятность p i	P(An,0)	P(An,1)	P(An,2)	…	P(An,n)

где $P(A_{n,n})$ вычисляется по формуле Бернулли. **Закон распределения**, который характеризуется такой таблицей, называется **биноминальным.**

Числа в вероятности отражают размер отклонения случайной величины - эти числа называются **числовыми характеристиками случайной величины.**

Математическое ожидание характеризует положение случайной величины на числовой оси, определяя некоторое среднее значение, около которого сосредоточены все возможные значения случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X равно сумме произведений всех возможных ее значений на соответствующие вероятности $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Свойства математического ожидания. 1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$ 2. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой этой величине: $M(C) = C$ 3. Математическое ожидание алгебраической суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$. 4. Математическое ожидание произведения конечного числа независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$. 5. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины: $M(X \pm C) = M(X) \pm C$. 6. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю: $M\left[X - M(X)\right] = 0$.

Если случайная величина принимает счетное число значений, то говорят, что математическое ожидание существует, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} | x_k | p_k$ сходится, при расходимости ряда говорят, что математического ожидания не существует.

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания: $\mathrm{D(X) = M(X - M(X))^2}$.

Для дискретных случайных величин эту формулу можно записать в виде: $D(X) = \sum \left[x_i - M(X)\right]^2 \cdot p_i$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Свойства дисперсии. 1.Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C) = 0$. 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат: $D(C \cdot X) = C^2 D(X)$, $D(X + C) = D(X)$. 3. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания: $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$. 4. Дисперсия алгебраической суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их дисперсий: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Среднее квадратичное отклонение является одной из характеристик рассеяния возможных значений случайной величины вокруг ее математического ожидания. В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины Х – числа наступления события А в *n* независимых опытах, в каждом из которых событие А может произойти с одной и той же вероятностью *p*. Случайная величина Х принимает целочисленные значения *m*= 0, 1, …, *n* с вероятностями $P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины Х, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам $E(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$, где q =1- p.

Функция распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле: $F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию независимых испытаний относительно события. Охарактеризовать схему Бернулли. Записать теорему Бернулли.

2. Дать определение понятию случайная величина и перечислить её числовые характеристики. Дать определение понятиям дискретные и непрерывные случайные величины.
3. Дать определение понятию распределение случайной величины. Сформулировать закон распределения дискретной случайной величины. Сравнить закон распределения дискретной случайной величины с биноминальным законом распределения.
4. Дать определение понятию математическое ожидание случайной величины. Перечислить свойства математического ожидания.
5. Дать определение понятиям: дисперсия дискретной случайной величины, отклонение случайной величины от её математического ожидания. Записать формулы для нахождения дисперсии дискретной случайной величины. Объяснить свойства дисперсии.
6. Дать определение понятию среднее квадратичное отклонение. Записать формулу для нахождения среднего квадратичного отклонения. Рассказать в чем заключается закон больших чисел.
7. Имеется 4 лампочки, каждая из них с вероятностью 0,1имеет дефект. Лампочка ввинчивается в патрон, и включается ток. При включении тока дефектная лампочка сразу же перегорает, после чего заменяется другой. В противном случае испытания прекращаются. Найдите математическое ожидание числа испробованных лампочек.
8. Устройство состоит из 4 элементов. Вероятность отказа любого элемента за время опыта равна 0,2. Найдите математическое ожидание числа опытов, в каждом из которых откажет ровно один элемент, если всего произведено 100 независимых опытов.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.
3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Раздел 4. Основные численные методы.

Тема 4.1. Численное интегрирование

Практическая работа №14. Вычисление интегралов по формулам прямоугольников, трапеций и формуле Симпсона. Оценка погрешности.

Цель работы: закрепить навыки нахождения приближенного значения определенного интеграла различными способами.

Оснащение: дидактические карточки с заданиями практической работы №14, теоретические таблицы по теме с примерами.

Задания для самостоятельного решения:

1.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_1^2 \frac{1}{2+x}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на 8 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

2.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

3.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

4.1. Вычислить способами прямоугольников, трапеций и Симпсона $\int_0^2 \sqrt{x+5}dx$, вычисления вести с пятью десятичными знаками. Отрезок интегрирования делить на10 частей. Сравнив результаты, установите относительную погрешность, оцените абсолютную погрешность.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1. Определенный интеграл. **2.** Таблица интегралов. **3.** Способы вычисления приближенного значения интеграла: способ прямоугольников, трапеций и Симпсона (формула парабол).**4.** Оценка погрешности.

Справочный материал: метод прямоугольников.

