МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «МГТУ»)
«ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

УТВЕРЖДАЮ
Начальник ММРК им. И.И. Месяцева
ФГБОУ ВО «МГТУ»
____________________ И.В. Артеменко
(подпись)
«31» августа 2019 г

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ОБУЧАЮЩИХСЯ

учебной дисциплины ЕН.01 Математика
программы подготовки специалистов среднего звена (ППССЗ)
специальности 26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок
по программе базовой подготовки
форма обучения: очная, заочная

Мурманск
2019

Рассмотрено и одобрено на заседании

Методическим объединением преподавателей дисциплин математического и общего естественнонаучного цикла по специальностям, реализуемым ММРК имени И.И. Месяцева, и дисциплин профессионального цикла специальности 09.02.03 Программирование в компьютерных системах

Разработано

на основе ФГОС СПО 26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014г. № 443.

Председатель МК

Е.А. Чекашова

Протокол от 29 мая 2019 г.

Автор (составитель): Голованова А.В.., преподаватель, «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Эксперт (рецензент) Банникова Д.В., преподаватель «ММРК имени И.И. Месяцева» ФГБОУ ВО «МГТУ»

Ф. , ученая степень, звание, должность, квалиф. категория

Лист ознакомления

Должность	**Ф.**	**Дата, подпись**

Учет экземпляров

Контрольный экземпляр

Держатель контрольного экземпляра	№ экз.
Учебно-методическое управление	01

Учетные экземпляры

Место хранения экземпляров	№ экз.

Учет корректуры

№	Файл и страницы	Пересмотр	Дата внесения	Лицо, утвердившее корректуру

Содержание

Введение

1.1. Методические указания по самостоятельной работе обучающихся по учебной дисциплины «Математика» разработаны в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 26.02.05 Эксплуатация судовых энергетических установок базовой подготовки, утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 07 мая 2014г. № 443.

1.2 Цели и задачи самостоятельной работы –

Целью самостоятельной работы студентов является:

– обеспечение профессиональной подготовки выпускника в соответствии с ФГОС СПО;

– формирование и развитие общих компетенций, определённых в ФГОС СПО;

– формирование и развитие профессиональных компетенций, соответствующих основным видам профессиональной деятельности.

Задачами, реализуемыми в ходе проведения внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся, в образовательной среде колледжа являются:

– систематизация, закрепление, углубление и расширение полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

– развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирование самостоятельности мышления: способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– овладение практическими навыками применения информационно-коммуникационных технологий в профессиональной деятельности;

– развитие исследовательских умений.

1.3 Требования к результатам освоения:

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен

уметь:

У1 - решать простые дифференциальные уравнения,

У2 - применять основные численные методы для решения прикладных задач;

знать:

З1 – основные понятия и методы математического анализа,

З2 - основы теории вероятностей и математической статистики,

З3 - основы теории дифференциальных уравнений.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование компетенций в соответствии с ФГОС СПО (табл. 1).

Таблица 1 - Компетенции, формируемые дисциплиной «Математика» в соответствии с ФГОС СПО

Код компетенции	**Содержание компетенции**	**Требования к знаниям, умениям, практическому опыту**
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 2.	Организовывать собственную	У 1,У2, З1, З2,З3

	деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество	
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 6.	Работать в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 7.	Брать ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 8.	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 9.	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.	У 1,У2, З1, З2,З3
ОК 10.	Владеть письменной и устной коммуникацией на государственном и иностранном языке.	У 1,У2, З1, З2,З3
ПК 1.1.	Обеспечивать техническую эксплуатацию главных энергетических установок, вспомогательных механизмов и связанных с ними систем управления.	У 1,У2, З1, З2,З3
ПК 1.3.	Выполнять техническое обслуживание и ремонт судового оборудования.	У 1,У2, З1, З2,З3
ПК 3.2.	Руководить работой структурного подразделения.	У 1,У2, З1, З2,З3
ПК 3.3.	Анализировать процесс и результаты деятельности структурного подразделения.	У 1,У2, З1, З2,З3

2. Тематический план видов самостоятельной работы обучающихся

Наименование разделов и тем	Содержание самостоятельной работы обучающихся	Самостоятельная работа обучающегося, час	Консультации, час
Раздел 2.	**Математический анализ.**		**2**
Тема 2.1.	**Дифференциальное исчисление.**		
	Самостоятельная работа		
	Решение физических задач с применением производной	**2**	
	Функции нескольких переменных. Частные производные функций нескольких переменных.	**2**	
Тема 2.2.	**Интегральное исчисление.**		
	Самостоятельная работа		
	Применение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.	**2**	
Тема 2.3.	**Дифференциальные уравнения**.		
	Самостоятельная работа		
	Применение дифференциальных уравнений.	**2**	
Раздел 3.	**Основы теории вероятностей и математической статистики.**		**2**
	Самостоятельная работа		
	Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики	**2**	
Раздел 4.	**Основные численные методы.**		**2**
	Самостоятельная работа		
	Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.	**2**	
	Всего	**12**	**6**

Порядок выполнения самостоятельной работы обучающихся

Раздел 2. Математический анализ

Тема 2.1. Дифференциальное исчисление

Решение физических задач с применением производной

Цель: Научиться решать задачи физического содержания с применением производной

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные примеры.

Порядок выполнения задания.

1. Необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Решите предложенные задачи:

1. Тело движется вертикально вверх по закону: $S = 40t - \frac{gt^2}{2}$ (путь в метрах, время – в секундах, ускорение свободного падения, принять 10 м/с^2). Найти максимальную высоту подъема данного тела.

2. Докажите, что величина ускорения гармонического колебания $x = 5\sin(2t + 1)$ пропорциональна отклонению x от положения равновесия. Найдите коэффициент пропорциональности

3. Найти модуль силы, действующей на тело массой 300г, в момент времени 1 с, если тело движется прямолинейно и его скорость изменяется по закону $v = \frac{1}{1+t}$, где v – скорость, м/с, t – время в с.

4. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных резисторов. При каком соотношении между сопротивлениями этих резисторов сопротивление цепи минимально, если при последовательном соединении оно равно R Ом?

5. Судно B, находящееся в данный момент на расстоянии 75 км к востоку от судна A, идет на запад со скоростью 12 км в час; судно же A идет на юг со скоростью 4 км в час. Через сколько часов суда будут наиболее близки к друг другу?

Вопросы для изучения:

1. Сформулировать утверждения, полученные Ньютоном И., относительно первой и второй производных.
2. Разобрать предложенные задачи.
3. Решить задачи на данную тему.

Теоретический материал.

1. Скорость и ускорение.

В основе задач, которые решаются в физике с помощью производных (первой и второй), лежат следующие утверждения одного из создателей дифференциального исчисления И.Ньютона.

1. Находя первую производную от функции, мы решаем очень важную физическую задачу, а именно: определяем быстроту изменения функции, т.е. собственно, скорость. Таким образом, по Ньютону: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ есть скорость функции.

Применительно к движению, если $S = f(t)$ или $x = f(t)$ - закон движения тела (точки), который позволяет найти положение тела (точки) или пройденный ими путь для любого момента времени, то их скорость:.

2. Находя вторую производную от функции, мы определяем быстроту изменения её скорости, т.е. ускорение функции. $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = V' = \dfrac{dS}{dt}$ (1)

Применительно к движению, если известен закон движения тела , то $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = V' = \dfrac{dv}{dt}$,

где a – ускорение точки (тела) с учетом (1) имеем: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = S'' = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$.

Итак, по Ньютону: если $S = f(t)$ - закон движения тела, то его скорость (скорость для любого момента времени) $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = V' = \dfrac{dS}{dt}$, $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = S'' = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$.