Как и при рассмотрении интегральной суммы, разобьем отрезок [*а; в*] на *n* равных частей и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат. Заменим дугу АВ кривой $y = f(x)$ ступенчатой линией. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$S_{защтр.} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + ... + f(x_{n-1})\Delta x = \Delta x \cdot (f(x_0) + f(x_1) + .. + f(x_{n-1}))$

Учитывая, что отрезок разделен на n рвных частей, получим:

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} \Rightarrow S_1 = \dfrac{b-a}{n} \cdot (f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) - по\ недостатку, (рис.1)$. *Если прямоугольники провести выше дуги, то площадь будет находится по формуле:*

$S_2 = \dfrac{b-a}{n} \cdot (f(x_1) + ... + f(x_n)) - по\ избытку\ (рис.2),$

$$т.е. S_1 \prec \int_a^b f(x)dx \prec S_2 - формула\ прямоугольников$$

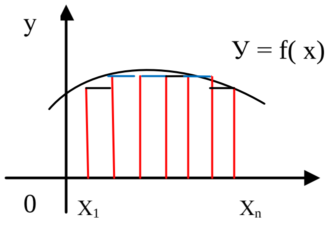


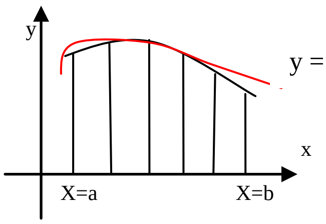
Рис.1

Предельная абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$R_n \leq \dfrac{\Delta x}{2} \cdot (b-a) \cdot M_1$, где $M_1 = \max\limits_{[a;b]} |f'(x)|$.

Метод трапеций. Этот метод приближенного интегрирования обычно дает более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников. Дугу АВ кривой *y = f(x)* заменяют ломаной линией, вписанной в эту дугу. Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (прямоугольных) трапеций:

$$S_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \Delta x .... В\ итоге \quad \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... y_{n-1} \right) + R_n$$



Погрешность Δ от применения формулы трапеций оценивается по формуле: $R_n \leq \dfrac{(\Delta x)^2}{12} \cdot (b-a) \cdot M_2$

где M_2 – максимальное значение модуля второй производной функции $y = f(x)$ на отрезке [а;в], т.е. $M_2 = \max\limits_{x \in [a;b]} |f''(x)|$.

Метод парабол. Прежде чем формулировать этот метод, запишем две леммы.

Лемма 1.1. *Через любые три точки M_1 $(x_1;\ y_1)$, M_2 $(x_2;\ y_2)$, M_3 $(x_3;\ y_3)$ с различными абсциссами можно провести единственную кривую вида* $y = Ax^2+Bx+C$ (1)

Лемма 1.2. *Площадь s криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=Ax^2+Bx+C$, проходящей через точки M_1 $(-h;\ y_1)$, M_2 $(0,\ y_2)$, M_3 $(h,\ y_3)$ выражается формулой*

$$s = \frac{h}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \qquad (2)$$

Сущность заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси OY.

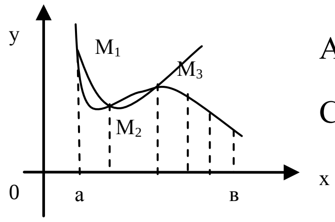
$\int_a^b f(x)dx \approx \dfrac{b-a}{3n}(y_0 + y_n + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{n-1}))$ Если отрезок интегрирования делится на четное число равных частей, мы запишем формулу Симпсона иначе:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + ... + y_{2n-2})\right]$$

или, если $\sum_1 = y_0 + y_{2n}$; $\sum_2 = y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{2n-1}$, $\sum_3 = y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}$, то

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\left(\sum_1 + 4\cdot\sum_2 + 2\cdot\sum_3\right) + R_n$$

В формуле параболы значение функции f(x) в нечетных точках разбиения x_1, x_3, ..., x_{2n-1} имеет коэффициент 4, в четных точках x_2, x_4, ..., x_{2n-2} - коэффициент 2 и в двух граничных точках x_0=a, x_1, x_{2n} =b - коэффициент 1.