По существу, Ньютон ответил на вопросы, которые стояли перед механиками два тысячелетия – как рассчитывать скорость и ускорение движущихся тел в любой момент времени. Эти скорость и ускорение называются мгновенными.

2. Рассмотрите задачи.

№ 1. Угол φ поворота шкива в зависимости от времени t задан функцией $\varphi = (2t^2 + 3t + 1)$рад. Найти угловую скорость ω при $t = 4$с.

<u>Решение</u>: Если $\varphi = (t + \Delta t) - \varphi(t)$- угол поворота шкива за промежуток времени, средняя угловая скорость равна: $\varphi' = (2t^2 + 3t + 1)' = 4t + 3$, то $\varphi'(4) = 4 \cdot 4 + 3 = 19$ (рад/с).

№ 2. Тело массой 10 кг движется по закону: $S = \frac{t^3}{3} - 6t$ (путь в метрах, время в секундах). Найти силу, действующую на тело, и его кинетическую энергию через 3 с от начала движения.

Решение: 1) Найдем кинетическую энергию данного тела для любого момента времени: $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Но $V = S' = \left(\frac{t^3}{3} - 6t\right)' = t^2 - 6$. Т.о., $E_k = \frac{m(t^2-6)^2}{2} = \frac{10 \cdot (3^2 - 6)^2}{2} = 45$ (Дж);

2) Силу, действующую на тело в момент времени *t*, найдем по формуле $F = m \cdot a$, где $a = V' = (t^2 - 6)' = 2t$. Т.о., $F = m \cdot 2t$. Значение силы для момента времени 3с будет равна: $F = m \cdot 2t = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$ (Н).

№ 3. Быстрота сигнализации по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}$, где *x* есть отношение радиуса металлической сердцевины кабеля к толщине его изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы быстрота сигнализации была наибольшей?

Решение: В данном случае нам не требуется составлять функцию, которую надлежит исследовать на экстремум. Она задана. Исследуем её на интервале (0; +∞)

$f' = \left(x^2 \cdot \ln\frac{1}{x}\right)' = -x(2\ln x + 1)$. Корнем производной, принадлежащей заданному интервалу, является $x = \frac{1}{\sqrt{e}} = e^{\frac{-1}{2}}$. Если мы проследим поведение производной при переходе через данную точку, то увидим, что она меняет знак с плюса на минус. Значит в этой точке функция принимает максимум. Значит, искомое отношение должно быть равно $e^{\frac{-1}{2}}$.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте: в чем заключается физический смысл производной?
2. Решите задачу: Два источника света расположены в 30 м друг от друга. На прямой, соединяющей их, найти наименее освещенную точку, если силы источников относятся, как 27 : 8.

Рекомендуемая литература.

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

Дополнительная:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Филимонова Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 416 с.
3. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2010

Функции нескольких переменных. Частные производные функций нескольких переменных.

Вопросы для изучения:

1. Функции двух и нескольких переменных, способы задания, символика, область определения. [1] гл. 10 с. 198. , [3] стр.351.
2. Частные производные функции нескольких переменных. [1] гл. 10 с. 205. [3] стр.353.
3. Полный дифференциал. [1] гл. 10 с. 209 [3] стр.355.
4. Частные производные высших порядков. [1] гл. 10 с. 219, 222, [3] стр.357.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение и приведите пример функции нескольких переменных

1. Дайте определение частных производных.

2. Поясните, что такое частный дифференциал функции? Полный дифференциал?

Рекомендуемая литература.

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

Тема 2.2. Интегральное исчисление.

Применение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.

Цель: научиться применять определенный интеграл для решения задач.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

Составить краткий конспект по теме: Применение определенного интеграла для вычисления геометрических и физических величин.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Вычисление длины дуги плоской кривой
2. Вычисление объема тела.
3. Вычисление площади поверхности вращения.
4. Вычисление работы переменной силы
5. Вычисление пути, пройденным телом.
6. Вычисление давления жидкости на вертикальную пластину.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Как вычисляется длины дуги плоской кривой
2. Как вычисляется объем тела.
3. Как вычисляется площадь поверхности вращения.
4. Как вычисляется работа переменной силы
5. Как вычисляется путь, пройденным телом.
6. Как вычисляется сила давления жидкости на вертикальную пластину.

Рекомендуемая литература.

Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

Тема 2.3. Дифференциальные уравнения.
Применение дифференциальных уравнений.

Цель: познакомиться с применением дифференциальных уравнений в науке и технике.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Составить краткий конспект по изученному материалу.
2. Решить предложенные задачи.

Порядок выполнения задания.

2. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
3. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям
2. Дифференциальное уравнение размножения бактерий.
3. Дифференциальное уравнение радиоактивного распада.
4. Уравнение движения точки
5. Движение точки под действием постоянной силы.
6. Движение точки под действием периодической силы.
7. Движение точки под действием силы, пропорциональной скорости
8. Гармонические колебания.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Перечислите примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям
2. Назовите дифференциальные уравнения, описывающие движение точки под действием различных сил.

Рекомендуемая литература.

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.

2. Башмаков, М. И. Математика : задачник : учеб. пособие для нач. и сред. проф. образования / М. И. Башмаков. - 2-е изд., стер. - Москва : Академия, 2013. - 413, [1] с.: ил. - (Начальное и среднее профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины). - ISBN 978-5-7695-9612-4 : 283-80.

3. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. «Высшая школа».2014г.
4. Е.В. Филимонова. Математика для средних специальных учебных заведений. Р.-на-Дону. «Феникс». 2008 г.

Раздел 3. Основы теории вероятностей и математической статистики
Непрерывные случайные величины и их числовые характеристики

Цель: познакомиться с понятием случайной величины, её характеристиками, законами распределения непрерывных случайных величин.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

Изучить понятия случайной величины, её характеристик, законы распределения непрерывных случайных величин.

Порядок выполнения задания.

1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.
3. Выполнить задания [3] стр.337-338 № 49,51,53

Вопросы для изучения:

1. Случайная величина, закон её распределения. [3] Глава 4, §4.2.1 стр. 309.
2. Числовые характеристики случайных величин . [3] Глава 4, §4.2.2 стр. 318.
3. Законы распределения непрерывных случайных величин. [3] Глава 4, §4.2.3. стр. 325.

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Приведите пример какой-нибудь случайной величины.
2. Что называется распределением случайной величины?
3. Какое распределение называется биномиальным?
4. Дайте определение математического ожидания случайной величины.
5. Что называется дисперсией случайной величины?
6. В чем состоит закон больших чисел?
7. Определение непрерывной случайной величины
8. Различие между дискретной и непрерывной случайной величиной
9. Можно ли построить ряд распределения для непрерывной случайной величины.
10. Функция распределения вероятностей и ее свойства.
11. Что называют случайной величиной?
12. Что такое закон распределения случайной величины?
13. Какими численными характеристиками обладает случайная величина?
14. Что такое функция распределения? Какими свойствами она обладает?
15. Что называют многоугольником распределения?

Рекомендуемая литература.

1. Башмаков М.И. Математика: учебник/(начальное и среднее профессиональное образование) М.: Кнорус, 2013. – 400с.
2. Я.С. Бродский, Статистика. Вероятность. Комбинаторика., М. ОНИКС. Мир и образование, 2008, с. 541
3. Омельченко В.П., Кубатова Э.В. Математика: учебное пособие. - Ростов н/Д: Феникс, 2009. – 380 с.

Дополнительная:

1. Кремер. Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2006. – 573с.
2. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч.1 7-е изд., - М.: ООО « Издательство «Мир и Образование», 2009
3. Письменный Д.Т. Конспект по теории вероятностей и математической статистики/Д.Т. Письменный. - .2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 256 с. – (Высшее образование)

Раздел 4 Основные численные методы

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель: познакомиться с формулой Эйлера для решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Оснащение: данные методические указания; рекомендуемая литература.