Абсолютное значение остаточного члена общей формулы Симпсона равно: $R_n \le \frac{\Delta x^4}{180}\cdot(b-a)\cdot M_3$, где $M_3 = \max\limits_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

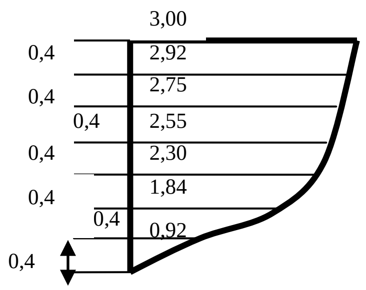
В ряде случаев отыскание четвертой производной подынтегральной функции оказывается затруднительно. В этом случае для оценки погрешности вычисления интеграла по формуле Симпсона при выбранном шаге разбиения, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, если $n = 4k$, применяют специальный прием, называемый методом удвоения шага вычислений. Вычисляется приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона, в которой принять $\Delta x = \frac{b-a}{4k}$.. Назовем найденное значение интеграла I_1. Далее шаг Δx удваивается, и вычисление по формуле Симпсона проводится для шага $\Delta x = \frac{b-a}{2k}$, вновь найденное значение интеграла обозначается I_2. Погрешность второго вычисления приблизительно в 16 раз больше погрешности первого, и обе погрешности имеют одинаковый знак. Поэтому погрешность первого вычисления можно приблизительно определить по формуле: $\delta I_1 = \frac{I_1 - I_2}{15}$. Такой способ называют оценкой погрешности формулы Симпсона по методу удвоения шага вычислений.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дать определение понятию численное интегрирование.
2. Запишите формулу прямоугольников для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
3. Запишите формулу трапеций для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?
4. Запишите формулу парабол для нахождения приближенного значения определенного интеграла. Как оценить абсолютную погрешность вычислений?

5.



Вычислить площадь поперечного сечения судна по данным рисунка, используя приближенные методы вычисления определенного интеграла (или формулу прямоугольников или трапеций или парабол)

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.
3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

Тема 4.2. Численное дифференцирование.

Практическая работа №15. Численное дифференцирование функций с использованием интерполяционных формул Ньютона.

Цель работы: изучить интерполяционные формулы Ньютона; составлять таблицу конечных разностей.

Оснащение: дидактические карточки с заданиями практической работы № 15, теоретические таблицы по теме с примерами.

Задания для самостоятельного решения:

Задание 1. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

1.1.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	9	15	23

1.2.

x	1	2	3	4	5
y	0	5	12	21	12

1.3.

1.4.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	8	14	22

x	1	2	3	4	5
y	3	6	12	21	33

Задание 2. Известны значения некоторой функции f(x) в отдельных точках. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, вычислите f(2,3):

2.1. f(1) =1,00; f(2) = 0,25; f(3) = 0,11; f(4) = 0,06; f(5) = 0,04; f(6) = 0,03; f(7) = 0,02

2.2. f(1) = 2,00; f(2) = 0,50; f(3) = 0,22; f(4) = 0,125; f(5) = 0,08; f(6) = 0,06; f(7) = 0,04

2.3. f(1)=7,5; f(2) = 2; f(3) = -3,5; f(4) = -6; f(5) = -2.5; f(6) = 10; f(7) = 34,5

2.4. f(1) = -3,9; f(2) = -0,2; f(3) = 6,7; f(4) = 17,4; f(5) = 32,5; f(6) = 52,6; f(7) = 78,3

Задание 3.

3.1. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0	0,095	0,182	0,262	0,336	0,405	0,470

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.2. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0,693	0,788	0,875	0,956	1,030	1,099	1,163

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.3. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	1,2661	1,3262	1,3937	1,4693	1,5534	1,6467	1,75

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

3.4. Некоторая функция f(x) задана таблицей.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	1,8640	1,9896	2,1277	2,2796	2,4463	2,6291	2,8296

Вычислите первую производную $f'(x)$ и вторую производную $f''(x)$ данной функции в точке x=1,22.

Порядок выполнения задания: Рассмотрите теоретические вопросы для выполнения практической работы. Перед началом выполнения работы, изучите указанный в списке литературы материал учебников, особое внимание обратите на образцы решенных заданий. Выполните задания, Вашего варианта в рабочей тетради. Тетрадь с решениями представьте на проверку преподавателю. По итогам работы необходимо ответить на контрольные вопросы и сделать общий вывод по проделанной работе.

Вопросы теории, рассматриваемые в практической работе: 1.Понятие интерполяции, интерполирования. **2.** Способы интерполяции. Интерполяционная формула Ньютона. **3.**Численное дифференцирование.

Справочный материал: метод прямоугольников.

1. Интерполяция, интерполирование — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному (независимому, табличному, свободному) набору известных значений.

Рассмотрим систему несовпадающих точек $x_i, i = 1,2,...,n$ из некоторой области D. Пусть значения функции $f(x)$ известны только в этих точках: $y_i = f(x_i), i = 1,2,3,...n$.

Задача интерполяции состоит в поиске такой функции F(x) из заданного класса функций, что $F(x_i) = y_i, i = 1,2,3,...n$

Точки x_i называют узлами интерполяции, а их совокупность - интерполяционной сеткой.
Пары $(x_i;y_i)$ называют точками данных или базовыми точками.
Разность между «соседними» значениями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - шагом интерполяционной сетки.
Он может быть как переменным, так и постоянным.
Функцию F(x) - интерполирующей функцией или интерполянтом.