Задание:

1. Изучить способ Эйлера для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Порядок выполнения задания.

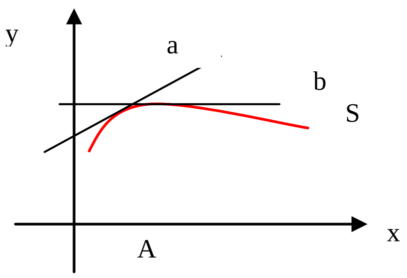
1. На основании литературы, рекомендованной к выполнению самостоятельной работы, необходимо изучить теоретические вопросы по данной теме согласно плану.
2. Составить краткий конспект данного материала.

Вопросы для изучения:

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.
2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Теория

1. Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений первого порядка.



1. Основные понятия.

Линия S, которая задается функцией, являющейся каким- либо решением дифференциального уравнения, называется интегральной кривой уравнения $y' = f(x, y)$.

Производная *y'* является угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой.

В любой точке А(х, у) интегральной кривой этот угловой коэффициент касательной может быть найден еще до решения дифференциального уравнения.

Т.к. касательная указывает направление интегральной кривой еще до ее непосредственного построения, то при условии непрерывности функции f(x, y) и непрерывного перемещения точки А можно наглядно изобразить поле направлений кривых, которые получаются в результате интегрирования дифференциального уравнения, т.е. представляют собой его общее решение.

Определение. Множество касательных в каждой точке рассматриваемой области называется полем направлений.

С учетом сказанного выше можно привести следующее геометрическое истолкование дифференциального уравнения:

1) Задать дифференциальное уравнение первого порядка – это значит задать поле направлений.

2) Решить или проинтегрировать дифференциальное уравнение – это значит найти всевозможные кривые, у которых направление касательных в каждой точке совпадает с полем направлений.

2. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

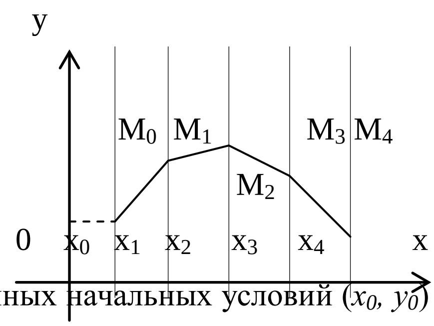
В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

Существует несколько методов численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые отличаются друг от друга по сложности вычислений и точности результата.

Рассмотрим Метод Эйлера.(Леонард Эйлер (1707 – 1783) швейцарский математик)

Известно, что уравнение $y' = f(x, y)$ задает в некоторой области поле направлений. Решение этого уравнения с некоторыми начальными условиями дает кривую, которая касается поля направлений в любой точке.

Если взять последовательность точек x_0, x_1, x_2, …. и заменить на получившихся отрезках интегральную кривую на отрезки касательных к ней, то получим ломаную линию.



При подстановке заданных начальных условий (x_0, y_0) в дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ получаем угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в начальной точке $tg\alpha_0 = y' = f(x_0, y_0)$.

Заменив на отрезке [x_0, x_1] интегральную кривую на касательную к ней, получаем значение $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$.

Производя аналогичную операцию для отрезка $[x_1, x_2]$, получаем:

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1).$$

Продолжая подобные действия далее, получаем ломаную кривую, которая называется ломаной Эйлера.

Можно записать общую формулу вычислений: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$

Если последовательность точек x_i выбрать так, чтобы они отстояли друг от друга на одинаковое расстояние h, называемое шагом вычисления, то получаем формулу:

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$$

Следует отметить, что точность метода Эйлера относительно невысока. Увеличить точность можно, конечно, уменьшив шаг вычислений, однако, это приведет к усложнению расчетов. Поэтому на практике применяется так называемый уточненный метод Эйлера или формула пересчета.