К настоящему времени существует множество различных способов интерполяции. Выбор наиболее подходящего алгоритма зависит от ответов на вопросы: как точен выбираемый метод, каковы затраты на его использование, насколько гладкой является интерполяционная функция, какого количества точек данных она требует и т. п.

2. Способы интерполяции. Интерполяционная формула Ньютона.

Пусть $y_0, y_1, y_2,...$- значения некоторой функции $y = f(x)$, соответствующие равноотстоящим значениям аргумента $x_0, x_1, x_2,...$, т.е. $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k = const$. Введем обозначения: $y_1 - y_0 = \Delta y_0, y_2 - y_1 = \Delta y_1,..., y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$- разности первого порядка данной функции; $\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0, \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,...$- разности второго порядка данной функции; $\dots\dots\dots \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0 = \Delta^{n+1} y_0, \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1 = \Delta^{n+1} y_1,...$- разности (n+1)-го порядка данной функции. Запишем таблицу разностей:

x	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Если считать n – не только целое и положительное число, а может быть любым ($n = t$), то интерполяционная формула Ньютона выглядит так:

$$y_t = y_0 + \frac{t}{1!}\cdot\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 + \ldots + \Delta^t y_0 \quad (1) -$$

интерполяционная ф-ла Ньютона.

Мы получили такую функцию от t, которая при t=0 обращается в y_0, при t=1 обращается в y_1, при t=2 в y_2 и т.д. Так как каждое последующее значение x при постоянном шаге h определяется равенством $x_n = x_0 + nh$, то $n = \frac{x_n - x_0}{h}$. Тогда полагая $x = x_0 + th$, т.е. $t = \frac{x - x_0}{h}$, приведем формулу(1)к виду

$$y_n = y_0 + \frac{x - x_0}{h}\cdot\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{2!h^2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{3!h^3}\cdot\Delta^3 y_0 + \ldots \qquad (2)$$

3.Численное дифференцирование. Вычисление производных заданных функций проводится обычно по хорошо известным правилам и формулам дифференцирования. При этом получается аналитическое выражение для производной функции. Подстановка в полученное выражение любого аргумента, принадлежащего области допустимых значений, позволяет вычислить искомое значение производной функции. Если же функции заданы таблично, алгоритмически или очень сложной формулой с использованием специальных функций, то, как правило, прибегают к численному дифференцированию. Целью численного дифференцирования является расчет значения производной $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в определенной точке x.

Дифференцируя полином (1) по переменной x, получим $f'(x)$, при повторной процедуре - $f''(x)$ и т.д.

$$f'(x) \approx \left[\begin{array}{l} \Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\cdot\Delta^4 y_0 + \\ + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{120}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right] / h \quad (3)$$

первый интерполяционный полином Ньютона;

$$f''(x) \approx \left[\Delta^2 y_0 + (t-1)\cdot\Delta^3 y_0 + \frac{6t^2-18t+11t}{12}\cdot\Delta^4 y_0 + \frac{2t^3-12t^2+21t-10}{12}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots\right] / h^2 \text{ -(4)}$$

второй интерполяционный полином Ньютона;

Если требуется вычислить значение первой или второй, производной в каком – либо узле таблицы, то достаточно положить t=0 и из формул (3) и (4) получим следующие полезные формулы:

$$f'(x) \approx \left[\Delta y_0 - \frac{1}{2}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\cdot\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\cdot\Delta^4 y_0 + \frac{1}{5}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots\right] / h \quad \text{- (5) и}$$

$$f''(x) \approx \left[\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\cdot\Delta^4 y_0 - \frac{5}{6}\cdot\Delta^5 y_0 + \ldots\ldots\ldots\right] / h^2 \text{ - (6).}$$

Погрешность всех формул определяется абсолютной величиной первого из отбрасываемых членов.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля:

1. Сформулировать необходимость приближенного дифференцирования. Дать определение понятиям: интерполирование, узлы интерполяции, интерполяционная сетка, базовые точки, шаг.
2. Объяснить, как составляется таблица конечных разностей полинома. Записать интерполяционную формулу Ньютона.
3. Объяснить понятие численное дифференцирование. Записать формулы для нахождения производных первого и второго порядка.
4. 4.Зная квадраты чисел 5,6,7,8, найдите квадрат числа 6,25, используя формулы Ньютона, и проверьте результат с помощью калькулятора.

Рекомендуемая литература:

1. Башмаков, М. И. Математика : учебник для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 5-е изд., испр. - Москва : Академия, 2012. - 251 с. : ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9121-1 : 290-40.
2. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.
3. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.