Суть метода состоит в том, что в формуле $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$ вместо значения $y_0' = f(x_0, y_0)$ берется среднее арифметическое значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1)$. Тогда уточненное значение: $y_1^{(1)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}h;$

Затем находится значение производной в точке $(x_1, y_1^{(1)})$. Заменяя $f(x_0, y_0)$ средним арифметическим значений $f(x_0, y_0)$ и $f(x_1, y_1^{(1)})$, находят второе уточненное значение y_1.

$$y_1^{(2)} = y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(1)})}{2}h;$$

Затем третье: $y_1^{(3)} = y_0 + \dfrac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^{(2)})}{2}h;$

и т.д. пока два последовательных уточненных значения не совпадут в пределах заданной степени точности. Тогда это значение принимается за ординату точки M_1 ломаной Эйлера.

Аналогичная операция производится для остальных значений *y*.

Подобное уточнение позволяет существенно повысить точность результата.

Пример. Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = x + y$ при начальном условии y(0) = 1 на отрезке [0; 0,5] с шагом 0,1.

Применяем формулу $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \qquad f(x_0, y_0) = x_0 + y_0 = 1;$$

$$hf(x_0, y_0) = h(x_0 + y_0) = 0{,}1;$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 = 1{,}1.$$

$$x_1 = 0{,}1 \quad y_0 = 1{,}1 \qquad f(x_1, y_1) = x_1 + y_1 = 1{,}2;$$

$$hf(x_1, y_1) = h(x_1 + y_1) = 0{,}12;$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}12 = 1{,}22.$$

Производя аналогичные вычисления далее, получаем таблицу значений:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,528	1,721

Применим теперь уточненный метод Эйлера.

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1,1	1,243	1,400	1,585	1,799

Для сравнения точности приведенных методов численного решение данного уравнения решим его аналитически и найдем точные значения функции y на заданном отрезке.

Уравнение $y' - y = x$ является линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка. Решим соответствующее ему однородное уравнение.

$$y' - y = 0; \qquad y' = y; \qquad \frac{dy}{dx} = y; \qquad \frac{dy}{y} = dx; \qquad \int \frac{dy}{y} = \int dx;$$

$$\ln|y| = x + \ln C; \qquad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = x; \qquad y = Ce^x;$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид $y = C(x)e^x$.

$$y' = C'(x)e^x + C(x)e^x;$$

$$C'(x)e^x + C(x)e^x = x + C(x)e^x; \qquad C'(x)e^x = x; \qquad C'(x) = xe^{-x};$$

$$C(x) = \int xe^{-x}dx = \begin{cases} u = x; & dv = e^{-x}dx; \\ du = dx; & v = -e^{-x}; \end{cases} = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

Общее решение: $y = Ce^x - x - 1;$

С учетом начального условия: $1 = C - 0 - 1; \qquad C = 2;$

Частное решение: $y = 2e^x - x - 1;$ Для сравнения полученных результатов составим таблицу.

i	x_i	y_i		
		Метод Эйлера	Уточненный метод Эйлера	Точное значение
0	0	1	1	1
1	0,1	1,1	1,1	1,1103

2	0,2	1,22	1,243	1,2428
3	0,3	1,362	1,4	1,3997
4	0,4	1,528	1,585	1,5837
5	0,5	1,721	1,799	1,7975

Форма контроля – Отчет по выполненной работе. Содержание отчета: название работы, цель, задания и их решения, ответы на контрольные вопросы, общий вывод по проделанной работе.

Вопросы для самоконтроля.

1. Проанализируйте, как отличается точное значение при решении дифференциального уравнения, от значения, получаемого методом Эйлера.
2. В чем заключается суть метода Эйлера для решения дифференциального уравнения.

Рекомендуемая литература.

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. - 15-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2017. - 279, [1] с.: ил. - (Высшее образование). - ISBN 978-5-8112-6617-3 (ч. 1). - ISBN 978-5-8112-4000-5: 335-00.